Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 26, 2025
Artigo de Pesquisa

Operadores fracionários proporcionais aplicados ao modelo Logístico

Proportional fractional operators applied to the Logistic model

Gustavo Helias Vaz da Silva
Universidade do Estado de Minas Gerais (UEMG), Divinópolis,
gustavo.silva@uemg.br

Erasmo Tales Fonseca
Universidade do Estado de Minas Gerais (UEMG), Divinópolis

Resumo

Com o objetivo de tentar descrever um fenômeno mais próximo da realidade, a Modelagem Matemática se apresenta como uma ferramenta essencial para a compreensão de fenômenos de diversas naturezas. Em uma mesma perspectiva, com o avanço do cálculo de ordem fracionária, diversos trabalhos foram publicados e esta Modelagem Matemática se mostrou muito promissora. Desta forma, amparados por esta nova ótica e aliados a esta teoria generalizada de modelos de crescimento, este trabalho tem como objetivo estudar operadores fracionários proporcionais, para a avaliação das soluções analíticas e numéricas do modelo Logístico.
Palavras-chave: cálculo fracionário; EDOs de ordem fracionária; modelos de crescimento.

Abstract

With the aim of trying to describe a phenomenon closer to reality, Mathematical Modeling presents itself as an essential tool for understanding phenomena of various natures. In the same perspective, with the advancement of fractional order calculus, several works were published and this Mathematical Modeling proved to be very promising. Thus, supported by this new perspective and allied to this generalized theory of growth models, this work aims to study proportional fractional operators, for the evaluation of analytical and numerical solutions of the Logistic model.
Keywords: fractional calculus; ODEs of arbitrary order; growth models.

Artigo recebido em abr. 2025 e aceito em ago. 2025

1 Introdução

O campo de pesquisas científicas sobre o estudo da Modelagem Matemática apresenta-se eficiente e, atualmente, dispõe de diversos trabalhos publicados em diversas áreas. Em relação aos estudos aplicados às Ciências Biológicas, a Modelagem Matemática possibilita a compreensão, análise e possibilidade de intervenções relacionadas ao crescimento, controle e avanços de populações e também de doenças de diversas naturezas.

Através de um resgate literário científico, é possível perceber que a pesquisa por generalizações associadas à Matemática se apresentou como um dos aspectos de grande importância para o progresso da sociedade. Nesta concepção, o trabalho de Turner *et al.* (1976), introduziu relações sobre a essência apresentada entre os principais modelos acerca da Teoria de Crescimento Populacional. No mesmo sentido, a Modelagem de Ordem Fracionária tem sido utilizada para generalizar resultados destes modelos advindos da Modelagem de Ordem Inteira, e esta perspectiva de conhecimento está contribuindo para a formulação e avaliação de novas teorias.

Também, observa-se que o estudo e desenvolvimento do cálculo de ordem fracionária foi pautado pela busca de generalizações para o cálculo de ordem inteira. Entretanto, este conhecimento possui grande importância na comunidade contemporânea, deixando de ser somente uma área da Matemática Pura, esses estudos possuem resultados relevantes para a Modelagem Matemática. Para Camargo e Oliveira (2015), a modelagem elaborada com equações diferenciais de ordem fracionária proporciona em muitas situações, análises e resultados mais próximos do desejado, quando comparada com a modelagem de equações diferenciais de ordem inteira.

Posto isso, este trabalho tem como objetivo contribuir para a análise das divergências apresentadas pelas soluções analíticas e numéricas do modelo de crescimento Logístico.

2 Preliminares

2.1 Espaços Funcionais

O desenvolvimento rigoroso do Cálculo Fracionário exige o domínio de certos conceitos fundamentais relacionados aos espaços funcionais. Esses espaços fornecem a estrutura analítica adequada para o estudo de operadores integrais e diferenciais fracionários, permitindo a definição precisa de propriedades como integrabilidade, continuidade, diferenciabilidade e comportamento assintótico das funções envolvidas.

Nesta seção, serão apresentados os principais espaços funcionais utilizados na formulação e análise de operadores fracionários, tais como os espaços de Lebesgue ponderados, espaços de funções absolutamente contínuas, continuamente diferenciáveis e suas versões generalizadas com pesos e reparametrizações. A compreensão desses espaços é essencial para garantir a validade matemática das definições e resultados que surgirão nas seções posteriores.

Definição 1 (Espaços de funções integráveis) (Oliveira, 2018) *Seja $\Omega = [a, b](-\infty < a < b < \infty)$ um intervalo finito ou infinito do eixo real. Denotamos por $X_c^p(a, b)(c \in \mathbb{R}; 1 \leq p < \infty)$ o conjunto das funções de medida de Lebesgue a valores-complexos f em Ω para que $||f||_{X_c^p} < \infty$, onde*

$$||f||_{X_c^p} := \left(\int_a^b |t^c f(t)|^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p}, \qquad (1 \leq p < \infty) \tag{1}$$

e

$$||f||_{X_c^\infty} := ess\ sup_{a\leq x\leq b}\ [x^c|f(x)|]\,, \tag{2}$$

onde ess sup$|x^c f(x)|$ é o máximo essencial da função $|x^c f(x)|$. Em particular, quando $c = 1/p$, o espaço $X_c^p(a,b)$ coincide com o espaço $L^p(a,b)$ tradicional, com

$$||f||_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}, \qquad (1 \leq p < \infty) \tag{3}$$

e

$$||f||_\infty := ess\ sup_{a\leq x\leq b}|f(x)|, \tag{4}$$

onde ess sup$|f(x)|$ é o máximo essencial da função $|f(x)|$.

Definição 2 (Espaços de funções absolutamente contínuas) (Oliveira, 2018) *Uma função $f(x)$ é chamada de absolutamente contínua em um intervalo Ω se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que, para qualquer conjunto finito de intervalos não interseccionantes $[a_k, b_k] \subset \Omega$, com $k = 1, 2, \cdots, n$, tivermos*

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon. \tag{5}$$

O espaço dessas funções é denotado por $AC(\Omega)$.

Definição 3 (Espaços de funções absolutamente contínuas) (Oliveira, 2018) *Seja agora $[a,b]$ com $-\infty < a < b < \infty$ um intervalo finito e seja $AC[a,b]$ o espaço de funções f que são absolutamente contínuas em $[a,b]$. É conhecido que $AC[a,b]$ coincide com o espaço de funções primitivas de séries de Lebesgue:*

$$f(x) \in AC[a,b] \iff f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\,dt \quad (\varphi(t) \in L(a,b)), \tag{6}$$

e, portanto, uma função absolutamente contínua $f(x)$ tem uma derivada $f'(x) = \varphi(x)$ quase em toda parte de $[a,b]$. Assim, a definição fornece $\varphi(t) = f'(t)$ e $c = f(a)$.

Definição 4 (Espaços de funções absolutamente contínuas) (Oliveira, 2018) *Seja $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \cdots\}$. Denotamos por $AC^n[a,b]$ o espaço de funções de valores complexos $f(x)$ que têm derivadas contínuas até ordem $n-1$ em $[a,b]$ tal que $f^{(n-1)}(x) \in AC[a,b]$:*

$$AC^n[a,b] = \left\{f : [a,b] \to \mathbb{C} \qquad e \qquad [(D^{n-1}f)(x)] \in AC[a,b] \quad \left(D = \frac{d}{dx}\right)\right\}, \tag{7}$$

sendo $\mathbb{C}$ o conjunto de números complexos. Em particular, $AC^1[a,b] = AC[a,b]$.

Definição 5 (Espaços de funções continuamente diferenciáveis) (Oliveira, 2018) *Sejam $\Omega = [a,b]$ com $-\infty < a < b < \infty$ e $m \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, \cdots\}$. Denotamos por $C^m(\Omega)$ o espaço de funções f que são m-vezes continuamente diferenciáveis em Ω, com a norma*

$$||f||_{C^m} = \sum_{k=0}^{m} \left\| f^{(k)} \right\|_C = \sum_{k=0}^{m} \max_{x\in\Omega} |f^{(k)}(x)|, \quad m \in \mathbb{N}_0. \tag{8}$$

Em particular, para $m = 0$*, temos* $C^0(\Omega) = C(\Omega)$*, que é o espaço das funções contínuas em* Ω *com a norma*

$$||f||_C = \max_{x\in\Omega} |f(x)|. \tag{9}$$

Definição 6 (Espaços de funções contínuas) (Pulido, 2024) *Seja* $\Omega = [a, b]$ *um intervalo finito e* $\gamma \in \mathbb{C}$*, com* $0 \leq Re(\gamma) < 1$*, é definido o espaço* $C_\gamma[a, b]$ *de funções* f *dadas em* $(a, b]$*, tal que a função* $(x - a)^\gamma f(x) \in C[a, b]$ *e*

$$||f||_{C\gamma} = ||(x - a)^\gamma f(x)||_C, \quad C_0[a, b] = C[a, b]. \tag{10}$$

Definição 7 (Espaços de funções contínuas) (Pulido, 2024) *Seja* $\Omega = [a, b]$ *um intervalo finito e* $\gamma \in \mathbb{C}$*, com* $0 \leq Re(\gamma) < 1$*, é definido o espaço ponderado* $C_{\gamma,\psi}[a, b]$ *de funções* f *dadas em* $(a, b]$*, tal que a função* $(\psi(x) - \psi(a))^\gamma f(x) \in C[a, b]$ *e*

$$||f||_{C\gamma,\psi} = ||(\psi(x) - \psi(a))^\gamma f(x)||_C. \tag{11}$$

Definição 8 (Espaços de funções continuamente diferenciáveis) (Pulido, 2024) *Seja* $n \in \mathbb{N}$*, o espaço de Banach* $C^n_\gamma[a, b]$ *das funções* $f(x)$*, que são continuamente diferenciáveis em* $[a, b]$ *com ordem até* $n - 1$ *e têm derivadas* $f^{(n)}(x)$ *de ordem* n *em* $(a, b]$*, tal que* $f^{(n)} \in C_\gamma[a, b]$*, é definido como:*

$$C^n_\gamma[a, b] := \left\{ f : ||f||_{C^n_\gamma} = \sum_{k=0}^{n-1} ||f^{(k)}||_C + ||f^{(n)}||_{C_\gamma} \right\}, \quad C^0_\gamma[a, b] = C_\gamma[a, b]. \tag{12}$$

Definição 9 (Espaços de funções continuamente diferenciáveis) (Pulido, 2024) *Seja* $n \in \mathbb{N}$*, o espaço ponderado* $C^n_{\gamma,\psi}[a, b]$ *das funções* $f(x)$*, que são continuamente diferenciáveis em* $[a, b]$ *com ordem até* $n - 1$ *e têm derivadas* $f^{(n)}(x)$ *de ordem* n *em* $(a, b]$*, tal que* $f^{(n)} \in C_{\gamma,\psi}[a, b]$*, é definido com a norma:*

$$C^n_{\gamma,\psi}[a, b] := \left\{ f : ||f||_{C^n_\gamma} = \sum_{k=0}^{n-1} ||f^{(k)}||_C + ||f^{(n)}||_{C_{\gamma,\psi}} \right\}, \quad C^0_{\gamma,\psi}[a, b] = C_{\gamma,\psi}[a, b]. \tag{13}$$

Definição 10 (Espaços de funções continuamente diferenciáveis) (Pulido, 2024) *Sejam* $0 < \alpha < 1$ *e* $0 \leq \beta < 1$*. O espaço ponderado* $C^{\alpha,\beta}_{\gamma,\psi}[a, b]$*, é definido como:*

$$C^{\alpha,\beta}_{\gamma;\psi}[a, b] := \left\{ f \in C_{\gamma;\psi}[a, b] : {}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} f \in C_{\gamma;\psi}[a, b] \right\}, \qquad \text{com } \gamma = \alpha + \beta(1 - \alpha). \tag{14}$$

Onde ${}^H\mathbb{D}^{\alpha,\beta;\psi}_{a+} f(x)$ *é definido como o operador derivada de Hilfer* (Sousa; Oliveira, 2018).

2.2 Tópicos e Funções Especiais

Observando que o avanço do cálculo de ordem inteira dependeu de importantes funções, propriedades e suas características, o Cálculo de Ordem Fracionária também possui importantes funções que são fundamentos da Modelagem de Ordem Fracionária.

A função gama de Euler de segunda espécie, denotada como $\Gamma(z)$, é uma função essencial para o desenvolvimento do cálculo de ordem fracionária (Camargo; Oliveira, 2015). Esta função também é referida como uma generalização do conceito de fatorial para $n \notin \mathbb{Z}$ e é expressa pela seguinte integral imprópria:

Definição 11 (Díaz; Pariguan, 2007) *Seja $z \in \mathbb{C}$, com $Re(z) > 0$ e $\kappa > 0$, a função κ - gama é definida por:*

$$\Gamma_\kappa(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-\frac{t^k}{k}} dt. \tag{15}$$

Algumas relações são obtidas, em particular, quando tomamos $\kappa = 1$, observamos que $\Gamma_\kappa(z) = \Gamma(z)$ (WANG, 2016):

1. $\Gamma_\kappa(z + \kappa) = z\Gamma_\kappa(z)$;
2. $\Gamma_\kappa(z) = \kappa^{\frac{z}{\kappa}-1}\Gamma\left(\frac{z}{\kappa}\right)$;
3. $\Gamma_\kappa(\kappa) = 1$;
4. $\Gamma_\kappa(z)\Gamma_\kappa(\kappa - z) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi z}{\kappa}\right)}$.

Definição 12 (Díaz; Pariguan, 2007) *Seja $z \in \mathbb{C}$, $\kappa \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^+$, o símbolo $\kappa - Pochhammer$ é definido como*

$$(z)_{n,\kappa} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ z(z+\kappa)\cdots(z+(n-1)\kappa), & n \in \mathbb{N} \; e \; z \in \mathbb{C}. \end{cases} \tag{16}$$

Em particular, quando $\kappa \rightarrow 1$, recupera-se o símbolo de Pochhammer clássico, obtido como $(x)_{n,1} = (x)_n$.

Definição 13 (Díaz; Pariguan, 2007) *Sejam $x, z \in \mathbb{C}$, com $Re(x) > 0$, $Re(z) > 0$ e $\kappa > 0$ a função $\kappa - beta$ é definida por*

$$B_\kappa(x, z) := \frac{1}{\kappa} \int_0^1 t^{\frac{x}{\kappa}-1}(1-t)^{\frac{z}{\kappa}-1} dt. \tag{17}$$

Uma relação entre a função κ-beta e a função κ-gama, semelhante às clássicas, pode ser escrita da seguinte forma:

1. $B_\kappa(x, z) = \frac{\Gamma_k(x)\Gamma_k(z)}{\Gamma_k(x+z)}$;
2. $B_\kappa(x, z) = \frac{1}{\kappa} B\left(\frac{x}{\kappa}, \frac{z}{\kappa}\right)$.

Segundo Camargo e Oliveira (2015), assim como a resolução de equações diferenciais de ordem inteira possuem como soluções termos de uma função exponencial, no estudo de equações diferenciais fracionárias, em algumas situações, a solução dessas equações é dada pela função de Mittag-Leffler. Desta forma, temos as seguintes definições:

Definição 14 (Oliveira, 2018) *Sejam $\kappa \in \mathbb{R}^+$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, com $Re(\alpha) > 0$ e $Re(\beta) > 0$. A função κ - Mittag - Leffler $E^{\gamma}_{\kappa,\alpha,\beta}(z)$, é definida como*

$$E^{\gamma}_{\kappa,\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_{n,k}}{\Gamma_\kappa(\alpha n + \beta)} \frac{z^n}{n!}. \tag{18}$$

onde, $(\gamma)_{n,k}$ é o símbolo $\kappa - Pochhammer$ e $\Gamma_\kappa(z)$ é a função κ-gama.

Observa-se que, ao tomar $\gamma \to 1$ e $\kappa \to 1$, recupera-se a função de Mittag - Leffler de dois parâmetros

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}. \tag{19}$$

Um resultado importante para o trabalho, pode ser observado em Grigoletto (2014). Desta forma, podemos escrever a função de Mittag - Leffler de dois parâmetros como:

$$E_{\alpha,\alpha+1}(-t^{\alpha}) = \frac{1 - E_{\alpha}\left(-t^{\alpha}\right)}{t^{\alpha}}. \tag{20}$$

A transformada ψ-Laplace representa uma generalização da clássica transformada de Laplace, introduzindo uma função de reparametrização $\psi(t)$, que permite adaptar a transformação a contextos mais amplos e não uniformes (Jarad; Abdeljawad, 2020). Essa abordagem tem se mostrado eficaz na resolução de equações diferenciais fracionárias generalizadas e é definida como:

Definição 15 (Transformada ψ - Laplace) (Jarad; Abdeljawad, 2020) *Seja $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função de valor real, $\psi(t) \in C([a, \infty), \mathbb{R})$ com $\psi'(t) > 0$. Então a transformada ψ - Laplace de f é dada por*

$$\mathcal{L}_{\psi}\{f(t)\} = \int_a^{\infty} e^{-s(\psi(t)-\psi(a))} f(t)\psi'(t)dt. \tag{21}$$

Definição 16 (Ordem ψ - exponencial) (Jarad; Abdeljawad, 2020) *Uma função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é dita ser de ordem ψ - exponencial se existirem números positivos c, M e T tais que $|f(t)| \leq Me^{c\psi(t)}$, para todo $t \geq T$.*

Teorema 1 (Condição de existência para transformada ψ - Laplace) (Jarad; Abdeljawad, 2020) *Se $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua por partes e é de ordem $\psi(t)$ - exponencial, então sua transformada de Laplace generalizada existe para $s > c$.*

Demonstração

Ver Jarad e Abdeljawad (2020).

Teorema 2 (Transformada generalizada da derivada) (Jarad; Abdeljawad, 2020) *Suponha que $f \in C_{\gamma,\psi}([a,b],\mathbb{R})$ de ordem $\psi(t)$ - exponencial de modo que, $f^{(1)}(t)$ seja contínua por partes em $[a,b]$. Então a transformada ψ - Laplace de $f^{(1)}(t)$ existe, onde*

$$\mathcal{L}_\psi\left\{f^{(1)}(t)\right\} = s\mathcal{L}_\psi\{f(t)\} - f(a), \qquad f^{(1)}(t) = \frac{f'(t)}{\psi'(t)}. \tag{22}$$

Demonstração
Ver Jarad e Abdeljawad (2020).

Corolário 1 (Transformada generalizada da n-ésima derivada) (Jarad; Abdeljawad, 2020) *Sejam $f \in C^{n-1}_{\gamma,\psi}([a,b],\mathbb{R})$ de modo que $f^{(i)}$, $i = 0,1,2,\cdots,n{-}1$, são de ordem ψ - exponencial e $f^{(n)}$ é uma função contínua por partes em $[a,b]$. Então, a transformada de Laplace generalizada de $f^{(n)}(t)$ existe onde*

$$\mathcal{L}_\psi\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n\mathcal{L}_\psi\{f(t)\} - \sum_{i=0}^{n-1} s^{n-i-1}f^{(i)}(a). \tag{23}$$

Demonstração
Ver Jarad e Abdeljawad (2020).

Definição 17 (Convolução de ψ - Laplace) (Jarad; Abdeljawad, 2020) *Suponha que f e g são duas funções contínuas por partes em $[a,b]$ e de ordem ψ - exponencial. A ψ - convolução de f e g é dada por*

$$\left(f *_\psi g\right)(t) = \int_a^t f(s)g\left(\psi^{-1}(\psi(t)+\psi(a)-\psi(s))\right)\psi'(s)ds. \tag{24}$$

Definição 18 (Transformada da convolução de ψ - Laplace) (Jarad; Abdeljawad, 2020) *Suponha que f e g são duas funções contínuas por partes em $[a,b]$ e de ordem ψ - exponencial. A transformada ψ - convolução de f e g é dada por*

$$\mathcal{L}_\psi\{f(t) *_\psi g(t)\} = \mathcal{L}_\psi\{f(t)\}\mathcal{L}_\psi\{g(t)\}. \tag{25}$$

Proposição 1 (Jarad; Abdeljawad, 2020) *Sejam α, $\beta \in \mathbb{C}$, com $Re(\alpha)$ e $\left|\frac{\lambda}{s^\alpha}\right| < 1$. As seguintes propriedades são verdadeiras:*

1. $\mathcal{L}_\psi\{1\} = \frac{1}{s}, s > 0$;
2. $\mathcal{L}_\psi\left\{(\psi(t)-\psi(a))^\beta\right\} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{s^{\beta+1}}, s > 0$;
3. $\mathcal{L}_\psi\left\{e^{\lambda(\psi(t)-\psi(a))}\right\} = \frac{1}{s-\lambda}, s > \lambda$;
4. $\mathcal{L}_\psi\left\{e^{\lambda(\psi(t)-\psi(a))}f(t)\right\} = \mathcal{L}_\psi\{f(t)\}(s-\lambda)$;
5. $\mathcal{L}_\psi\left\{(\psi(t)-\psi(a))^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(\lambda(\psi(t)-\psi(a))^\alpha\right)\right\} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha-\lambda}$.

Demonstração (5)
Por definição, segue que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\psi}\left\{(\psi(t)-\psi(a))^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(\lambda(\psi(t)-\psi(a))^{\alpha}\right)\right\} &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}\mathcal{L}_{\psi}\left\{(\psi(t)-\psi(a))^{k\alpha+\beta-1}\right\}}{\Gamma(k\alpha+\beta)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{\Gamma(k\alpha+\beta)}\frac{\Gamma(k\alpha+\beta)}{s^{k\alpha+\beta}} \\
&= \frac{1}{s^{\beta}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{s^{\alpha}}\right)^{k} \\
&= \frac{1}{s^{\beta}}\frac{1}{1-\frac{\lambda}{s^{\alpha}}} \\
&= \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}-\lambda}.
\end{aligned} \tag{26}
$$

■

3 Cálculo Fracionário: Operadores Generalizados

3.1 (κ, ψ) - Operadores Fracionários Proporcionais ((κ, ψ) - OFPs)

A derivada compatível foi introduzida pela primeira vez por Khalil *et al.* (2014) e, posteriormente, explorada por Anderson e Ulness (2015), os autores modificaram a derivada compatível utilizando a derivada proporcional. Desta forma, têm-se as definições:

Definição 19 (Derivada compatível) (Khalil *et al.*, 2014) Seja $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ e $t>0$. A derivada fracionária compatível de f de ordem α, é definida por:

$$f^{(\alpha)}(t)=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{f(t+\epsilon t^{1-\alpha})-f(t)}{\epsilon}, \tag{27}$$

para $t>0$, $\alpha\in(0,1)$. Se f é α - diferenciável em algum intervalo $(0,a)$, com $a>0$, e $\lim_{t\to 0^{+}} f^{(\alpha)}(t)$ existe, então defini-se:

$$f^{(\alpha)}(0)=\lim_{t\to 0^{+}} f^{(\alpha)}(t). \tag{28}$$

Definição 20 (Derivada compatível modificada) (Anderson; Ulness, 2015) Para $p\in[0,1]$, sejam as funções $\sigma_0,\sigma_1:[0,1]\times\mathbb{R}\to[0,\infty)$ contínuas tais que, para todo $t\in\mathbb{R}$, temos

$$\lim_{p\to 0^{+}}\sigma_1(p,t)=1,\quad \lim_{p\to 0^{+}}\sigma_0(p,t)=0,\quad \lim_{p\to 1^{-}}\sigma_1(p,t)=0,\quad \lim_{p\to 1^{-}}\sigma_0(p,t)=1, \tag{29}$$

e $\sigma_1(p,t)\neq 0$ para $p\in[0,1)$ e $\sigma_0(p,t)\neq 0$, para $p\in(0,1]$. Então, o operador diferencial compatível modificado de ordem p, é definido por

$$D^{p}f(t)=\sigma_1(p,t)f(t)+\sigma_0(p,t)f'(t). \tag{30}$$

O operador pode ser referido também como derivada proporcional.

De especial interesse, restringimos nossa atenção ao caso em que $\sigma_1(p,t) = 1-p$ e $\sigma_0(p,t) = p$. Portanto, a equação (30) define o operador derivada proporcional, como

$$D^p f(t) = (1-p)f(t) + pf'(t). \tag{31}$$

Onde $D^{n,p} f(t)$ é derivada compativel por n vezes $D^{n,p} f(t) := \underbrace{(D^p \cdots D^p f)(t)}_{n-vezes}$. E, observando que

$$\lim_{p\to 0^+} D^p f(t) = f(t) \quad \text{e} \quad \lim_{p\to 1^-} D^p f(t) = f'(t). \tag{32}$$

Os operadores integrais proporcionais fracionários associados, são definidos como em Sudsutad *et al.* (2024).

$$I_a^{n,p} f(t) = \frac{1}{p^n\Gamma(n)} \int_a^t e^{\frac{p-1}{p}(t-s)}(t-s)^{n-1} f(s)ds, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{33}$$

Conforme Sudsutad *et al.* (2024), para conveniência e facilidade de computação neste trabalho, definimos o seguinte símbolo:

$${}_{\kappa}^{p}\Psi_{\psi}^{\frac{\alpha}{\kappa}-1}(t,s) := e^{\frac{p-1}{\kappa p}(\psi(t)-\psi(s))}(\psi(t)-\psi(s))^{\frac{\alpha}{\kappa}-1}, \quad a \le s < t \le T. \tag{34}$$

Para as expressões enunciadas em (30) e (33), temos as seguintes definições generalizadas (Sudsutad *et al.*, 2024).

$$D^{p;\psi} f(t) = \sigma_1(p,t)f(t) + \sigma_0(p,t)\frac{f'(t)}{\psi'(t)}. \tag{35}$$

Em particular, para $\sigma_1(p,t) = 1-p$ e $\sigma_0(p,t) = p$. Portanto, a equação (35) torna-se

$$D^{p;\psi} f(t) = (1-p)f(t) + p\frac{f'(t)}{\psi'(t)}. \tag{36}$$

Sob todas as considerações realizadas, damos as definições de operadores (κ,ψ) - derivadas fracionárias proporcionais. Ao tomar $\sigma_0(p,t) = \kappa p$ e $\sigma_1(p,t) = 1-p$ em (35), o operador de (κ,ψ) - derivada fracionária proporcional do lado esquerdo ((κ,ψ) - DFP), pode ser definido como

Definição 21 ((κ,ψ) - Derivadas fracionárias proporcionais) *O operador ((κ,ψ) - DFP) pela esquerda, é definido como*

$${}_{\kappa}D^{p;\psi} f(t) := (1-p)f(t) + \kappa p\frac{f'(t)}{\psi'(t)} \qquad e \qquad {}_{\kappa}D^{n,p;\psi} f(t) = \underbrace{({}_{\kappa}D^{p;\psi} \cdots {}_{\kappa}D^{p;\psi} f)(t)}_{n-vezes}. \tag{37}$$

Teorema 3 (Transformada de ψ - Laplace de ((κ,ψ) - DFP)) (Sudsutad *et al.*, 2024) Suponha que $f \in C_{\gamma,\psi}([a,b],\mathbb{R})$ e é de ordem ψ - exponencial tal que o operador (κ,ψ) - DFP é contínuo por partes em $[a,b]$. Então a transformada (κ,ψ) - DFP é dada por

$$\mathcal{L}_{\psi}\left\{{}_{\kappa}D^{p;\psi} f(t)\right\} = (1-p+\kappa ps)\mathcal{L}_{\psi}\{f(t)\} - \kappa pf(a). \tag{38}$$

Demonstração

Por definição, decorre que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\psi\left\{{}_\kappa D^{p;\psi}f(t)\right\} &= \mathcal{L}_\psi\left\{(1-p)f(t)+\kappa p\frac{f'(t)}{\psi'(t)}\right\}\\ &= (1-p)\mathcal{L}_\psi\{f(t)\}+\kappa p\mathcal{L}_\psi\left\{\frac{f'(t)}{\psi'(t)}\right\}\\ &= (1-p)\mathcal{L}_\psi\{f(t)\}+\kappa p\left(s\mathcal{L}_\psi\{f(t)\}-f(a)\right)\\ &= (1-p+\kappa ps)\mathcal{L}_\psi\{f(t)\}-\kappa pf(a).\end{aligned} \tag{39}$$

■

Teorema 4 (Transformada ψ - Laplace de ordem enésima ((κ,ψ) - DFP)) (Sudsutad *et al.*, 2024) Suponha que $f\in C_\psi^{n-1}([a,\infty),\mathbb{R})$ é tal que $f^{(i)}, i=1,2,\cdots,n{-}1$, são de ordem ψ - exponencial em $[a,b]$ e $f^{(n)}$ é uma função contínua por partes no intervalo. Então a transformada ψ - Laplace de ${}_\kappa D^{n,p;\psi}f(t)$ é dada por

$$\mathcal{L}_\psi\{{}_\kappa D^{n,p;\psi}f(t)\}=(1-p+\kappa ps)^n\mathcal{L}_\psi\{f(t)\}-\kappa p\sum_{i=0}^{n-1}(1-p+\kappa ps)^{n-1-i}\left({}_\kappa D^{i,p;\psi}f(a)\right). \tag{40}$$

Demonstração
Ver Sudsutad *et al.* (2024).

Definição 22 ((κ,ψ) - Integrais fracionárias proporcionais) *Sejam $\kappa>0$ e $n\in\mathbb{N}$. O operador ((κ,ψ) - IFP), pela esquerda, é definido como*

$$ {}_\kappa I_a^{n,p;\psi}f(t):=\frac{1}{p^n\kappa\Gamma_\kappa(n\kappa)}\int_a^t {}_\kappa^p\Psi_\psi^{n-1}(t,s)\psi'(s)f(s)ds, \qquad a<t. \tag{41}$$

De modo análogo, podemos definir os operadores pela direita:

Definição 23 ((κ,ψ) - Derivadas fracionárias proporcionais) *O operador ((κ,ψ) - DFP) pela direita, é definido como*

$$ {}_\kappa D_\ominus^{p;\psi}f(t):=(1-p)f(t)-\kappa p\frac{f'(t)}{\psi'(t)} \qquad e \qquad {}_\kappa D_\ominus^{n,p;\psi}f(t)=\underbrace{({}_\kappa D_\ominus^{p;\psi}\cdots{}_\kappa D_\ominus^{p;\psi}f)(t)}_{n-vezes}. \tag{42}$$

Definição 24 ((κ,ψ) - Integrais fracionárias proporcionais) *Sejam $\kappa>0$ e $n\in\mathbb{N}$. O operador ((κ,ψ) - IFP), pela direita, é definido como*

$$ {}_\kappa I_b^{n,p;\psi}f(t):=\frac{1}{p^n\kappa\Gamma_\kappa(n\kappa)}\int_t^b {}_\kappa^p\Psi_\psi^{n-1}(s,t)\psi'(s)f(s)ds, \qquad t<b. \tag{43}$$

Observando que, para uma função f integrável no intervalo $[a,b]$, $\kappa>0$, $p\in(0,1]$ e $n\in\mathbb{N}$, conforme em Sudsutad *et al.*, (2024), temos que

$$ {}_\kappa D^{n,p;\psi}\left({}_\kappa I^{n,p;\psi}f(t)\right)=f(t) \qquad e \qquad {}_\kappa I^{n,p;\psi}\left({}_\kappa D^{n,p;\psi}f(t)\right)=f(t). \tag{44}$$

3.2 Integrais Fracionárias Generalizadas

A definição da integral fracionária proporcional (κ, ψ) de Riemann - Liouville surge como uma generalização da clássica integral fracionária, incorporando parâmetros que modulam proporcionalmente a estrutura da integração fracionária (Sudsutad *et al.*, 2024). Esta formulação visa ampliar a aplicabilidade do cálculo fracionário, ao introduzir uma função de deformação $\psi(x)$ e o parâmetro proporcional p, mantendo a consistência com as propriedades fundamentais das integrais de Riemann-Liouville.

Definição 25 (Integral fracionária proporcional (κ, ψ) - Riemann - Liouville ((κ, ψ) - IFPRL)) (Sudsutad *et al.*, 2024) Sejam $f \in L^1[a,b]$, $Re(\alpha) > 0$, $\kappa > 0$, $p \in (0,1]$ e a função $\psi(x)$, uma função crescente e monótona positiva em $(a,b]$, com derivada contínua $\psi'(x)$ em (a,b). As integrais fracionárias proporcionais de Riemann - Liouville (à esquerda e à direita) são definidas, respectivamente por

$$
{}^{RL}{}_{\kappa}I_a^{\alpha,p;\psi} f(t) := \frac{1}{p^{\frac{\alpha}{\kappa}} \kappa \Gamma_\kappa(\alpha)} \int_a^t {}_{\kappa}^{p}\Psi_{\psi}^{\frac{\alpha}{\kappa}-1}(t,s)\psi'(s) f(s) ds, \qquad a < t, \tag{45}
$$

e

$$
{}^{RL}{}_{\kappa}I_b^{\alpha,p;\psi} f(t) := \frac{1}{p^{\frac{\alpha}{\kappa}} \kappa \Gamma_\kappa(\alpha)} \int_t^b {}_{\kappa}^{p}\Psi_{\psi}^{\frac{\alpha}{\kappa}-1}(s,t)\psi'(s) f(s) ds, \qquad t < b. \tag{46}
$$

De modo imeditato, tomando $p = 1$, obtemos a definição conforme (Kwun *et al.*, 2018).

Teorema 5 (Transformada ψ - Laplace de ((κ, ψ) - IFPRL)) (Sudsutad *et al.*, 2024) Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > 0$, e $p \in (0,1]$. Suponha que f seja uma função contínua por partes em $[a,t]$ e de ordem ψ - exponencial. Então temos

$$
\mathcal{L}_\psi \left\{ {}^{RL}{}_{\kappa}I_a^{\alpha,p;\psi} f(t) \right\} = \frac{\mathcal{L}_\psi\{f(t)\}}{(\kappa p s - p + 1)^{\frac{\alpha}{\kappa}}}. \tag{47}
$$

Demonstração

Por definição, temos que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_\psi \left\{ {}^{RL}{}_{\kappa}I_a^{\alpha,p;\psi} f(t) \right\} &= \frac{1}{\kappa p^{\frac{\alpha}{\kappa}} \Gamma_\kappa(\alpha)} \mathcal{L}_\psi \left\{ f *_\psi e^{\frac{p-1}{\kappa p}(\psi(t)-\psi(a))} (\psi(t) - \psi(a))^{\frac{\alpha}{\kappa}-1} \right\} \\
&= \frac{1}{\kappa p^{\frac{\alpha}{\kappa}} \Gamma_\kappa(\alpha)} \mathcal{L}_\psi\{f(t)\} \mathcal{L}_\psi \left\{ e^{\frac{p-1}{\kappa p}(\psi(t)-\psi(a))} (\psi(t) - \psi(a))^{\frac{\alpha}{\kappa}-1} \right\} \\
&= \frac{1}{\kappa p^{\frac{\alpha}{\kappa}} \Gamma_\kappa(\alpha)} \mathcal{L}_\psi\{f(t)\} \mathcal{L}_\psi \left\{ (\psi(t) - \psi(a))^{\frac{\alpha}{\kappa}-1} \right\} \left(s - \frac{p-1}{\kappa p} \right) \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\kappa}\right)}{\kappa p^{\frac{\alpha}{\kappa}} \Gamma_\kappa(\alpha) \left(s - \frac{p-1}{\kappa p} \right)^{\frac{\alpha}{\kappa}-1}} \mathcal{L}_\psi\{f(t)\} \\
&= \frac{\mathcal{L}_\psi\{f(t)\}}{(\kappa p s - p + 1)^{\frac{\alpha}{\kappa}}}.
\end{aligned} \tag{48}
$$

■

Definição 26 (Integral fracionária (κ,ψ) - Riemann - Liouville) (Sudsutad *et al.*, 2024) Seja $f \in L^1[a,b]$, $\kappa > 0$ e a função $\psi(x)$, uma função crescente e monótona positiva em $(a,b]$, com derivada contínua $\psi'(x)$ em (a,b). As integrais fracionárias de Riemann-Liouville (à esquerda e à direita) de ordem $\alpha > 0$ de uma função f com respeito a ψ no intervalo $[a,b]$ são definidas, respectivamente por

$$ {}^{RL}{}_{\kappa}I_a^{\alpha,1;\psi} f(t) := \frac{1}{\kappa\Gamma_\kappa(\alpha)} \int_a^t {}_{\kappa}^{1}\Psi_{\psi}^{\frac{\alpha}{\kappa}-1}(t,s)\psi'(s)f(s)ds, \qquad a < t, \tag{49} $$

e

$$ {}^{RL}{}_{\kappa}I_b^{\alpha,1;\psi} f(t) := \frac{1}{\kappa\Gamma_\kappa(\alpha)} \int_t^b {}_{\kappa}^{1}\Psi_{\psi}^{\frac{\alpha}{\kappa}-1}(s,t)\psi'(s)f(s)ds, \qquad t < b. \tag{50} $$

De maneira imediata, se tomarmos $\kappa \to 1$, obtemos a integral generalizada ψ - Riemann - Liouville:

$$ {}^{RL}{}_{1}I_a^{\alpha,1;\psi} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t {}_{1}^{1}\Psi_{\psi}^{\frac{\alpha}{\kappa}-1}(t,s)\psi'(s)f(s)ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\psi'(s)f(s)}{(\psi(t)-\psi(s))^{1-\alpha}}ds, \tag{51} $$

e

$$ {}^{RL}{}_{1}I_b^{\alpha,1;\psi} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b {}_{1}^{1}\Psi_{\psi}^{\frac{\alpha}{\kappa}-1}(s,t)\psi'(s)f(s)ds = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \frac{\psi'(s)f(s)}{(\psi(s)-\psi(t))^{1-\alpha}}ds. \tag{52} $$

3.3 Derivadas Fracionárias Generalizadas

De modo semelhante, a definição da derivada fracionária proporcional (κ,ψ) de Hilfer (DFPH) foi concebida como uma extensão das abordagens clássicas de derivadas fracionárias, incorporando parâmetros adicionais que permitem maior flexibilidade e generalidade na modelagem de sistemas complexos (Sudsutad *et al.*, 2024). Essa formulação considera a derivada como uma interpolação entre as definições de Riemann - Liouville e Caputo, adaptada a um novo tipo de proporcionalidade e regida pelos parâmetros de p e $\psi(x)$.

Definição 27 (Derivada fracionária proporcional (κ,ψ) - Hilfer ((κ,ψ) - DFPH)) (Sudsutad *et al.*, 2024) Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > 0$, $\kappa > 0$, $p \in (0,1]$, $\beta \in [0,1]$. Para $f(t) \in C^n[a,b]$, $\psi(t) \in C^n[a,b]$, com $\psi'(t) \neq 0$ e $n = \left\lceil \frac{Re(\alpha)}{\kappa} \right\rceil + 1$, o operador ($(\kappa,\psi)$ - DFPH) pela esquerda e direita, são definidas respectivamente como

$$ {}^{H}{}_{\kappa}D_a^{\alpha,\beta,p;\psi} f(t) := {}^{RL}{}_{\kappa}I_a^{\beta(n\kappa-\alpha),p;\psi} \left({}_{\kappa}D^{n,p;\psi} \left({}^{RL}{}_{\kappa}I_a^{(1-\beta)(n\kappa-\alpha),p;\psi} f(t) \right) \right) \tag{53} $$

e

$$ {}^{H}{}_{\kappa}D_b^{\alpha,\beta,p;\psi} f(t) := {}^{RL}{}_{\kappa}I_b^{\beta(n\kappa-\alpha),p;\psi} \left({}_{\kappa}D_{\ominus}^{n,p;\psi} \left({}^{RL}{}_{\kappa}I_b^{(1-\beta)(n\kappa-\alpha),p;\psi} f(t) \right) \right). \tag{54} $$

De modo imediato, para $p \to 1$, obtem-se a seguinte definição

Definição 28 (Derivada fracionária (κ,ψ) - Hilfer) *Sejam $\alpha,\kappa\in\mathbb{R}_+$, $0\leq\beta\leq 1$, $n=\left\lceil\frac{Re(\alpha)}{\kappa}\right\rceil$, $\psi(t)\in C^n[a,b]$, com $\psi'(t)\neq 0$ e $f(t)\in C^n[a,b]$. A derivada (κ,ψ) - Hilfer de ordem α e tipo β, é definida por*

$$^{H}{}_{\kappa}D_a^{\alpha,\beta,1;\psi}f(t) := {}^{RL}{}_{\kappa}I_a^{\beta(n\kappa-\alpha),1;\psi}\left({}_{\kappa}D^{n,1;\psi}\left({}^{RL}{}_{\kappa}I_a^{(1-\beta)(n\kappa-\alpha),1;\psi}f(t)\right)\right) \tag{55}$$

e

$$^{H}{}_{\kappa}D_b^{\alpha,\beta,1;\psi}f(t) := {}^{RL}{}_{\kappa}I_b^{\beta(n\kappa-\alpha),1;\psi}\left({}_{\kappa}D_{\ominus}^{n,1;\psi}\left({}^{RL}{}_{\kappa}I_b^{(1-\beta)(n\kappa-\alpha),1;\psi}f(t)\right)\right), \tag{56}$$

para ${}_{\kappa}D^{n,1;\psi}f(t)=\left(\frac{k}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n$ e ${}_{\kappa}D_{\ominus}^{n,1;\psi}f(t)=\left(-\frac{k}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n$, respectivamente.

Teorema 6 (Transformada ψ - Laplace de $((\kappa,\psi)$ - DFPH)) (Sudsutad *et al.*, 2024) Sejam $\alpha\in\mathbb{C}$, $Re(\alpha)>0$, $\frac{Re(\alpha)}{\kappa}\in(n–1,n)$, $k>0$, $p\in(0,1]$, $f\in AC^n$, $\psi\in([a,b],\mathbb{R})$, $\psi\in C^n([a,b],\mathbb{R})$ de modo que $\psi'(t)>0$, e, ${}^{RL}{}_{\kappa}I_a^{(1-\beta)(n\kappa-\alpha),p;\psi}f(t)$ é de ordem ψ - exponencial, $i=0,1,\cdots,n–1,n\in\mathbb{N}$. Então temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\psi}\left\{{}^{H}{}_{\kappa}D_a^{\alpha,\beta,p;\psi}f(t)\right\} &= (1-p+\kappa ps)^{\frac{\alpha}{\kappa}}\mathcal{L}_{\psi}\{f(t)\} - \kappa p\sum_{i=0}^{n-1}(1-p+\kappa ps)^{\frac{\alpha\beta}{\kappa}+n(1-\beta)-1-i}\\ &\times\left[{}_{\kappa}D_a^{i,p;\psi}\left({}^{RL}{}_{\kappa}I_a^{(1-\beta)(n\kappa-\alpha),p;\psi}f(a)\right)\right].\end{aligned} \tag{57}$$

Demonstração
Ver Sudsutad *et al.* (2024).

Com a definição generalizada, podemos obter alguns casos particulares das derivadas de Riemann - Liouville e Caputo. Desta forma, seguem as seguintes definições:

Definição 29 (Derivada fracionária proporcional (κ,ψ) - Riemann - Liouville ((κ,ψ) - DFPRL)) (Sudsutad *et al.*, 2024) Sejam $\alpha\in\mathbb{C}$, $Re(\alpha)>0$, $\kappa>0$, $p\in(0,1]$. Para $f(t)\in C[a,b]$ e $\psi(t)\in C^n[a,b]$, com $\psi'(t)\neq 0$, e $n=\left\lceil\frac{Re(\alpha)}{\kappa}\right\rceil+1$, o operador (κ,ψ) - DFPRL pela esquerda e direita, são definidos como

$$^{RL}{}_{\kappa}D_a^{\alpha,p;\psi}f(t) := {}_{\kappa}D^{n,p;\psi}\left({}^{RL}{}_{\kappa}I_a^{n\kappa-\alpha,p;\psi}f(t)\right) \tag{58}$$

e

$$^{RL}{}_{\kappa}D_b^{\alpha,p;\psi}f(t) := {}_{\kappa}D_{\ominus}^{n,p;\psi}\left({}^{RL}{}_{\kappa}I_b^{n\kappa-\alpha,p;\psi}f(t)\right). \tag{59}$$

Observa-se que este operador pode ser obtido tomando $\beta\to 0$ em (53).

Teorema 7 (Transformada de ψ - Laplace de ((κ,ψ) - DFPRL)) (Sudsutad *et al.*, 2024) Sejam $\alpha\in\mathbb{C}$, $Re(\alpha)>0$, $\frac{Re(\alpha)}{\kappa}\in(n–1,n)$, $\kappa>0$, $p\in(0,1]$, $f\in AC^n_{\gamma,\psi}([a,b],\mathbb{R})$, $\psi\in C^n([a,b],\mathbb{R})$ de modo que $\psi'(t)>0$, e, ${}^{RL}{}_{\kappa}I_a^{n\kappa-\alpha-i\kappa,p;\psi}f(t)$ de ordem ψ - exponencial, com $i=0,1,\cdots,n–1,n\in\mathbb{N}$. Então

$$\mathcal{L}_{\psi}\left\{{}^{RL}{}_{\kappa}D_{a}^{\alpha,p;\psi}f(t)\right\} = (1-p+\kappa ps)^{\frac{\alpha}{\kappa}}\mathcal{L}_{\psi}\{f(t)\}$$
$$-\kappa p\sum_{i=0}^{n-1}(1-p+\kappa ps)^{n-1-i}\left({}^{RL}{}_{\kappa}I_{a}^{n\kappa-\alpha-i\kappa,p;\psi}f(a)\right). \tag{60}$$

Demonstração
Por definição, teremos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\psi}\left\{{}^{RL}{}_{\kappa}D_{a}^{\alpha,p;\psi}f(t)\right\} &= \mathcal{L}_{\psi}\left\{{}_{\kappa}D_{a}^{n,p;\psi}\left({}^{RL}{}_{\kappa}I_{a}^{n\kappa-\alpha,p;\psi}f(t)\right)\right\}\\
&= (1-p+\kappa ps)^{n}\mathcal{L}_{\psi}\left({}^{RL}{}_{\kappa}I_{a}^{n\kappa-\alpha,p;\psi}f(t)\right)\\
&- \kappa p\sum_{i=0}^{n-1}(1-p+\kappa ps)^{n-1-i}{}_{\kappa}D_{a}^{i,p;\psi}\left({}^{RL}{}_{\kappa}I_{a}^{n\kappa-\alpha,p;\psi}f(a)\right)\\
&= \frac{(1-p+\kappa ps)^{n}}{(\kappa ps-p+1)^{\frac{n\kappa-\alpha}{\kappa}}}\mathcal{L}_{\psi}\{f(t)\}\\
&- \kappa p\sum_{i=0}^{n-1}(1-p+\kappa ps)^{n-1-i}\left({}^{RL}{}_{\kappa}I_{a}^{n\kappa-\alpha-i\kappa,p;\psi}f(a)\right)\\
&= (1-p+\kappa ps)^{\frac{\alpha}{\kappa}}\mathcal{L}_{\psi}\{f(t)\}\\
&- \kappa p\sum_{i=0}^{n-1}(1-p+\kappa ps)^{n-1-i}\left({}^{RL}{}_{\kappa}I_{a}^{n\kappa-\alpha-i\kappa,p;\psi}f(a)\right).
\end{aligned} \tag{61}$$

■

Definição 30 (Derivada fracionária (κ,ψ) - Riemann - Liouville) *Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > 0$, $\kappa > 0$, $f \in C[a,b]$, $\psi(t) \in C^{n}[a,b]$ com $\psi'(t) \neq 0$, e $n = \left\lceil \frac{\alpha}{\kappa} \right\rceil + 1$. Então o operador (κ,ψ) - Riemann - Liouville, pela esquerda e pela direita, são definidos por, respectivamente,*

$${}^{RL}{}_{\kappa}D_{a}^{\alpha;\psi}f(t) := {}_{\kappa}D^{n;\psi}\left({}^{RL}{}_{\kappa}I_{a}^{n\kappa-\alpha;\psi}f(t)\right) = \frac{{}_{\kappa}D^{n;\psi}}{\kappa\Gamma_{k}(n\kappa-\alpha)}\int_{a}^{t}{}_{\kappa}^{1}\Psi_{\psi}^{\frac{n\kappa-\alpha}{\kappa}-1}(t,s)\psi'(s)f(s)ds \tag{62}$$

e

$${}^{RL}{}_{\kappa}D_{b}^{\alpha;\psi}f(t) := {}_{\kappa}D_{\ominus}^{n;\psi}\left({}^{RL}{}_{\kappa}I_{b}^{n\kappa-\alpha;\psi}f(t)\right) = \frac{{}_{\kappa}D_{\ominus}^{n;\psi}}{\kappa\Gamma_{k}(n\kappa-\alpha)}\int_{t}^{b}{}_{\kappa}^{1}\Psi_{\psi}^{\frac{n\kappa-\alpha}{\kappa}-1}(s,t)\psi'(s)f(s)ds. \tag{63}$$

Observa-se que este operador pode ser obtido tomando $p \longrightarrow 1$ em (58).

Se considerarmos $\kappa = 1$, obtemos a derivada fracionária ψ - Riemann - Liouville:

$${}^{RL}D_{a}^{\alpha;\psi}f(t) := D^{n;\psi}\left({}^{RL}I_{a}^{n-\alpha;\psi}f(t)\right) = \frac{D^{n;\psi}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{t}{}_{1}^{1}\Psi_{\psi}^{n-\alpha-1}(t,s)\psi'(s)f(s)ds \tag{64}$$

e

$${}^{RL}D_{b}^{\alpha;\psi}f(t) := D_{\ominus}^{n;\psi}\left({}^{RL}I_{b}^{n-\alpha;\psi}f(t)\right) = \frac{D_{\ominus}^{n;\psi}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t}^{b}{}_{1}^{1}\Psi_{\psi}^{n-\alpha-1}(s,t)\psi'(s)f(s)ds. \tag{65}$$

Definição 31 (Derivada fracionária proporcional (κ,ψ) - Caputo ((κ,ψ) - DFPC)) (Sudsutad *et al.*, 2024) Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > 0$, $\kappa > 0$, $p \in (0,1]$. Para $f(t) \in C^n[a,b]$ e $\psi(t) \in C^n[a,b]$, com $\psi'(t) \neq 0$, e $n = \left\lceil \frac{Re(\alpha)}{\kappa} \right\rceil + 1$, o operador (κ,ψ) - DFPC pela esquerda e direita, são definidos como

$$ {}^{C}_{\kappa}D_a^{\alpha,p;\psi} f(t) := {}^{RL}_{\kappa}I_a^{n\kappa-\alpha,p;\psi} \left({}_{\kappa}D^{n,p;\psi} f(t)\right) \tag{66}$$

e

$$ {}^{C}_{\kappa}D_b^{\alpha,p;\psi} f(t) := {}^{RL}_{\kappa}I_b^{n\kappa-\alpha,p;\psi} \left({}_{\kappa}D_{\ominus}^{n,p;\psi} f(t)\right). \tag{67}$$

Observa-se que este operador pode ser obtido tomando $\beta \to 1$ em (53).

Teorema 8 (Transformada ψ - Laplace de (κ,ψ) - DFPC)) (Sudsutad *et al.*, 2024) Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > 0$, $\frac{Re(\alpha)}{\kappa} \in (n-1,n)$, $\kappa > 0$,$p \in (0,1]$, $f \in AC^n_{\gamma,\psi}([a,b],\mathbb{R})$, $\psi \in C^n([a,b],\mathbb{R})$ de modo que $\psi'(t) > 0$, e, ${}_{\kappa}D_a^{n,p;\psi} f(t)$ de ordem ψ - exponencial, com $i = 0,1,\cdots,n-1, n \in \mathbb{N}$. Então

$$\mathcal{L}_{\psi}\{{}^{C}_{\kappa}D^{\alpha,p;\psi} f(t)\} = (1-p+\kappa ps)^{\frac{\alpha}{\kappa}} \left[\mathcal{L}_{\psi}\{f(t)\} - \kappa p \sum_{i=0}^{n-1} (1-p+\kappa ps)^{-i-1} \left({}_{\kappa}D_a^{i,p;\psi} f(a)\right)\right]. \tag{68}$$

Demonstração
Por definição, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\psi}\{{}^{C}_{\kappa}D^{\alpha,p;\psi} f(t)\} &= \mathcal{L}_{\psi}\left\{{}^{RL}_{\kappa}I_a^{n\kappa-\alpha,p;\psi}\left({}_{\kappa}D_a^{n,p;\psi} f(t)\right)\right\} \\
&= \frac{1}{(\kappa ps - p + 1)^{\frac{n\kappa-\alpha}{\kappa}}} \mathcal{L}_{\psi}\{{}_{\kappa}D_a^{n,p;\psi} f(t)\} \\
&= \frac{(1-p+\kappa ps)^n}{(\kappa ps - p + 1)^{\frac{n\kappa-\alpha}{\kappa}}} \mathcal{L}_{\psi}\{f(t)\} \\
&- \frac{\kappa p}{(\kappa ps - p + 1)^{\frac{n\kappa-\alpha}{\kappa}}} \sum_{i=0}^{n-1} (1-p+\kappa ps)^{n-1-i} \left({}_{\kappa}D^{i,p;\psi} f(a)\right) \\
&= (1-p+\kappa ps)^{\frac{\alpha}{\kappa}} \left[\mathcal{L}_{\psi}\{f(t)\} - \kappa p \sum_{i=0}^{n-1} (1-p+\kappa ps)^{-i-1} \left({}_{\kappa}D_a^{i,p;\psi} f(a)\right)\right].
\end{aligned} \tag{69}$$

■

Definição 32 (Derivada fracionária (κ,ψ) - Caputo) *Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$, $Re(\alpha) > 0$, $\kappa > 0$, $f \in C^n[a,b]$, $\psi(t) \in C^n[a,b]$ com $\psi'(t) \neq 0$, e $n = \left\lceil \frac{\alpha}{\kappa} \right\rceil + 1$. Então o operador (κ,ψ) - Caputo é definido por,*

$$\left({}^{C}_{\kappa}D_a^{\alpha;\psi} \varphi\right)(x) := \left({}^{RL}_{\kappa}\mathcal{I}_a^{(n\kappa-\alpha);\psi} \left(\frac{\kappa}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^n (\varphi)\right)(x). \tag{70}$$

De modo análogo, para $\kappa = 1$, $\varphi(x) \in C^n[a,b]$ e $\alpha \notin \mathbb{N}$, obtemos a derivada fracionária ψ - Caputo:

$$\left({}^{C}D_{a}^{\alpha;\psi}\varphi\right)(x) := \left({}^{RL}\mathcal{I}_{a}^{(n-\alpha);\psi}\left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}(\varphi)\right)(x) \tag{71}$$

e para $n \in \mathbb{N}$.

$$\left({}^{C}D_{a}^{\alpha;\psi}\varphi\right)(x) := \left(\frac{1}{\psi'(x)}\frac{d}{dx}\right)^{n}\varphi(x). \tag{72}$$

4 Modelos matemáticos de crescimento populacional

Em um trabalho publicado por Turner *et al.* (1976), intitulado como, *A Theory of Growth*, foi apresentada uma teoria generalizada de crescimento baseada em três postulados. Desta forma, para a formulação da equação fundamental, são enumeradas as seguintes definições:

1. $N(t)$ é o tamanho do organismo ou da população para unidade de tempo t;
2. k é a capacidade máxima em relação ao tamanho de $N(t)$;
3. $\frac{dN(t)}{dt}$ refere-se a taxa de variação do tamanho do organismo ou da população;
4. $\delta_n(0, N(t)) = (N(t)^n)^{\frac{1}{n}} = N(t)$, para $N(t) > 0$;
5. $\delta_n(N(t), k) = (k^n - N(t)^n)^{\frac{1}{n}}$, para $k \geq N(t) > 0$ e $n > 0$.

Em relação aos postulados de crescimento, temos os seguintes:

Postulado 1 *A mudança da taxa de variação é simultaneamente proporcional a uma função crescente e monótona ϕ_1, da distância entre a origem e o tamanho do organismo ou da população $(\delta_n(0, N(t)))$ e também proporcional a uma função crescente e monótona ϕ_2, da diferença entre um dado tamanho ao tamanho limite do organismo ou da população $(\delta_n(N(t), k))$;*

$$\frac{dN(t)}{dt} \propto \phi_1[\delta_n(0, N(t))]\phi_2[\delta_n(N(t), k)]. \tag{73}$$

Postulado 2 *As funções crescentes e monótonas ϕ_1 e ϕ_2, são funções potências para $\theta_1, \theta_2 > 0$;*

$$\phi_1[.] = [.]^{(\theta_1)} \text{ e } \phi_2[.] = [.]^{(\theta_2)}. \tag{74}$$

Postulado 3 *Os expoentes obedecem as seguintes condições:*

$$\theta_1 = 1 - np \text{ e } \theta_2 = n + np, \tag{75}$$

onde, $n > 0, -1 < p < \frac{1}{n}$ e $\theta_1 + \theta_2 = 1 + n$.

4.1 Equação fundamental

Enunciadas as definições e também os postulados, a formulação da equação fundamental por Turner *et al.* (1976), pode ser obtida pelo remanejamento dos três postulados e também pela utilização de uma constante de proporcionalidade. Desta forma, de acordo com o **Postulado 1**, podemos estabelecer a primeira relação:

$$\frac{dN(t)}{dt} \propto \phi_1[N(t)]\phi_2[(k^n - N(t)^n)^{\frac{1}{n}}]. \tag{76}$$

Desta forma, pelo **Postulado 2**, relacionando as funções ϕ_1 e ϕ_2, temos que:

$$\frac{dN(t)}{dt} \propto (N(t))^{(\theta_1)}(k^n - N(t)^n)^{\left(\frac{\theta_2}{n}\right)}. \tag{77}$$

Agora, utilizando as condições do **Postulado 3** para os expoentes θ_1 e θ_2, decorre que:

$$\frac{dN(t)}{dt} \propto N(t)^{1-np}(k^n - N(t)^n)^{1+p}. \tag{78}$$

Tomando como $\frac{\beta}{k^n}$ a constante de proporcionalidade, sendo β a constante intrínseca de crescimento, temos a equação fundamental de crescimento (Turner *et al.*, 1976):

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{\beta}{k^n}N(t)^{1-np}(k^n - N(t)^n)^{1+p}, \tag{79}$$

onde a sua solução pode ser obtida utilizando o método de separação de variáveis e é expressa da seguinte maneira:

$$N(t) = \frac{k}{\left\{1 + [1 + \beta np(t-\tau)]^{\frac{-1}{p}}\right\}^{\frac{1}{n}}}. \tag{80}$$

Observando que τ é a constante de integração.

4.2 Modelos de Crescimento Populacional de Ordem Inteira

Inicialmente, trabalhando o modelo elaborado por Benjamin Gompertz (1779 - 1865) [13], tomando o parâmetro n se aproximando de zero e considerando β' uma constante finita, de modo que βn^{p+1} se aproxime de β', obtemos o modelo conhecido como **Ex-Gompertz**. Este modelo é considerado uma extensão do modelo tradicional, que também será discutido futuramente com a avaliação dos outros parâmetros da equação fundamental. Dessa forma, tem-se a representação do modelo, bem como sua respectiva solução, expressas da seguinte maneira:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \beta' N(t)\left[\ln\left(\frac{k}{N(t)}\right)\right]^{1+p} \qquad \text{e} \qquad N(t) = ke^{-[\beta' p(t-\tau)]^{-\frac{1}{p}}}. \tag{81}$$

Seguindo nesta mesma interpretação, podemos também estabelecer os parâmetros para obter o modelo tradicional de **Gompertz**. Este importante modelo pode ser obtido ao se considerar os parâmetros n e p tendendo a zero, bem como a aproximação de βn^{p+1} por uma constante finita β'. Esta análise é válida para a equação fundamental, visto que, se tomarmos no modelo **Ex-Gompertz** o parâmetro p próximo de zero, também temos o modelo de maneira imediata, logo segue que:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \beta' N(t) \ln\left(\frac{k}{N(t)}\right) \qquad \text{e} \qquad N(t) = ke^{-e^{[-\beta'(t-\tau)]}}. \tag{82}$$

Outro modelo de grande relevância na comunidade científica é o modelo elaborado por Pierre François Verhulst (1804 - 1849) [14]. Pela variação dos parâmetros podemos observar dois modelos, o primeiro denominado como **Ex-Logístico** e o segundo como o modelo **Logístico**. Em relação ao primeiro modelo, ele é compreendido como uma extensão do modelo **Logístico** e foi discutido em um trabalho realizado por Pruitt, Turner e Boackle (1974), para o estudo de um modelo cinético para a análise quantitativa de células vermelhas. Nesse contexto, o modelo pode ser obtido ao se atribuir o valor $n = 1$ ao parâmetro. Com isso, tanto a forma do modelo quanto sua solução podem ser expressas da seguinte maneira:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{\beta}{k} N(t)^{1-p}(k - N(t))^{1+p} \qquad \text{e} \qquad N(t) = \frac{k}{1 + [1 + \beta p(t-\tau)]^{\frac{-1}{p}}}. \tag{83}$$

Como mencionado, podemos obter o modelo **Logístico** através de sua elaboração extendida. O modelo é observado quando tomamos os parâmetros $n = 1$ e $p \to 0$. De maneira análoga, podemos tomar somente o parâmetro $p \to 0$ no modelo **Ex-Logístico**, para obtermos o modelo **Logístico** tradicional. Desta maneira, este modelo assume a seguinte forma:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{\beta}{k} N(t)(k - N(t)) \qquad \text{e} \qquad N(t) = \frac{k}{1 + e^{-\beta(t-\tau)}}. \tag{84}$$

Por fim, temos outra representação que envolve conhecimentos sobre o modelo **Logístico**. Discutido inicialmente por Pütter (1920), Bertalanffy (1957) e também por Richards (1959), o modelo **Logístico Generalizado** ou modelo de **Bertalanffy-Richards** foi trabalhado por Nelder (1961) em um artigo sobre a construção de uma generalização da curva Logística. Desta maneira, o modelo **Logístico Generalizado** pode ser obtido tomando o parâmetro p se aproximando de zero na equação fundamental. Portanto, o modelo é representado da seguinte forma:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{\beta}{k^n} N(t)(k^n - N(t)^n) \qquad \text{e} \qquad N(t) = \frac{k}{\left[1 + e^{-\beta n(t-\tau)}\right]^{\frac{1}{n}}}. \tag{85}$$

4.2.1 Relações importantes entre os modelos matemáticos

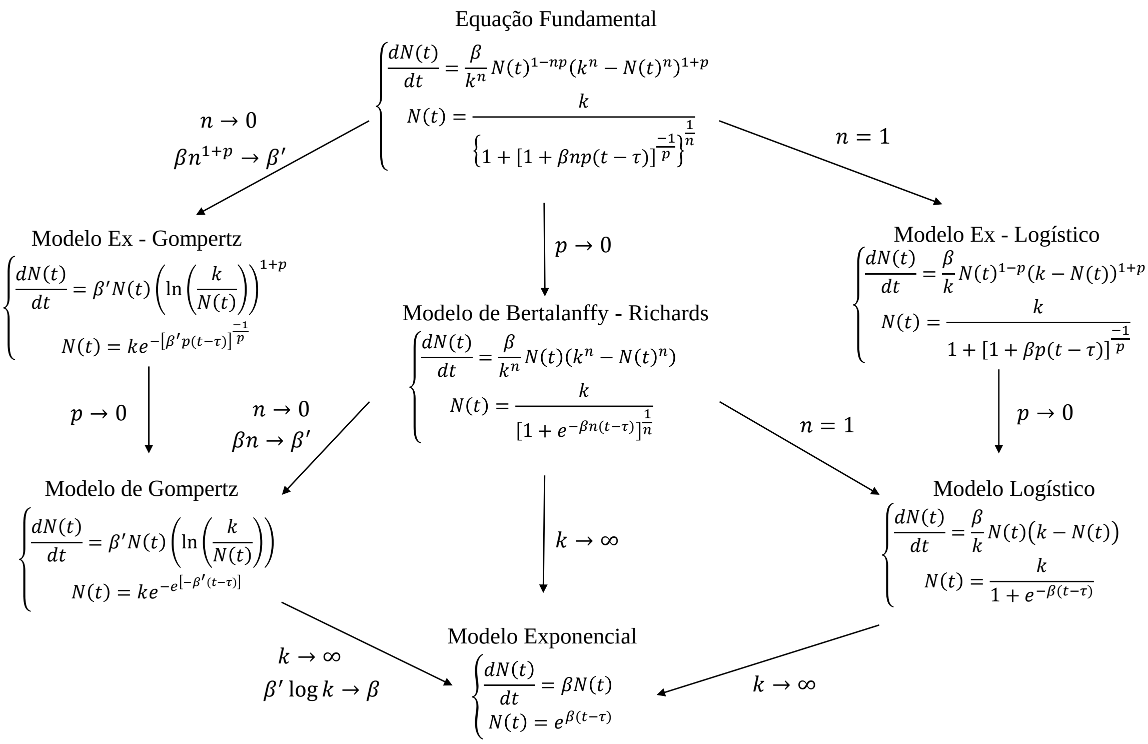
Quando avaliamos as variações dos parâmetros, podemos observar transições entre modelos de diferentes estruturas. Dito isto, tomando no modelo de **Bertalanffy-Richards** os parâmetros n se aproximando de zero e βn aproximando de β', obtemos o modelo tradicional de **Gompertz**. Por outro lado, avaliando no mesmo modelo, o parâmetro n sendo igual a um, podemos obter o modelo tradicional **Logístico**. Por fim, também podemos estabelecer a relação entre os modelos de **Gompertz**, **Bertalanffy-Richards** e **Logístico** para a obtenção do modelo **Exponencial**.

Este modelo foi elaborado por Thomas Robert Malthus (1766 - 1834) [20], que trabalhou a relação entre o crescimento populacional com a possível escassez dos recursos naturais para a manutenção dos seres vivos. Desta forma, ele pode ser observado quando tomamos o parâmetro k tendendo ao infinito nos modelos de **Bertalanffy-Richards** e **Logístico**, e também quando os parâmetros $\beta' \log k$, se aproximam de β no modelo de **Gompertz**. Portanto, temos que o modelo **Exponencial** pode ser representado da seguinte maneira:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \beta N(t) \qquad \text{e} \qquad N(t) = e^{\beta(t-\tau)}. \tag{86}$$

Para auxiliar na organização das ideias, podemos observar de forma mais clara a relação entre os modelos, no esquema apresentado na figura a seguir.

Figura 1: Relações entre os modelos matemáticos de crescimento adaptado de Turner *et al.* (1976).



Fonte: Adaptação elaborada pelos autores.

5 Soluções para o modelo Logístico

Observamos que os modelos **Logístico Generalizado** e **Logístico** de ordem fracionária, apresentam divergências significativas quando comparados aos modelos obtidos pelas soluções numéricas. Desta forma, West (2015), Area, Losada e Nieto (2016) e Tarasov (2019), realizaram trabalhos que contemplaram fundamentos acerca das soluções analíticas. Elagan (2016), também publicou um artigo intitulado como, *On the invalidity of semigroup property for the Mittag–Leffler function with two parameters*, onde foi trabalhada a propriedade de semigrupo da função de Mittag-Leffler. Observamos que a igualdade, $E_{\alpha,\beta}\left(a(s+t)^{\alpha\beta}\right) = E_{\alpha,\beta}\left(as^{\alpha\beta}\right) E_{\alpha,\beta}\left(at^{\alpha\beta}\right)$, s , $t \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$ e $\alpha, \beta > 0$, é válida somente para os parâmetros $\alpha = \beta = 1$, e $a = 0, \beta = 1$ ou $\beta = 2$.

Em consoante perspectiva, alguns autores apontam que esta condição poderia ocasionar algum erro, sendo assim, estas soluções analíticas não corresponderiam como os resultados ideais para os modelos **Logísticos** (Soares; Jarosz; Costa, 2022). Desta forma, utilizaremos as definições dos operadores proporcionais para comparar as soluções obtidas de forma analítica e numérica.

5.1 Solução Analítica

Para o estudo do modelo Logístico Generalizado, podemos tomar sem perda de generalidade (Varalta, 2014), o parâmetro $k = 1$. Desta forma, podemos reescrever a equação diferencial (85) da seguinte maneira:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{\beta}{k^m} N(t)\left(k^m - N(t)^m\right) \Rightarrow \frac{dN(t)}{dt} = \beta N(t) - \beta\left(N(t)\right)^{m+1}.$$

Observando que esta equação se comporta como uma equação de Bernoulli, tomando como variável $S(t) = N(t)^{-(m)}$, então, teremos que $S'(t) = -(m)\left(N(t)\right)^{-(m+1)} N'(t)$. Desta forma, multiplicando a última equação por $-(m)\left(N(t)\right)^{-(m+1)}$, segue que:

$$-(m)\left(N(t)\right)^{-(m+1)} \frac{dN(t)}{dt} = -(m)\left(N(t)\right)^{-(m+1)} \beta N(t) + (m)\left(N(t)\right)^{-(m+1)} \beta\left(N(t)\right)^{m+1}. \quad (87)$$

Simplificando e reescrevendo, teremos que:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -(m)\beta S(t) + (m)\beta \Leftrightarrow \frac{dS(t)}{dt} = \beta m\left(1 - S(t)\right). \quad (88)$$

Tomando os resultados acima e analisando a equação diferencial, pela definição da derivada proporcional de Caputo (66), com uma condição inicial, teremos que:

$$\begin{cases} {}^{C}{}_{\kappa}D_a^{\alpha,p;\psi} S(t) = \beta m\left(1 - S(t)\right) \\ S(0) = \left(\frac{1}{N(0)}\right)^m \end{cases}. \quad (89)$$

Aplicando a transformada ψ - Laplace em ambos os lados da igualdade, segue que:

$$\mathcal{L}_\psi\left\{{}^{C}{}_{\kappa}D_t^{\alpha,p;\psi} S(t)\right\} = \beta m \mathcal{L}_\psi\left\{1 - S(t)\right\}. \quad (90)$$

Logo, para $n = 1$, para o lado esquerdo da igualdade em (90), segue que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\psi\left\{{}^{C}{}_{\kappa}D_t^{\alpha,p;\psi} S(t)\right\} &= (1 - p + \kappa p s)^{\frac{\alpha}{\kappa}}\left[\mathcal{L}_\psi\{S(t)\} - \kappa p(1 - p + \kappa p s)^{-1}\left({}_{\kappa}D_a^{0,p;\psi} S(t)\right)\right] \\ &= (1 - p + \kappa p s)^{\frac{\alpha}{\kappa}}\left[\mathcal{L}_\psi\{S(t)\} - \kappa p(1 - p + \kappa p s)^{-1} S(0)\right] \\ &= (1 - p + \kappa p s)^{\frac{\alpha}{\kappa}} \mathcal{L}_\psi\{S(t)\} - \kappa p(1 - p + \kappa p s)^{\frac{\alpha}{\kappa}-1} S(0). \end{aligned} \quad (91)$$

Para o lado direito em (90), decorre que

$$\begin{aligned} \beta m \mathcal{L}_\psi\left\{1 - S(t)\right\} &= \beta m \mathcal{L}_\psi\{1\} - \beta m \mathcal{L}_\psi\left\{S(t)\right\} \\ &= \beta m[s^{-1}] - \beta m \mathcal{L}_\psi\left\{S(t)\right\}. \end{aligned} \quad (92)$$

Substituindo ambas as equações (91) e (92) em (90), teremos que

$$(1 - p + \kappa p s)^{\frac{\alpha}{\kappa}} \mathcal{L}_\psi\{S(t)\} - \kappa p(1 - p + \kappa p s)^{\frac{\alpha}{\kappa}-1} S(0) = \beta m[s^{-1}] - \beta m \mathcal{L}_\psi\left\{S(t)\right\}. \quad (93)$$

Logo, simplificando

$$
\begin{aligned}
(1-p+\kappa ps)^{\frac{\alpha}{\kappa}}\mathcal{L}_{\psi}\{S(t)\}+\beta m\mathcal{L}_{\psi}\{S(t)\} &= \beta m[s^{-1}]+\kappa p(1-p+\kappa ps)^{\frac{\alpha}{\kappa}-1}S(0) \\
\mathcal{L}_{\psi}\{S(t)\}\left[(1-p+\kappa ps)^{\frac{\alpha}{\kappa}}+\beta m\right] &= \beta m[s^{-1}]+\kappa p(1-p+\kappa ps)^{\frac{\alpha}{\kappa}-1}S(0) \\
\mathcal{L}_{\psi}\{S(t)\} = \beta m\left[\frac{s^{-1}}{(1-p+\kappa ps)^{\frac{\alpha}{\kappa}}+\beta m}\right] &+ S(0)\kappa p\left[\frac{(1-p+\kappa ps)^{\frac{\alpha}{\kappa}-1}}{(1-p+\kappa ps)^{\frac{\alpha}{\kappa}}+\beta m}\right].
\end{aligned}
\tag{94}
$$

Tomando a transformada inversa de ψ - Laplace, segue que

$$
S(t)=\beta m\underbrace{\mathcal{L}_{\psi}^{-1}\left\{\left[\frac{s^{-1}}{(1-p+\kappa ps)^{\frac{\alpha}{\kappa}}+\beta m}\right]\right\}}_{(I)}+S(0)\kappa p\underbrace{\mathcal{L}_{\psi}^{-1}\left\{\left[\frac{(1-p+\kappa ps)^{\frac{\alpha}{\kappa}-1}}{(1-p+\kappa ps)^{\frac{\alpha}{\kappa}}+\beta m}\right]\right\}}_{(II)}. \tag{95}
$$

Para a expressão (I), tomando $s'=1-p+\kappa ps$, teremos que

$$
\mathcal{L}_{\psi}^{-1}\left\{\left[\frac{s^{-1}}{(1-p+\kappa ps)^{\frac{\alpha}{\kappa}}+\beta m}\right]\right\}=\mathcal{L}_{\psi}^{-1}\left\{\left[\frac{\kappa p}{(s'-(1-p))(s')^{\frac{\alpha}{\kappa}}+\beta m\kappa p}\right]\right\}. \tag{96}
$$

Pelas proposições (4) e (5), segue que

$$
\mathcal{L}_{\psi}^{-1}\left\{\left[\frac{s^{-1}}{(1-p+\kappa ps)^{\frac{\alpha}{\kappa}}+\beta m}\right]\right\}=e^{-\frac{1-p}{\kappa p}(\psi(t)-\psi(a))}\beta m(\psi(t)-\psi(a))^{\frac{\alpha}{\kappa}}E_{\frac{\alpha}{\kappa},\frac{\alpha}{\kappa}+1}\left(-\frac{\beta m(\psi(t)-\psi(a))^{\frac{\alpha}{\kappa}}}{(\kappa p)^{\frac{\alpha}{\kappa}}}\right). \tag{97}
$$

Para (II), decorre que

$$
S(0)\kappa p\mathcal{L}_{\psi}^{-1}\left\{\left[\frac{(1-p+\kappa ps)^{\frac{\alpha}{\kappa}-1}}{(1-p+\kappa ps)^{\frac{\alpha}{\kappa}}+\beta m}\right]\right\}=S(0)\kappa p\mathcal{L}_{\psi}^{-1}\left\{\left[\frac{(s')^{\frac{\alpha}{\kappa}-1}}{(s')^{\frac{\alpha}{\kappa}}+\beta m}\right]\right\}. \tag{98}
$$

Novamente, pelas proposições (4) e (5)

$$
S(0)\kappa p\mathcal{L}_{\psi}^{-1}\left\{\left[\frac{(1-p+\kappa ps)^{\frac{\alpha}{\kappa}-1}}{(1-p+\kappa ps)^{\frac{\alpha}{\kappa}}+\beta m}\right]\right\}=S(0)\kappa pe^{-\frac{1-p}{\kappa p}(\psi(t)-\psi(a))}E_{\frac{\alpha}{\kappa},1}\left(-\frac{\beta m(\psi(t)-\psi(a))^{\frac{\alpha}{\kappa}}}{(\kappa p)^{\frac{\alpha}{\kappa}}}\right). \tag{99}
$$

Logo, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
S(t)=e^{-\frac{1-p}{\kappa p}(\psi(t)-\psi(a))}\beta m(\psi(t)-\psi(a))^{\frac{\alpha}{\kappa}}E_{\frac{\alpha}{\kappa},\frac{\alpha}{\kappa}+1}&\left(-\frac{\beta m(\psi(t)-\psi(a))^{\frac{\alpha}{\kappa}}}{(\kappa p)^{\frac{\alpha}{\kappa}}}\right) \\
+e^{-\frac{1-p}{\kappa p}(\psi(t)-\psi(a))}S(0)\kappa pE_{\frac{\alpha}{\kappa},1}&\left(-\frac{\beta m(\psi(t)-\psi(a))^{\frac{\alpha}{\kappa}}}{(\kappa p)^{\frac{\alpha}{\kappa}}}\right).
\end{aligned}
\tag{100}
$$

Pela propriedade (20), observamos que

$$
E_{\frac{\alpha}{\kappa},\frac{\alpha}{\kappa}+1}\left(-\frac{\beta m(\psi(t)-\psi(a))^{\frac{\alpha}{\kappa}}}{(\kappa p)^{\frac{\alpha}{\kappa}}}\right)=\frac{(\kappa p)^{\frac{\alpha}{\kappa}}}{\beta m(\psi(t)-\psi(a))^{\frac{\alpha}{\kappa}}}\left[1-E_{\frac{\alpha}{\kappa}}\left(-\frac{\beta m(\psi(t)-\psi(a))^{\frac{\alpha}{\kappa}}}{(\kappa p)^{\frac{\alpha}{\kappa}}}\right)\right]. \tag{101}
$$

Desta forma, podemos reescrever a equação (100) como

$$\begin{aligned} S(t) = {} & e^{-\frac{1-p}{\kappa p}(\psi(t)-\psi(a))}(\kappa p)^{\frac{\alpha}{\kappa}}\left[1 - E_{\frac{\alpha}{\kappa}}\left(-\frac{\beta m(\psi(t)-\psi(a))^{\frac{\alpha}{\kappa}}}{(\kappa p)^{\frac{\alpha}{\kappa}}}\right)\right] \\ & + e^{-\frac{1-p}{\kappa p}(\psi(t)-\psi(a))}S(0)\kappa p E_{\frac{\alpha}{\kappa}}\left(-\frac{\beta m(\psi(t)-\psi(a))^{\frac{\alpha}{\kappa}}}{(\kappa p)^{\frac{\alpha}{\kappa}}}\right). \end{aligned} \tag{102}$$

Logo,

$$\begin{aligned} S(t) = {} & e^{-\frac{1-p}{\kappa p}(\psi(t)-\psi(a))}(\kappa p)^{\frac{\alpha}{\kappa}}\left[1 - E_{\frac{\alpha}{\kappa}}\left(-\frac{\beta m(\psi(t)-\psi(a))^{\frac{\alpha}{\kappa}}}{(\kappa p)^{\frac{\alpha}{\kappa}}}\right)\right] \\ & + e^{-\frac{1-p}{\kappa p}(\psi(t)-\psi(a))}\kappa p S(0) E_{\frac{\alpha}{\kappa}}\left(-\frac{\beta m(\psi(t)-\psi(a))^{\frac{\alpha}{\kappa}}}{(\kappa p)^{\frac{\alpha}{\kappa}}}\right). \end{aligned} \tag{103}$$

Destarte,

$$S(t) = 1 + E_{\frac{\alpha}{\kappa}}\left(-\frac{\beta m(\psi(t)-\psi(a))^{\frac{\alpha}{\kappa}}}{(\kappa p)^{\frac{\alpha}{\kappa}}}\right) e^{-\frac{1-p}{\kappa p}(\psi(t)-\psi(a))}\left[\kappa p S(0) - (\kappa p)^{\frac{\alpha}{\kappa}}\right]. \tag{104}$$

Por fim, retomando a variável inicial, teremos que

$$N(t) = \frac{1}{\left\{1 + E_{\frac{\alpha}{\kappa}}\left(-\frac{\beta m(\psi(t)-\psi(a))^{\frac{\alpha}{\kappa}}}{(\kappa p)^{\frac{\alpha}{\kappa}}}\right) e^{-\frac{1-p}{\kappa p}(\psi(t)-\psi(a))}\left[\kappa p\left(\frac{1}{N(0)}\right)^{m} - (\kappa p)^{\frac{\alpha}{\kappa}}\right]\right\}^{\frac{1}{m}}}. \tag{105}$$

Portanto, a solução é dada por

$$N(t) = \frac{k}{\left\{1 + E_{\frac{\alpha}{\kappa}}\left(-\frac{\beta m(\psi(t)-\psi(a))^{\frac{\alpha}{\kappa}}}{(\kappa p)^{\frac{\alpha}{\kappa}}}\right) e^{-\frac{1-p}{\kappa p}(\psi(t)-\psi(a))}\left[\kappa p\left(\frac{k}{N(0)}\right)^{m} - (\kappa p)^{\frac{\alpha}{\kappa}}\right]\right\}^{\frac{1}{m}}}. \tag{106}$$

Em particular, para $\psi(t) = t$, e $a = 0$, teremos que

$$N(t) = \frac{k}{\left\{1 + E_{\frac{\alpha}{\kappa}}\left(-\frac{\beta m t^{\frac{\alpha}{\kappa}}}{(\kappa p)^{\frac{\alpha}{\kappa}}}\right) e^{t\left(-\frac{1-p}{\kappa p}\right)}\left[\kappa p\left(\frac{k}{N(0)}\right)^{m} - (\kappa p)^{\frac{\alpha}{\kappa}}\right]\right\}^{\frac{1}{m}}}. \tag{107}$$

5.2 Solução Numérica

5.2.1 Equações integrais e integro-diferenciais

Outra maneira de se obter soluções para uma equação diferencial ordinária, está relacionada com uso de métodos integrais ou ainda, de equações integrais, que é uma equação na qual temos uma função desconhecida $u(x)$ (Diethelm *et al.*, 2004). Desta forma, uma equação integral padrão $u(x)$ pode ser observada da seguinte forma:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)dt, \tag{108}$$

onde, $g(x)$ e $h(x)$ são limites da integração, $f(x)$ é uma função real, λ é um parâmetro constante e $K(x,t)$ é denominado como *kernel* da integral. Através desta relação, podemos estabelecer a definição de equações integro-diferenciais. Desta forma, teremos que $u^{(k)}(x)$ é definida da seguinte maneira:

$$u^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)dt. \tag{109}$$

Para os mesmos elementos e parâmetros referidos anteriormente. Também, podemos estabelecer relações de problemas de valores iniciais (Diethelm *et al.*, 2004).

Definição 33 (Equação integro-diferencial de Volterra)

$$u^{(k)}(x) = f(x) + \lambda \int_0^t K(x,t)u(t)dt \qquad e \qquad u^{(k)}(0) = u_0{}^{(k)}, \tag{110}$$

onde, para $m \in \mathbb{Z}^+$, temos que $k = 0, 1, \cdots, m-1$. Logo, podemos enunciar uma definição que contempla a derivada de Caputo (Li; Zeng, 2015). Considerando o seguinte problema de valor inicial para equações de ordem fracionária, teremos que:

Definição 34 (Problema de Cauchy para ordem fracionária)

$$\begin{cases} {}_{*}^{C}D_t^{\alpha} y(t) = f(t, y(t)) \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)} \end{cases} \quad , \; m-1 < \alpha < m \in \mathbb{Z}^+ \; e \; k = 0, 1, \cdots, m-1. \tag{111}$$

Convertendo o problema de valor inicial (111) para a equação integro-diferencial de Volterra (110), podemos observar uma importante relação para a resolução numérica de equações de ordem fracionária (Li; Zeng, 2015). Desta forma, podemos escrever:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} y_0^k + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau, y(\tau))(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} y_0^k + {}_0^{RL}I_t^{\alpha} f(t, y(t)). \tag{112}$$

5.2.2 Método de Euler

Em continuidade, observa-se a obtenção de métodos numéricos baseados em fórmulas trapezoidais para a resolução de equações diferenciais de ordem fracionária. Dessa forma, podemos enunciar a definição relacionada ao método de Euler (Li; Zeng, 2015).

Definição 35 (Método de Euler fracionário) *O método de Euler fracionário pela esquerda de* $\left[{}_0^{RL}I_t^{\alpha} f(t, y(t))\right]_{t=t_{n+1}}$*, é dado como:*

$$y_{n+1} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y_0^k + h^{\alpha} \sum_{k=0}^{n} b_{k,n+1} f(t_k, y_k), \tag{113}$$

onde,

$$b_{k,n+1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[(n-k+1)^{\alpha} - (n-k)^{\alpha}\right]. \tag{114}$$

5.2.3 Método de Adams

Outro método importante para obter soluções de equações diferenciais de ordem fracionária é conhecido como o método de **Adams**. Logo, podemos definir:

Definição 36 (Método de Adams fracionário) (Li; Zeng, 2015) Método de Adams fracionário $\left[{}_0^{RL}I_t^{\alpha} f(t, f(t))\right]_{t=t_{n+1}}$, é dado como:

$$u_{n+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^j}{j!} u_0^j + \sum_{j=0}^{n+1} a_{j,n+1} f(t_j, u_j), \tag{115}$$

onde,

$$a_{j,n+1} = \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+2)} \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^{\alpha}, & j = 0, \\ (n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq n \\ 1, & j = n+1, \end{cases}. \tag{116}$$

5.2.4 Método de Adams-Bashforth-Moulton

Observadas as definições acerca do método de **Adams**, foram apresentadas algumas variações deste processo como, técnicas de **Adams-Moulton** (corretor) e também de **Adams-Bashforth** (preditor). Nesta perspectiva, Diethelm, Ford e Freed (2002) trabalharam o método conhecido como **Adams-Bashforth-Moulton** ou método *FracPECE (Predict, Evaluate, Correct, Evaluate)*. Este algoritmo se apresenta como uma ferramenta de grande utilidade para a resolução de equações de ordem arbitrária, sua construção pode ser observada em Diethelm, Ford e Freed (2002) e a estabilidade e análise de erros em Diethelm *et al.* (2004). Desta forma, o método pode ser definido como :

Definição 37 (Método de Adams-Bashforth-Moulton fracionário) (Li; Zeng, 2015) O método de Adams-Bashforth-Moulton fracionário é definido como:

$$\begin{cases} u_{n+1}^P = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^j}{j!} u_0^j + \sum_{j=0}^{n} b_{j,n+1} f(t_j, u_j), \\ u_{n+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^j}{j!} u_0^j + \sum_{j=0}^{n} a_{j,n+1} f(t_j, u_j) + a_{n+1,n+1} f(t_{n+1}, u_{n+1}^P), \end{cases}. \tag{117}$$

6 Resultados e Discussões

No que segue, analisaremos as soluções analíticas dos Modelos de Crescimento, com as avaliações de parâmetros apresentadas na **Tabela 1**. Para trabalhar as soluções numéricas, iremos utilizar o método de **Adams-Bashforth-Moulton** (ABM) (Li; Zeng, 2015).

Tabela 1: Parâmetros dos Modelos de Ordem Fracionária.

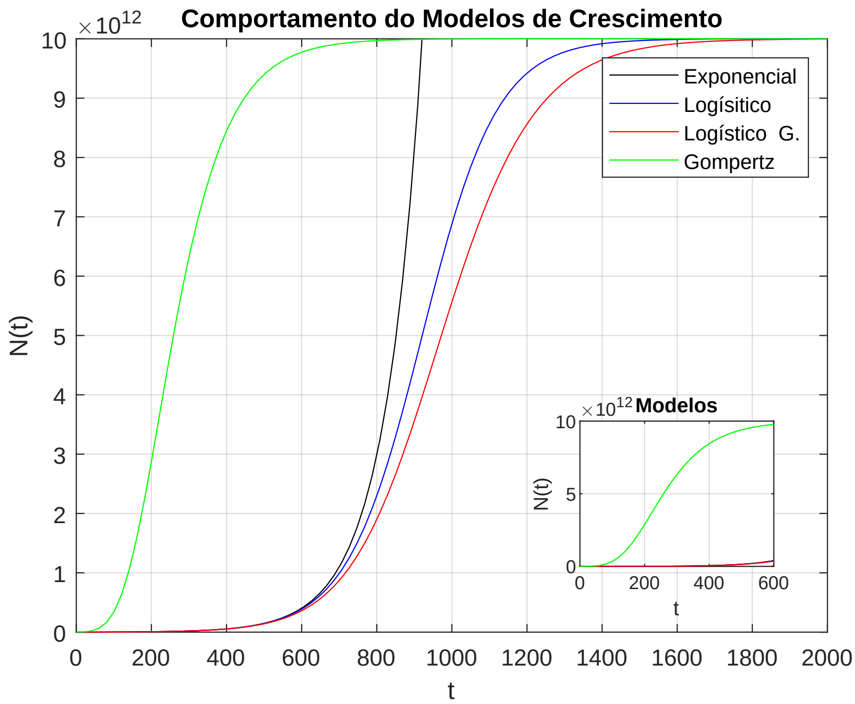
Característica	Parâmetro	Valor	Unidade	Referência
Capacidade máxima de células tumorais	k	10^{13}	células	Weinberg (2008)
População inicial de células tumorais	$N(0)$	10^{9}	células	Rodrigues (2011)
Crescimento células tumorais pulmonares	β	10^{-2}	dia^{-1}	Spratt *et al.* (1996)
Ordem da derivada de ordem fracionária	α	$0 < \alpha \leq 1$	–	–

Fonte: Elaborada pelos autores.

6.1 Análise das soluções analíticas e numéricas

Inicialmente, podemos observar que os modelos de ordem inteira, de fato, possuem propriedades e comportamentos semelhantes conforme a equação fundamental de Turner *et al.* (1976). Também, esta avaliação, corrobora com o trabalho de Rodrigues (2011), quando se analisa o comportamento quase indiferenciável no início da distribuição para os modelos **Logístico Generalizado**, **Logístico** e também para o modelo **Exponencial**, a análise pode ser observada na **Figura 2**.

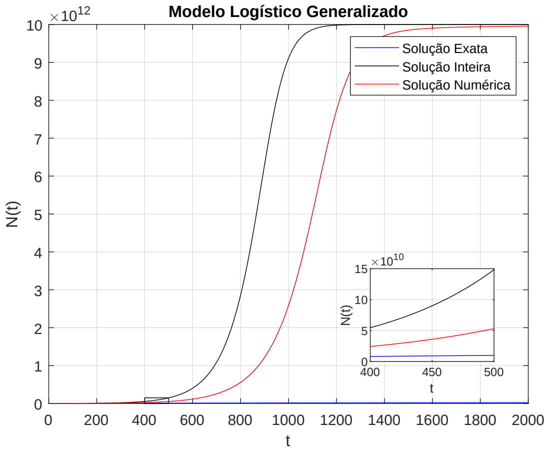
Figura 2: Comportamento dos Modelos de Crescimento para $0 < t < 2000$.



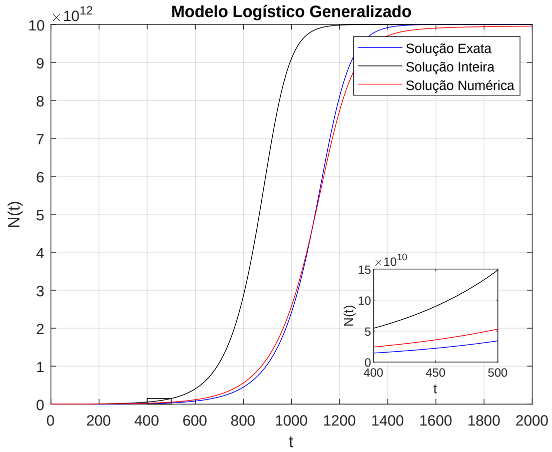
Fonte: Elaborada pelos autores.

Também podemos observar grande divergência entre as soluções analíticas e numéricas para os modelos **Logístico Generalizado** e **Logístico**. Entretanto, quando avaliamos os mesmos modelos, com o auxílio dos operadores fracionários proporcionais, obtemos resultados mais satisfatórios, quando comparados com as soluções apresentadas por operadores fracionários tradicionais. Tais análises podem ser examinadas conforme a **Figura 3**.

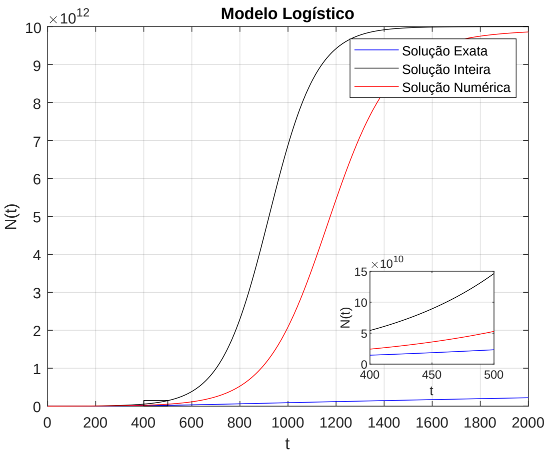
Figura 3: Modelos de Crescimento para $0 < t < 2000$.



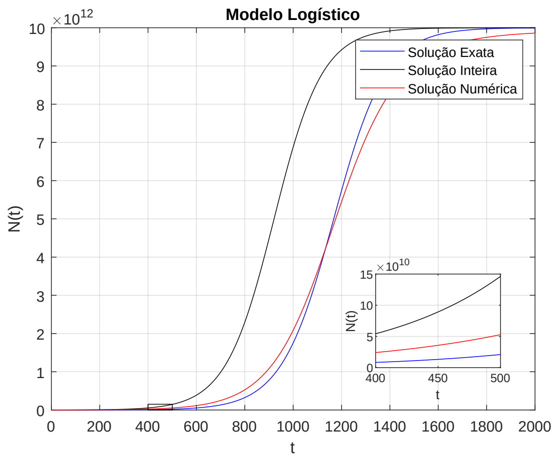
(a) Operadores fracionários tradicionais com $\alpha = 0.95$.



(b) Parâmetros $\alpha = 0.95$, $m = 2$, $\kappa = 5,3$ e $p = 0,9$.



(c) Operadores fracionários tradicionais com $\alpha = 0.95$.



(d) Parâmetros $\alpha = 0.95$, $\kappa = 5,15$ e $p = 0,95$.

Fonte: Elaborada pelos autores.

Nos resultados obtidos, observou-se que a dinâmica do modelo logístico fracionário proporcional é fortemente influenciada pelos parâmetros $\kappa > 0$ e $p \in (0, 1]$, que desempenham papéis centrais na estrutura dos operadores fracionários. O parâmetro κ, associado à generalização de funções como a gama e a de Mittag-Leffler, atua como modulador da profundidade da memória do sistema, alterando o comportamento do núcleo da integral fracionária. Resultados mostram que valores menores de κ intensificam efeitos de memória de longa duração na evolução de $N(t)$, enquanto valores maiores suavizam essa contribuição, aproximando a solução da resposta clássica.

Paralelamente, o parâmetro p regula a proporcionalidade entre o valor atual da função e sua derivada, permitindo interpolação entre comportamento puramente integral ($p \to 0$) e diferencial clássico ($p \to 1$). Percebeu-se que quando p se aproxima de zero, a dinâmica torna-se mais acumulativa e dependente do histórico, enquanto para p próximo de 1, o comportamento é mais local e reativo. Atuando conjuntamente, κ e p permitem ajuste fino da memória e localidade da dinâmica, sendo essenciais para representar padrões de crescimento em fenômenos reais, como evidenciado em comparações numéricas e análises gráficas dos modelos.

7 Conclusão

A pesquisa por generalizações associadas à Matemática, se apresentou como um dos aspectos de grande importância para o progresso da Modelagem Matemática. Desta forma, a equação de Turner *et al.* (1976), aborda de maneira interessante as relações dos principais modelos acerca da Teoria de Crescimento.

Nesta perspectiva, a Modelagem de Ordem Fracionária, tem sido utilizada para generalizar grandes resultados. Apesar de algumas divergências apresentadas na literatura científica, entre as soluções analíticas e numéricas para o modelo Logístico, com suas respectivas variações, podemos observar resultados promissores com o uso de operadores fracionários proporcionais.

Diante dos resultados obtidos, constata-se que os parâmetros p e κ são elementos fundamentais na construção e ajuste do modelo logístico por operadores fracionários proporcionais. A interação entre esses dois parâmetros não apenas amplia a capacidade de representação do modelo, como também o torna mais sensível às características reais dos fenômenos estudados. Desta forma, o uso conjunto de p e κ proporciona uma modelagem mais robusta, generalizada e coerente com os princípios do cálculo fracionário, revelando-se uma alternativa promissora frente aos modelos tradicionais.

Portanto, observa-se a necessidade da obtenção da solução real para este tipo de modelo, com o objetivo de analisar as aplicações destes operadores proporcionais fracionários com maior eficiência.

Referências

[1] TURNER, M. E. *et al.* A Theory of Growth. **Mathematical Biosciences**, v. 29, n. 3–4, p. 367–373, 1976. Disponível em: https://doi.org/10.1016/0025-5564(76)90112-7. Acesso em: 26 ago. 2025.

[2] CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. **Cálculo fracionário**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015. 184 p.

[3] OLIVEIRA, D. S. **Fractional derivatives**: generalizations. 2018. 105 p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2018.

[4] PULIDO, M. A. P. **BE ψ-Hilfer Approximation**: particular cases and applications. 2024. 86 p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2024.

[5] SOUSA, J. V. d. C.; OLIVEIRA, E. C. d. On the ψ-hilfer fractional derivative. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, Amsterdam, v. 60, p. 72–91, 2018. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.01.005. Acesso em: 26 ago. 2025.

[6] DíAZ, R.; PARIGUAN, E. On hypergeometric functions and pochhammer k-symbol. **Divulgaciones Matemáticas**, Maracaibo, v. 15, n. 2, p. 179–192, 2007. Disponível em: https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0405596. Acesso em: 26 ago. 2025.

[7] GRIGOLETTO, E. C. **Equações diferenciais fracionárias e as funções de Mittag-Leffler**. 2014. 152 p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

[8] JARAD, F.; ABDELJAWAD, T. Generalized fractional derivatives and laplace transform. **Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S**, Springfield, v. 13, n. 3, p. 709–722, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.3934/dcdss.2020039. Acesso em: 26 ago. 2025.

[9] KHALIL, R. *et al.* A new definition of fractional derivative. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Amsterdam, v. 264, p. 65–70, 2014. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.01.002. Acesso em: 26 ago. 2025.

[10] ANDERSON, D. R.; ULNESS, D. J. Newly defined conformable derivatives. **Advances in Dynamical Systems and Applications**, New Delhi, v. 10, n. 2, p. 109–137, 2015. ISSN 0973-5321. Disponível em: http://campus.mst.edu/adsa. Acesso em: 26 ago. 2025.

[11] SUDSUTAD, W.; KONGSON, J.; THAIPRAYOON, C. On generalized (κ, ψ)-hilfer proportional fractional operator and its applications to the higher-order cauchy problem. **Boundary Value Problems**, Heidelberg, v. 2024, n. 83, 2024. Disponível em: https://doi.org/10.1186/s13661-024-01891-x. Acesso em: 26 ago. 2025.

[12] KWUN, Y. C. *et al.* Generalized Riemann-Liouville k-fractional integrals associated with Ostrowski type inequalities and error bounds of Hadamard Inequalities. **IEEE Access**, Piscataway, p. 1–1, 2018. Disponível em: https://doi.org/10.1109/access.2018.2878266. Acesso em: 26 ago. 2025.

[13] GOMPERTZ, B. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. in a letter to francis baily, esq. f. r. s. &c. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, The Royal Society, London, v. 115, p. 513–583, 1825. ISSN 0261-0523. Published online January 1, 1997. Disponível em: https://doi.org/10.1098/rstl.1825.0026. Acesso em: 26 ago. 2025.

[14] VOGELS, M. *et al.* P. F. Verhulst's "Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement" from Correspondence Mathématique et Physique, Ghent, vol. X, 1838. **Journal of Biological Physics**, Springer-Verlag, Heidelberg, v. 3, p. 183–192, 1975. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/BF02309004. Acesso em: 26 ago. 2025.

[15] PRUITT, K. M.; TURNER, M. E.; BOACKLE, R. J. A kinetic model for the quantitative analysis of complement. **Journal of Theoretical Biology**, London, v. 44, n. 2, p. 207–217, 1974. Disponível em: https://doi.org/10.1016/0022-5193(74)90157-x. Acesso em: 26 ago. 2025.

[16] PüTTER, A. Studien über physiologische Ähnlichkeit VI. Wachstumsähnlichkeiten. **Pflügers Archiv für die gesamte Physiologie des Menschen und der Tiere**, Heidelberg, v. 180, p. 298–340, 1920. Disponível em: https://doi.org/10.1007/BF01755094. Acesso em: 26 ago. 2025.

[17] BERTALANFFY, L. V. Quantitative laws in metabolism and growth. **The Quarterly Review of Biology**, Chicago, v. 32, n. 3, p. 217–231, 1957. Disponível em: https://doi.org/10.1086/401873. Acesso em: 26 ago. 2025.

[18] RICHARDS, F. J. A flexible growth function for empirical use. **Journal of Experimental Botany**, Oxford, v. 10, n. 2, p. 290–301, jun. 1959. Disponível em: https://doi.org/10.1093/jxb/10.2.290. Acesso em: 26 ago. 2025.

[19] NELDER, J. A. The fitting of a generalization of the logistic curve. **Biometrics**, Oxford, v. 17, n. 1, p. 89–110, 1961. Disponível em: https://doi.org/10.2307/2527498. Acesso em: 26 ago. 2025.

[20] MALTHUS, T. R. **An Essay on the Principle of Population**. [*S.l.*: *s.n.*], 1798.

[21] WEST, B. J. Exact solution to fractional logistic equation. **Physica A:** Statistical Mechanics and Its Applications, Amsterdam, v. 429, p. 103–108, 2015. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.02.073. Acesso em: 26 ago. 2025.

[22] AREA, I.; LOSADA, J.; NIETO, J. J. A note on the fractional logistic equation. **Physica A:** Statistical Mechanics and Its Applications, Amsterdam, v. 444, p. 182–187, 2016. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.10.037. Acesso em: 26 ago. 2025.

[23] TARASOV, V. E. **Handbook of Fractional Calculus with Applications:** volume 5. Applications in Physics, Part B. Berlin: De Gruyter, 2019. Disponível em: https://doi.org/10.1515/9783110571721. Acesso em: 26 ago. 2025.

[24] ELAGAN, S. K. On the invalidity of semigroup property for the mittag–leffler function with two parameters. **Journal of the Egyptian Mathematical Society**, Heidelberg, v. 24, n. 2, p. 200–203, 2016. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.joems.2015.05.003. Acesso em: 26 ago. 2025.

[25] SOARES, J. C. A.; JAROSZ, S.; COSTA, F. S. Fractional growth models: Malthus and verhulst. **C.Q.D.** - Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 22, n. 2, p. 163–177, 2022. Disponível em: https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/330. Acesso em: 26 ago. 2025.

[26] VARALTA, N. **Das transformadas integrais ao Cálculo Fracionário aplicado à equação Logística**. 2014. 64 p. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Biociências, Universidade Estadual Paulista, Botucatu, 2014.

[27] DIETHELM, K.; FORD, N. J.; FREED, A. D. Detailed error analysis for a fractional adams method. **Numerical Algorithms**, New York, v. 36, n. 1, p. 31–52, 2004. Disponível em: https://doi.org/10.1023/B:NUMA.0000027736.85078.be. Acesso em: 26 ago. 2025.

[28] LI, C.; ZENG, F. **Numerical Methods for Fractional Calculus**. New York: Chapman and Hall/CRC, 2015. Disponível em: https://doi.org/10.1201/b18503. Acesso em: 26 ago. 2025.

[29] DIETHELM, K.; FORD, N. J.; FREED, A. D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. **Nonlinear Dynamics**, Dordrecht, v. 29, p. 3–22, 2002. Disponível em: https://doi.org/10.1023/A:1016592219341. Acesso em: 26 ago. 2025.

[30] WEINBERG, R. A.; NUNES, C. P.; SELBACH, B. **A Biologia do Câncer**. Tradução Bruna Selbach *et al*. Porto Alegre: Artmed, 2008. 864 p.

[31] RODRIGUES, D. S. **Modelagem matemática em câncer e quimioterapia**: uma introdução. São Carlos, SP: SBMAC, 2011.

[32] SPRATT, J. S.; MEYER, J. S.; SPRATT, J. A. Rates of growth of human neoplasms: Part ii. **Journal of Surgical Oncology**, Hoboken, v. 61, n. 1, p. 68–83, 1996. Disponível em: https://doi.org/10.1002/1096-9098(199601)61:1⟨68::aid-jso2930610102⟩3.0.co;2-e. Acesso em: 26 ago. 2025.