

**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
v. 26, 2025
Artigo de Pesquisa

Juan López Linares

Universidade de São Paulo (USP),
Faculdade de Zootecnia e Engenharia
de Alimentos (FZEA), Pirassununga,
jlopez@usp.br

Incentro: cinco problemas resolvidos propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática

Incenter: five solved problems proposed for the International Mathematics Olympiad

Resumo

Entre os centros de triângulos, o incentro, ponto de encontro das bissetrizes, é um dos mais conhecidos devido a sua grande utilização em diversos campos da Matemática e Física. Cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática são discutidos em detalhe. As demonstrações envolvidas nas soluções são complementadas pela disponibilização dos respectivos links das figuras interativas utilizando o GeoGebra. É esperado que o artigo possa ser apreciado tanto por estudantes, que preparam-se para as fases finais de competições nacionais ou internacionais, quanto por professores, que atuam no ensino e interessam-se em desafios olímpicos.

Palavras-chave: incentro; Ensino Médio; GeoGebra; Olimpíada Internacional de Matemática;

Abstract

Among the centers of triangles, incenter, the meeting point of the bisectors, is one of the best known due to its wide use in various fields of Mathematics and Physics. Five problems proposed for the International Mathematics Olympiad are discussed in detail. The proofs involved in the solutions are complemented by the availability of the respective links to the interactive figures using GeoGebra. It is expected that the article can be appreciated both by students preparing for the final stages of national or international competitions and by teachers interested in Olympic challenges.

Keywords: incenter; High School; GeoGebra; International Mathematics Olympiad.



1 Introdução

O incentro I de um triângulo é um ponto de grande importância na geometria, pois é o centro do círculo inscrito no triângulo, ou seja, a circunferência que é tangente a todos os três lados do triângulo internamente. I é equidistante de todos os lados do triângulo. Isso significa que a distância do incentro a cada lado do triângulo é a mesma, o que é uma propriedade única e útil em várias aplicações geométricas.

Várias pesquisas apontaram que o ensino de Geometria Plana, utilizando o software GeoGebra, proporciona ricas possibilidades de visualização do processo de aprendizagem que são difíceis de serem trabalhadas em um ambiente comum [1, 2, 3, 4].

A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, *International Mathematical Olympiad*) é uma competição para estudantes do Ensino Médio. Os objetivos são descobrir, estimular e desafiar estudantes talentosos em Matemática. Fortalecer relações de amizade internacional entre matemáticos, criar oportunidades para o intercâmbio de informação sobre programas e conteúdos de estudo e promover a Matemática em geral.

Na preparação para uma Olimpíada Internacional de Matemática cada delegação (menos o país sede) pode enviar problemas para formar a base de dados inicial, chamada lista longa (*LongList*, LL). Os mesmos não podem ter sido usados em competições anteriores, nem publicados e devem abranger vários tópicos de Matemática pré-universitária. O país sede da competição cria um Comitê de Seleção que escolhe os melhores problemas da LL para formar a lista curta (*ShortList*, SL). Os professores líderes, um por equipe, recebem a SL no primeiro dia da reunião e escolhem, por maioria simples, os seis problemas da SL que serão usados na IMO. As duas listas são mantidas em segredo até a IMO do próximo ano.

As resoluções neste artigo complementam algumas poucas disponíveis nos fóruns em língua inglesa e nas publicações das competições. Utilizando argumentos menos rebuscados, focou-se na apresentação mais detalhada das transições, possibilitando que alunos e professores conseguissem acompanhar o desenvolvimento do problema. Como complemento, uma versão interativa de cada uma das figuras do texto está disponibilizada no site do GeoGebra. Este texto foi elaborado a partir de materiais didáticos utilizados durante uma aula do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. Num artigo anterior foram discutidos outros cinco problemas sobre ex-incentros [5].

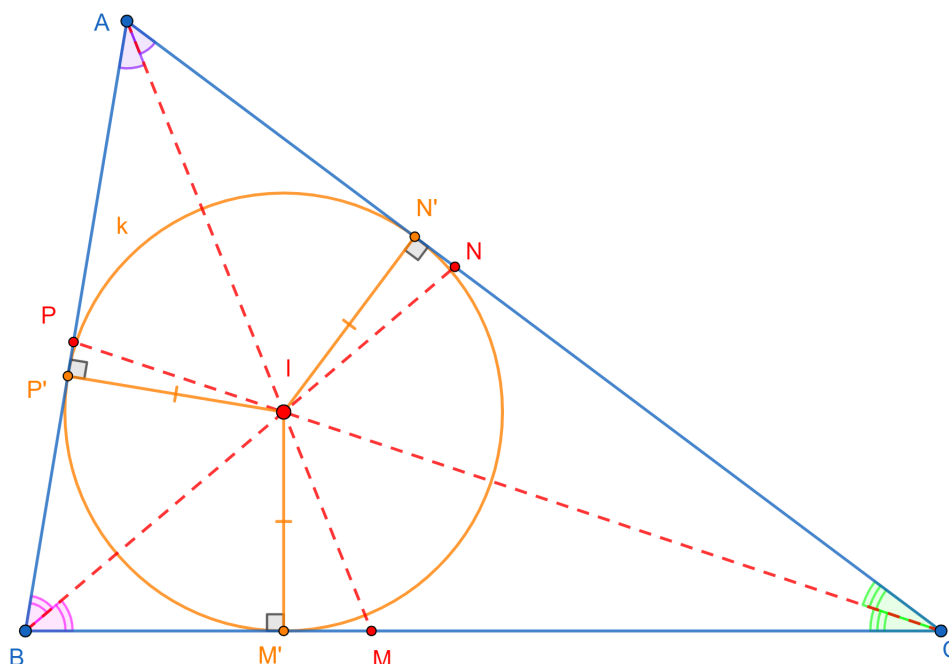
Na seção 2, por completude, discutem-se as proposições que serão utilizadas na solução dos cinco problemas da seção 3. Para o leitor iniciante recomenda-se consultar os livros de Geometria [6, 7, 8]. Também serviram como referência os livros de Geometria Analítica [9] e Matemática Discreta [10] adotados pelo Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Por simplicidade, dados dos pontos A e B , denota-se a reta AB , o segmento AB e a medida do segmento AB da mesma forma. A diferenciação será feita pelo texto. As áreas serão representadas utilizando $[]$.

2 Conceitos básicos

2.1 As três bissetrizes internas de um triângulo são concorrentes

Proposição 1. *As três bissetrizes internas de um triângulo ABC intersectam-se num ponto I , chamado incentro, que é equidistante dos lados e centro da circunferência inscrita k (Figura 1).*

Figura 1: As três bissetrizes internas de um triângulo são concorrentes. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Demonstração. Sejam BN e CP as bissetrizes relativas aos vértices B e C , respectivamente, e $I = BN \cap CP$. Sejam ainda M' , N' e P' as projeções ortogonais de I sobre os lados BC , CA e AB , respectivamente. Como o ponto I pertence às bissetrizes BN e CP , vale que $IM' = IP'$ e $IM' = IN'$. Portanto, $IP' = IN'$. Segue que I pertence à bissetriz do $\angle A$. $\square$

2.2 Relações métricas devidas ao Incírculo

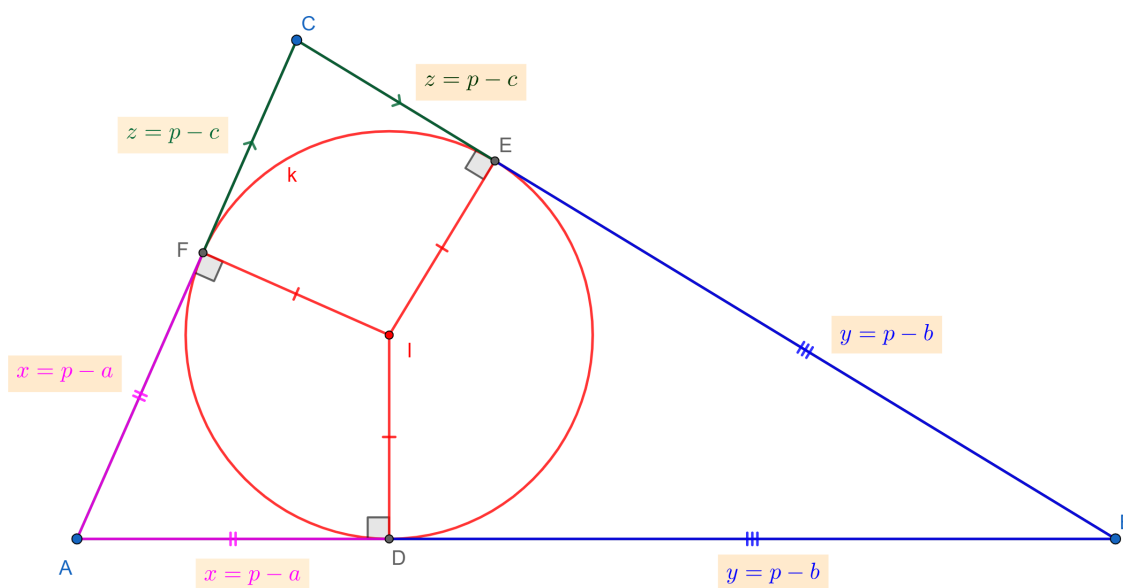
Definição 2 (Semiperímetro do $\triangle ABC$). O semiperímetro do $\triangle ABC$ de lados $BC = a$, $CA = b$ e $AB = c$ é denotado por p e calculado:

$$p = \frac{a + b + c}{2}. \quad (1)$$

Proposição 3 (Relações métricas devidas ao Incírculo). A Figura 2 mostra um triângulo ABC . Sejam $AB = c$, $BC = a$ e $CA = b$. Sejam D , E e F os pontos de interseção da circunferência inscrita k com os lados AB , BC e CA , respectivamente. E seja o semiperímetro p . Então vale que:

$$AD = AF = p - a, \quad BD = BE = p - b, \quad CF = CE = p - c. \quad (2)$$

Figura 2: Guia para a demonstração da Proposição 3. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Demonstração. Como os lados do $\triangle ABC$ são tangentes à circunferência k vale que:

$$AF = AD = x, \quad BD = BE = y, \quad CF = CE = z. \quad (3)$$

Isto permite escrever o sistema de equações:

$$x + y = c, \quad (4)$$

$$y + z = a, \quad (5)$$

$$z + x = b, \quad (6)$$

$$p = x + y + z. \quad (7)$$

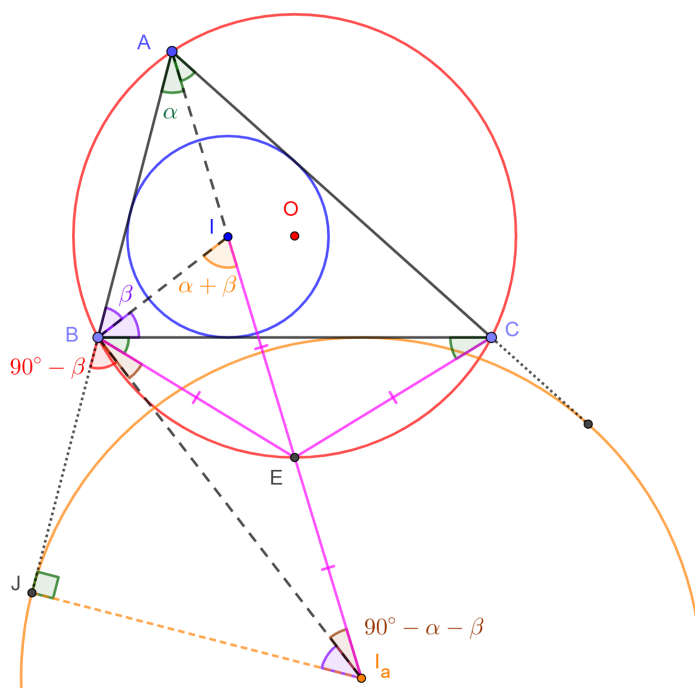
Colocando em evidência x , y e z encontram-se as soluções citadas. $\square$

2.3 Ponto equidistante de dois vértices, o incentro e o ex-incentro

Proposição 4. A Figura 3 mostra um triângulo ABC . Seja I seu Incentro e I_a o centro da excircunferência correspondente ao lado BC . Seja E o ponto de interseção de AI com a circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$. Então,

$$EB = EC = EI = EI_a. \quad (8)$$

Figura 3: Guia para a demonstração da Proposição 4. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Demonstração. Pela bissetriz em A e o quadrilátero inscrito $ACEB$ tem-se:

$$\angle BAE = \angle CAE = \angle CBE = \angle BCE = \alpha. \quad (9)$$

Portanto, o $\triangle EBC$ é isósceles de base BC e $EB = EC$. Além disso, da bissetriz em B, sejam $\angle IBA = \angle IBC = \beta$. Pela propriedade do ângulo externo, aplicada no vértice I do triângulo ABI,

$$\angle BIE = \alpha + \beta. \quad (10)$$

Segue que, $\angle BIE = \angle IBE$, o $\triangle EBI$ é isósceles de base BI e $EB = EI$. Pela bissetriz externa em B, sejam

$$\angle JBI_a = \angle CBI_a = \gamma. \quad (11)$$

Como o $\angle JBA = 180^\circ$ tem-se que $\gamma = 90^\circ - \beta$. Do $\triangle BJI_a$, retângulo em J, tem-se $\angle JI_aB = \beta$. Pela soma dos ângulos internos no $\triangle AJI_a$ e o ângulo raso em B encontra-se:

$$\angle EBI_a = \angle EI_aB = 90^\circ - \alpha - \beta. \quad (12)$$

Isto é, o $\triangle EBI_a$ é isósceles, de base BI_a , e $EB = EI_a$. Conclui-se que:

$$EB = EC = EI = EI_a. \quad (13)$$

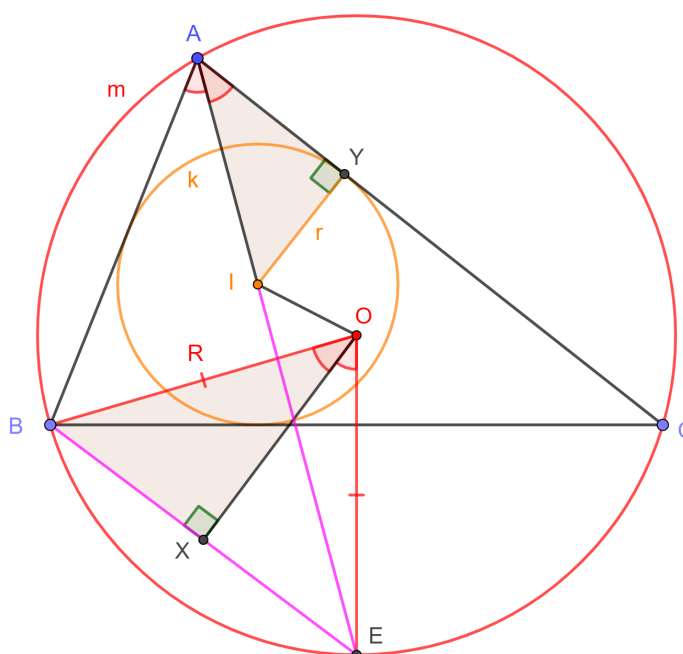
□

2.4 Distância Incentro-Circuncentro ou Fórmula de Euler

Proposição 5 (Distância Incentro-Circuncentro ou Fórmula de Euler). *A Figura 4 mostra um triângulo ABC . Seja I seu Incentro, k sua circunferência inscrita de raio r . Adicionalmente, seja m a circunferência circunscrita ao $\triangle ABC$, de centro O e raio R . Então:*

$$OI^2 = R(R - 2r). \quad (14)$$

Figura 4: Guia para a demonstração da Proposição 5. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Demonstração. Seja E o ponto de interseção da bissetriz AI com m . Pela Potência do ponto I em relação a m tem-se:

$$R^2 - OI^2 = AI \cdot EI. \quad (15)$$

Sejam X e Y os pés das perpendiculares de O e I até BE e AC , respectivamente. Como o $\triangle OBE$ é isósceles de base BE , e devido a relação entre ângulo central e inscrito, relativo a corda BE , segue que $\angle YAI = \angle XOB$.

Logo, pelo caso de semelhança AA, tem-se $\triangle AIY \sim \triangle OBX$. Portanto,

$$\frac{BX}{IY} = \frac{OB}{AI} \quad \text{ou} \quad AI = \frac{OB \cdot IY}{BX} = \frac{Rr}{\frac{EB}{2}} = \frac{2Rr}{EB}. \quad (16)$$

Viu-se na Proposição 4 que $EB = EI$, segue que:

$$AI = \frac{2Rr}{EI}. \quad (17)$$

Substituindo (17) em (15) encontra-se $R^2 - OI^2 = 2Rr$. Logo,

$$OI^2 = R^2 - 2Rr = R(R - 2r). \quad (18)$$

□

2.5 Relação de Stewart

Teorema 6 (Relação de Stewart). *Seja D um ponto no lado BC do $\triangle ABC$. Sejam $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $BD = x$, $CD = y$ e $AD = z$. Vale que:*

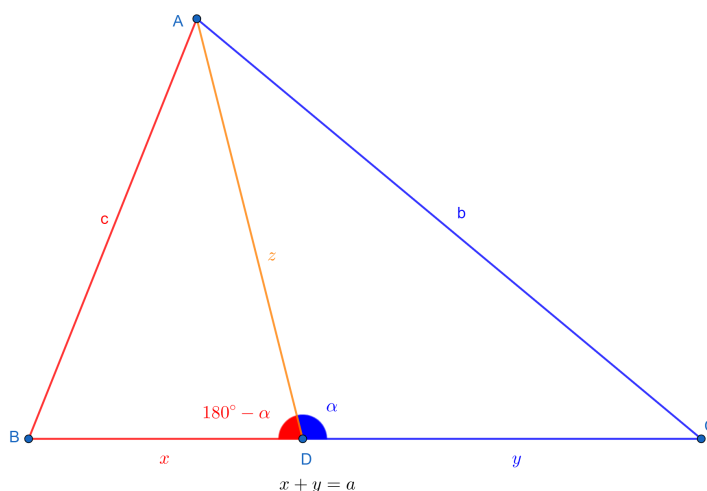
$$\frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{x} = a + z^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right). \quad (19)$$

Ou equivalentemente:

$$z^2 = \frac{b^2}{a}x + \frac{c^2}{a}y - xy. \quad (20)$$

Esta relação permite encontrar o comprimento de uma ceviana AD sem precisar conhecer os ângulos por ela determinados. A Figura 5 permite acompanhar a prova.

Figura 5: Guia para a demonstração do Teorema 6. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Demonstração. Pela Lei dos Cossenos no $\triangle ABD$ tem-se:

$$c^2 = x^2 + z^2 - 2xz \cos(180^\circ - \alpha). \quad (21)$$

Mas $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha)$. Logo,

$$c^2 = x^2 + z^2 + 2xz \cos(\alpha), \quad (22)$$

$$\frac{c^2}{x} = x + \frac{z^2}{x} + 2z \cos(\alpha). \quad (23)$$

Pela Lei dos Cossenos no $\triangle ACD$ tem-se:

$$b^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos(\alpha), \quad (24)$$

$$\frac{b^2}{y} = y + \frac{z^2}{y} - 2z \cos(\alpha). \quad (25)$$

Somando (23) e (25) segue:

$$\frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{x} = x + y + z^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = a + z^2 \frac{a}{xy}, \quad (26)$$

$$\frac{b^2x + c^2y}{axy} = 1 + \frac{z^2}{xy}, \quad (27)$$

$$z^2 = \frac{b^2x + c^2y}{a} - xy. \quad (28)$$

□

Observação 7. Ainda com referência a Figura 5, no caso em que D é o ponto médio de BC vale $x = y = \frac{a}{2}$ e $z = m_a$ (mediana relativa ao vértice A). Utilizando (20) encontra-se:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}. \quad (29)$$

3 Problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática

3.1 Incírculo, triângulos inscritos, quadriláteros inscritíveis. P9 LL IMO 1967.

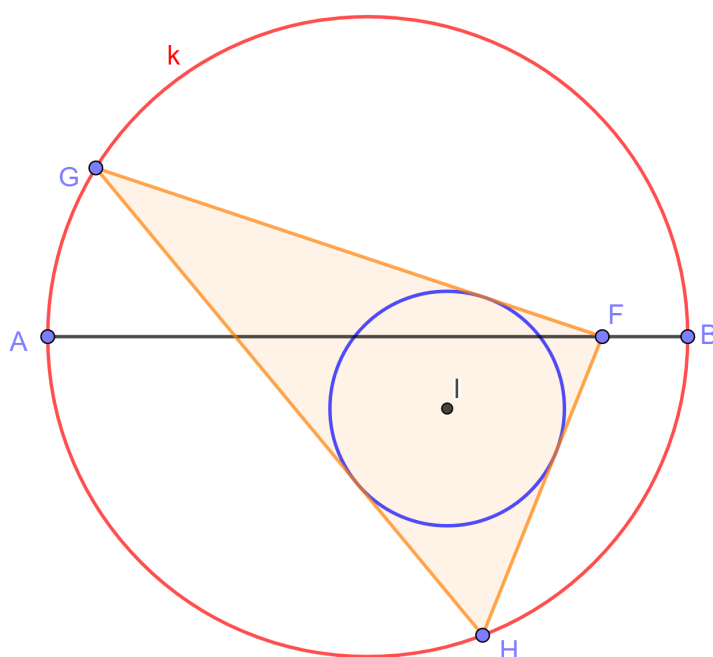
Problema 1. Uma circunferência k , de diâmetro AB , é dada. Encontrar o lugar geométrico dos centros dos círculos inscritos nos triângulos com um vértice em AB e outros dois vértices em k .

A IMO 1967 foi realizada na cidade de Cetinje, atualmente na República de Montenegro, antiga Iugoslávia. Esse é o Problema 9 da lista longa (LL), proposto pela delegação da outrora Checoslováquia [11].

3.1.1 Resolução do Problema 1

A Figura 6 ilustra uma construção inicial.

Figura 6: Construção inicial do Problema 1. Versão interativa aqui.

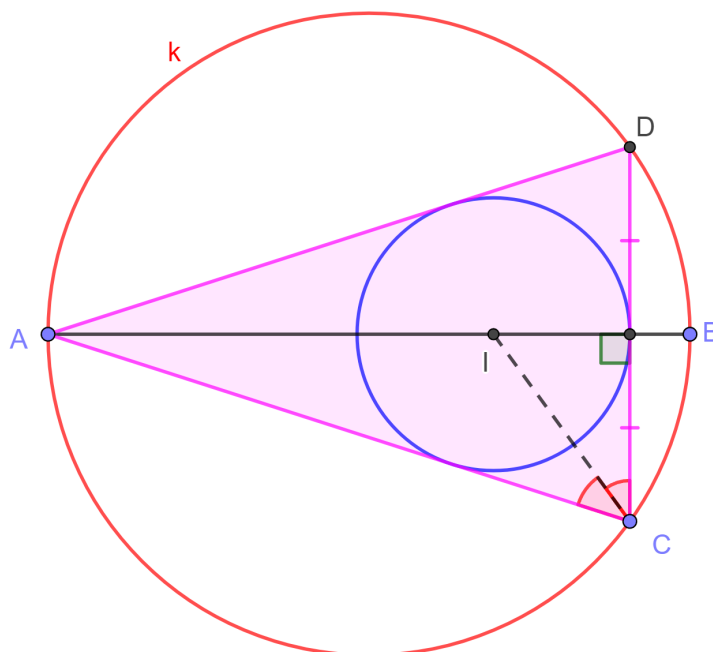


Fonte: O autor.

O centro dos círculos inscritos será denotado por I . A seguir mostra-se que o lugar geométrico de I é qualquer ponto no interior de k .

Inicialmente, posiciona-se um ponto $C \in k$ (Figura 7). Seja o ponto D a reflexão de C relativa ao diâmetro AB . Por construção, o $\triangle ACD$ é isósceles, de base CD , e seu incentro $I \in AB$. Movimentando o ponto $C \in k$ verifica-se que I pode ser qualquer ponto no interior do segmento AB .

Figura 7: Caso $I \in AB$ do Problema 1. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Analisa-se, agora, o caso em que I está no interior de k , mas $I \notin AB$ (Figura 8). Traçam-se as semirretas AI e BI e marcam-se os pontos $X = AI \cap k$ e $Y = BI \cap k$. Seja o ponto Z a projeção ortogonal do ponto I em AB . Com esta construção o ponto I é o incentro do $\triangle XYZ$.

De fato, como $\angle IZB = \angle IXB = 90^\circ$, o quadrilátero $IZBX$ é inscritível. Segue que $\angle IXZ = \angle IBZ$. Por outro lado, o quadrilátero $YABX$ também é inscritível. Logo, $\angle YXA = \angle YBA = \angle IBZ$. Ou seja, o segmento IX é bissetriz do $\angle YXZ$.

Analogamente, como $\angle IZA = \angle IYA = 90^\circ$, o quadrilátero $IZAY$ é inscritível. Segue que $\angle IYZ = \angle IAZ$. Por outro lado, o quadrilátero $YABX$ também é inscritível. Portanto, $\angle IAZ = \angle XAB = \angle XYB$. Com isto, o segmento IY é bissetriz do $\angle XYZ$.

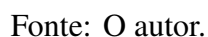
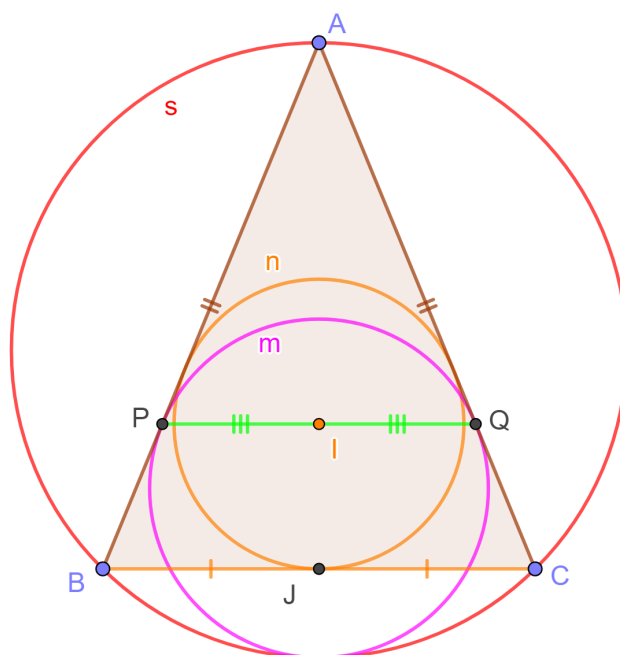


Figura 9: Construção inicial do Problema 2. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Seja K o centro da circunferência m , tangente internamente ao circuncírculo s do $\triangle ABC$ com centro em O (Figura 10). Sejam I o centro do incírculo n do $\triangle ABC$, $T = m \cap s$ e J o ponto médio do segmento BC . Sejam ainda os pontos de tangência $U = AB \cap n$ e $W = AC \cap n$.

Como o $\triangle ABC$ é isósceles, de base BC , a figura é simétrica em relação a mediatriz AJ e os pontos A, O, I, K, J e T são colineares.

Pela tangência em T , as circunferências s e m são homotéticas com centro de homotetia em T e fator:

$$\frac{TO}{TK}. \quad (30)$$

Adicionalmente, como AT é diâmetro de s segue que $\angle ABT = \angle ACT = 90^\circ$. Sendo

$$\angle BAT = \angle PAK = \angle UAI, \quad (31)$$

pelo critério de semelhança AA, tem-se:

$$\triangle BAT \sim \triangle PAK \sim \triangle UAI. \quad (32)$$

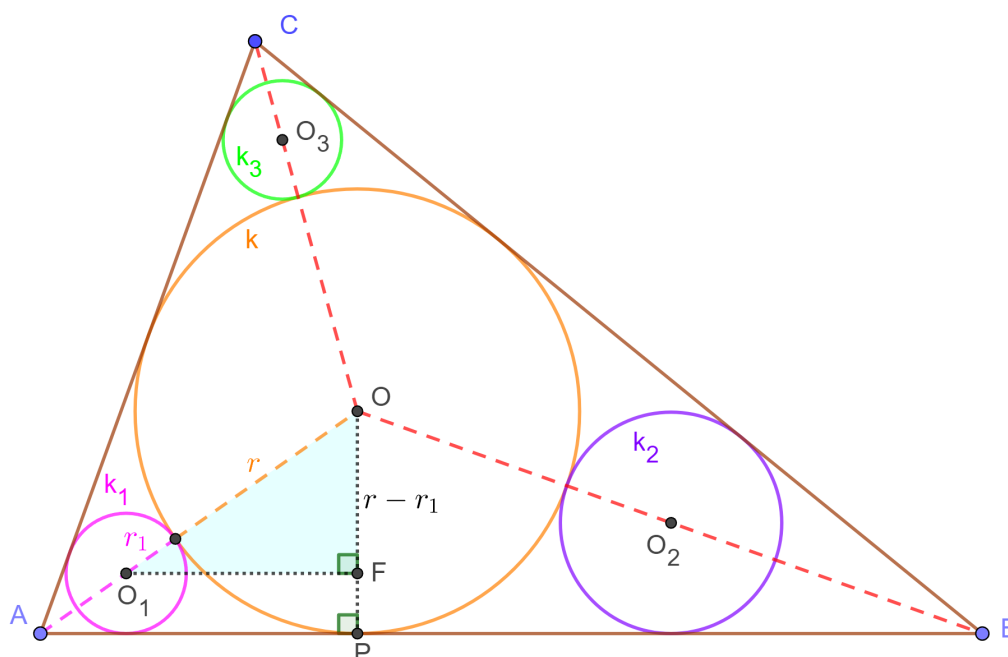
Logo,

$$\frac{AK}{AI} = \frac{PA}{UA} = \frac{PK}{UI} = \frac{TK}{JI}. \quad (33)$$

Isto é, as circunferências m e n são homotéticas com centro de homotetia em A e fator:

$$\frac{AK}{AI}. \quad (34)$$

Figura 11: Construção inicial do Problema 3. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Sejam $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$, $k_3(O_3, r_3)$ e $k(O, r)$ as circunferências com centros e raios; α , β e γ os ângulos internos do $\triangle ABC$ nos vértices A , B e C . Sejam ainda P e F as projeções ortogonais dos pontos O e O_1 sobre AB e OP , respectivamente.

Nota-se que $O_1O = r + r_1$ e $FO = r - r_1$. Pelo Teorema de Pitágoras aplicado no $\triangle O_1FO$ encontra-se que:

$$O_1F^2 = (r + r_1)^2 - (r - r_1)^2, \quad (35)$$

$$O_1F = 2\sqrt{rr_1}. \quad (36)$$

Como $\angle OO_1F = \frac{\alpha}{2}$, então:

$$\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2\sqrt{rr_1}}{r - r_1}. \quad (37)$$

Analogamente,

$$\cot\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{2\sqrt{rr_2}}{r - r_2}, \quad (38)$$

$$\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{2\sqrt{rr_3}}{r - r_3}. \quad (39)$$

Lema 8 (Tangente e Cotangente da soma). *Vale que:*

$$\tan(x + y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}, \quad (40)$$

$$\cot(x + y) = \frac{\cot(x)\cot(y) - 1}{\cot(y) + \cot(x)}. \quad (41)$$

Demonstração. Sabe-se que:

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x) \cos(y) + \operatorname{sen}(y) \cos(x), \quad (42)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x) \cos(y) - \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y). \quad (43)$$

Portanto,

$$\tan(x+y) = \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\operatorname{sen}(x) \cos(y) + \operatorname{sen}(y) \cos(x)}{\cos(x) \cos(y) - \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y)}. \quad (44)$$

Dividindo numerador e denominador por $\cos(x) \cos(y)$ encontra-se:

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x) \tan(y)}. \quad (45)$$

Analogamente,

$$\cot(x+y) = \frac{\cos(x+y)}{\operatorname{sen}(x+y)} = \frac{\cos(x) \cos(y) - \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y)}{\operatorname{sen}(x) \cos(y) + \operatorname{sen}(y) \cos(x)}. \quad (46)$$

Dividindo numerador e denominador por $\operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y)$ encontra-se:

$$\cot(x+y) = \frac{\cot(x) \cot(y) - 1}{\cot(y) + \cot(x)}. \quad (47)$$

□

Lema 9. *Sejam α, β e γ os ângulos internos de um triângulo. Então, vale que:*

$$\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cot\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cot\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cot\left(\frac{\beta}{2}\right) \cot\left(\frac{\gamma}{2}\right). \quad (48)$$

Demonstração. Como α, β e γ são ângulos internos de um triângulo vale:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ. \quad (49)$$

Ou seja,

$$\frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right). \quad (50)$$

Segue que:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right), \quad (51)$$

$$\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right), \quad (52)$$

$$\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \cot\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right). \quad (53)$$

Pelo Lema 8 tem-se:

$$\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \cot\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cot\left(\frac{\beta}{2}\right) - 1}{\cot\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad (54)$$

$$\frac{1}{\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cot\left(\frac{\beta}{2}\right) - 1}{\cot\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad (55)$$

$$\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cot\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cot\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \cot\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cot\left(\frac{\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\gamma}{2}\right). \quad (56)$$

□

Substituindo (37), (38) e (39) na identidade do Lema 9 encontra-se:

$$\frac{2\sqrt{rr_1}}{r-r_1} + \frac{2\sqrt{rr_2}}{r-r_2} + \frac{2\sqrt{rr_3}}{r-r_3} = \frac{2\sqrt{rr_1}}{r-r_1} \cdot \frac{2\sqrt{rr_2}}{r-r_2} \cdot \frac{2\sqrt{rr_3}}{r-r_3}. \quad (57)$$

Simplificando a expressão obtém-se,

$$\sqrt{r_1}(r-r_2)(r-r_3) + \sqrt{r_2}(r-r_3)(r-r_1) + \sqrt{r_3}(r-r_1)(r-r_2) = 4r\sqrt{r_1r_2r_3}. \quad (58)$$

Para $r_1 = 1$, $r_2 = 4$ e $r_3 = 9$ encontra-se:

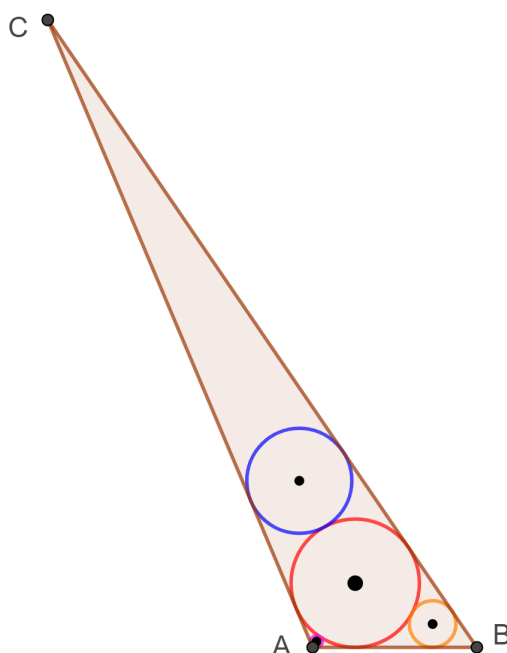
$$(r-4)(r-9) + 2(r-9)(r-1) + 3(r-1)(r-4) = 24r, \quad (59)$$

$$r^2 - 12r + 11 = 0, \quad (60)$$

$$(r-1)(r-11) = 0. \quad (61)$$

A raiz $r = 1$ leva o $\triangle OO_1F$ a ser degenerado, pois $r - r_1 = 0$. Logo, a única possibilidade, com quatro circunferências de raios diferentes, é $r = 11$. A Figura 12 mostra o $\triangle ABC$ em escala.

Figura 12: $\triangle ABC$ do Problema 3. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

3.4 Incírculo, áreas, trigonometria. P9 SL IMO 1990.

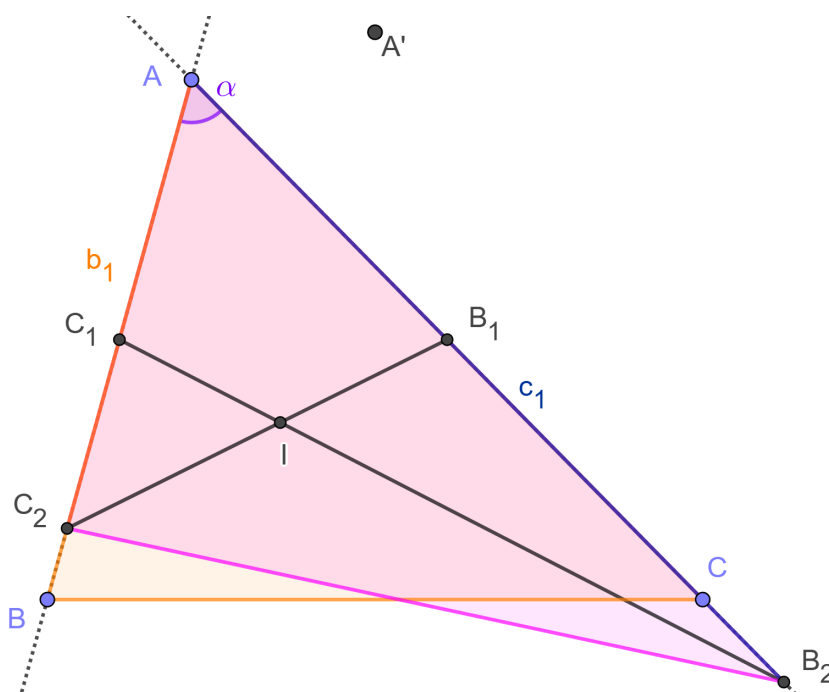
Problema 4. O incentro do triângulo ABC é I . O ponto médio de AB é C_1 e o de AC é B_1 . As retas C_1I e AC intersectam-se em B_2 , as retas B_1I e AB intersectam-se em C_2 . Se as áreas dos triângulos AB_2C_2 e ABC são iguais, qual é a medida do ângulo $\angle BAC$?

A IMO 1990 foi realizada na cidade de Pequim, Capital da China. Esse é o Problema 9 da lista curta (SL) e foi proposto pela delegação da Hungria [11].

3.4.1 Resolução do Problema 4

A Figura 13 ilustra uma construção inicial.

Figura 13: Construção inicial do Problema 4. Versão interativa aqui. O $\triangle A'BC$ é equilátero.



Fonte: O autor.

Sejam a , b e c os comprimentos dos lados do $\triangle ABC$,

$$p = \frac{a + b + c}{2} \quad (62)$$

o semiperímetro, r o raio do incírculo e c_1 e b_1 os comprimentos dos segmentos AB_2 e AC_2 , respectivamente (Figura 14). A área do $\triangle XYZ$ será denotada por $[XYZ]$. Adicionalmente, seja o ângulo procurado

$$\angle BAC = \alpha. \quad (63)$$

Sendo α um ângulo comum dos triângulos AC_1B_2 e ABC pode-se escrever:

$$[AC_1B_2] = \frac{1}{2} \cdot AC_1 \cdot AB_2 \cdot \sin(\alpha), \quad (64)$$

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\alpha). \quad (65)$$

Segue que:

$$[AC_1B_2] = \frac{AC_1 \cdot AB_2}{AB \cdot AC} \cdot [ABC]. \quad (66)$$

Como C_1 é ponto médio de $AB = c$, nota-se que $AC_1 = \frac{c}{2}$ e, por definição, $AB_2 = c_1$. Escrevendo a área do $\triangle ABC$ em função do raio do incírculo e o semiperímetro tem-se:

$$[ABC] = p \cdot r. \quad (67)$$

Logo,

$$[AC_1B_2] = \frac{\frac{c}{2} \cdot c_1}{c \cdot b} \cdot p \cdot r, \quad (68)$$

$$[AC_1B_2] = \frac{c_1 \cdot p \cdot r}{2b}. \quad (69)$$

Adicionalmente,

$$[AIB_2] = \frac{c_1 \cdot r}{2}, \quad (70)$$

$$[AC_1I] = \frac{c \cdot r}{4}. \quad (71)$$

De

$$[AC_1B_2] = [AIB_2] + [AC_1I] \quad (72)$$

encontra-se:

$$\frac{c_1 \cdot p \cdot r}{2b} = \frac{c_1 \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{4}, \quad (73)$$

$$\frac{c_1 \cdot p}{b} = c_1 + \frac{c}{2}, \quad (74)$$

$$c_1 \left(\frac{p}{b} - 1 \right) = \frac{c}{2}, \quad (75)$$

$$c_1 (p - b) = \frac{bc}{2}, \quad (76)$$

$$c_1 \left(\frac{a - b + c}{2} \right) = \frac{bc}{2}, \quad (77)$$

$$c_1 (a - b + c) = bc. \quad (78)$$

Analogamente, sendo α um ângulo comum dos triângulos AB_1C_2 e ABC pode-se escrever:

$$[AB_1C_2] = \frac{1}{2} \cdot AB_1 \cdot AC_2 \cdot \sin(\alpha), \quad (79)$$

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\alpha). \quad (80)$$

Segue que:

$$[AB_1C_2] = \frac{AB_1 \cdot AC_2}{AB \cdot AC} \cdot [ABC]. \quad (81)$$

Como B_1 é ponto médio de $AC = b$, nota-se que $AB_1 = \frac{b}{2}$ e, por definição, $AC_2 = b_1$. Logo,

$$[AB_1C_2] = \frac{\frac{b}{2} \cdot b_1}{c \cdot b} \cdot p \cdot r, \quad (82)$$

$$[AB_1C_2] = \frac{b_1 \cdot p \cdot r}{2c}. \quad (83)$$

Adicionalmente,

$$[AIC_2] = \frac{b_1 \cdot r}{2}, \quad (84)$$

$$[AB_1I] = \frac{b \cdot r}{4}. \quad (85)$$

De

$$[AB_1C_2] = [AIC_2] + [AB_1I] \quad (86)$$

encontra-se:

$$\frac{b_1 \cdot p \cdot r}{2c} = \frac{b_1 \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{4}, \quad (87)$$

$$\frac{b_1 \cdot p}{c} = b_1 + \frac{b}{2}, \quad (88)$$

$$b_1 \left(\frac{p}{c} - 1 \right) = \frac{b}{2}, \quad (89)$$

$$b_1 (p - c) = \frac{bc}{2}, \quad (90)$$

$$b_1 \left(\frac{a + b - c}{2} \right) = \frac{bc}{2}, \quad (91)$$

$$b_1 (a + b - c) = bc. \quad (92)$$

Por hipótese, as áreas dos triângulos AB_2C_2 e ABC são iguais. Ou seja,

$$[AB_2C_2] = [ABC], \quad (93)$$

$$AB_2 \cdot AC_2 \cdot \sin(\alpha) = AB \cdot AC \cdot \sin(\alpha), \quad (94)$$

$$c_1 b_1 = cb. \quad (95)$$

Multiplicando (78) e (92) encontra-se:

$$b_1 c_1 (a - b + c) (a + b - c) = (bc)^2. \quad (96)$$

Utiliza-se (95) para eliminar $b_1 c_1$ na equação anterior:

$$bc (a - b + c) (a + b - c) = (bc)^2, \quad (97)$$

$$(a - b + c) (a + b - c) = bc. \quad (98)$$

Desenvolvendo o produto e simplificando encontra-se:

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} = 1. \quad (99)$$

Por outro lado, da Lei dos Cossenos no $\triangle ABC$, pode ser escrito:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha), \quad (100)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}. \quad (101)$$

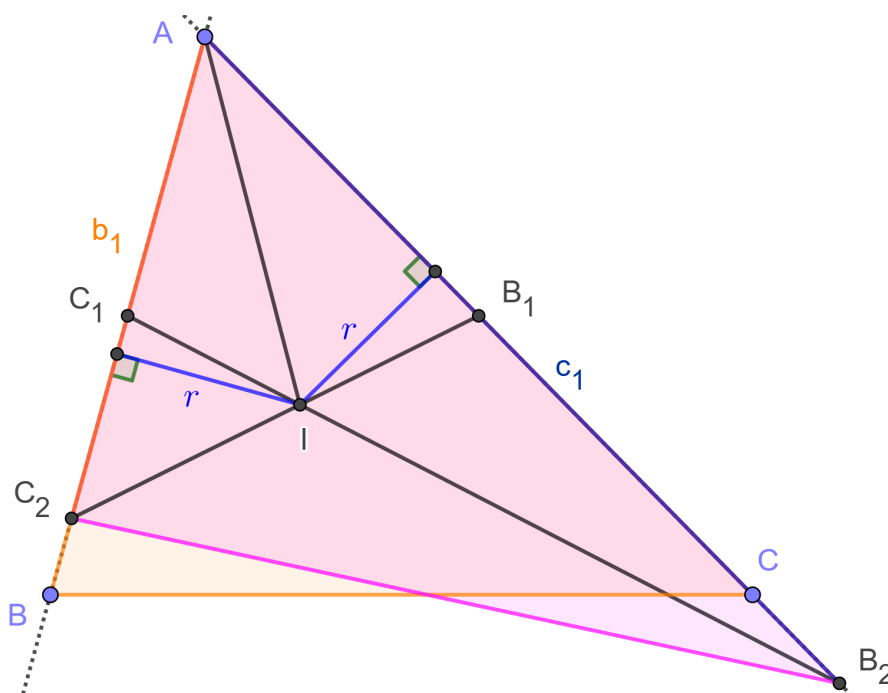
Das equações (99) e (101) segue:

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}, \quad (102)$$

$$\alpha = 60^\circ. \quad (103)$$

Destaca-se que o $\triangle ABC$ não precisa ser equilátero, este é somente um caso particular trivial. Em geral, $B_2C_2 \nparallel BC$.

Figura 14: Construção do Problema 4. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

3.5 Incírculo, homotetia, circuncírculo. P3 SL IMO 1993.

Problema 5. Considere o triângulo ABC , seu circuncírculo k com centro O e raio R , e seu incírculo com centro I e raio r . Outra circunferência k_c é tangente ao lados CA, CB em D, E , respectivamente, e é internamente tangente a k . Mostrar que I é o ponto médio de DE .

A IMO 1993 foi realizada na cidade de Istambul, Turquia. Esse é o Problema 3 da lista curta (SL) e foi proposto pela delegação da Espanha [11].

Nota-se que $OO_1 = R - \rho$ e $OC = R$. Logo, a equação (107) transforma-se em:

$$OI^2 = \frac{r}{\rho} \cdot (R - \rho)^2 + \left(1 - \frac{r}{\rho}\right) \cdot R^2 - O_1I \cdot CI. \quad (108)$$

Pela Proposição 5 (Fórmula de Euler) vale:

$$OI^2 = R(R - 2r). \quad (109)$$

Substituindo (109) em (108) encontra-se:

$$R^2 - 2Rr = \left(\frac{rR^2}{\rho} - 2Rr + r\rho\right) + \left(R^2 - \frac{rR^2}{\rho}\right) - O_1I \cdot CI, \quad (110)$$

$$O_1I \cdot CI = r\rho. \quad (111)$$

Colocando em evidência CI de (104) e substituindo em (111) chega-se a:

$$O_1I \cdot CO_1 \cdot \frac{r}{\rho} = r\rho, \quad (112)$$

$$O_1I \cdot CO_1 = \rho^2 = DO_1^2. \quad (113)$$

A equação (113) pode ser reescrita como:

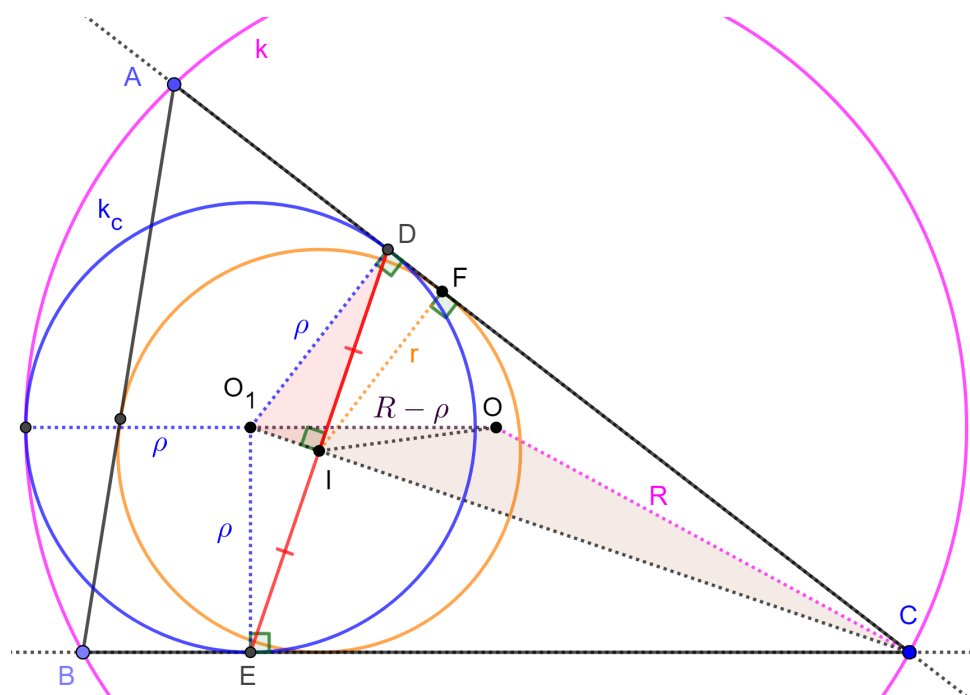
$$\frac{CO_1}{DO_1} = \frac{DO_1}{O_1I}. \quad (114)$$

Como $\angle CO_1D = \angle DO_1I$ e (114), pelo critério de semelhança LAL, tem-se:

$$\triangle CO_1D \sim \triangle DO_1I. \quad (115)$$

A relação de semelhança anterior implica que $\angle DIO_1 = \angle CDO_1 = 90^\circ$. Pela tangência $CD = CE$ e I é um ponto da bissetriz CO_1 , então I é colinear com D e E e ponto médio do segmento DE .

Figura 16: Construção do Problema 5. Versão interativa aqui.



Fonte: O autor.

Para a construção de k_c primeiro foi construída a circunferência ex-inscrita relativa ao vértice C do $\triangle ABC$. Uma inversão desta última relativo a uma círculo com centro em C e raio $\sqrt{CA \cdot CB}$ gera k_c .

Referências

- [1] MENEGALLI, R. S.; BRANDL, E. Geometria no ensino médio. **Anais da Feira do Conhecimento do IFC Campus Ibirama**, Ibirama, v. 3, n. 1, set. 2022. Trabalho apresentado na 11. Feira do Conhecimento do IFC Campus Ibirama, 2022, Ibirama.
- [2] FERREIRA, R. Ensinando matemática com o geogebra. **Enciclopédia Biosfera**, v. 6, n. 10, 2010.
- [3] CRUZ, M. P. M. da; FILHO, I. de O. H. Variação de soluções na geometria com a utilização do geogebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, São Paulo, v. 8, n. 2, p. 78–101, 2019.
- [4] ALVES, F. R. V. Situações didáticas olímpicas (SDOs): ensino de olimpíadas de matemática com arrimo no software geogebra como recurso na visualização. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 13, n. 1, p. 319–349, 2020.
- [5] LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M. dos; JESUS, A. F. de. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a olimpíada internacional de matemática.

Revista de Matemática de Ouro Preto, v. 2, p. 117–139, nov. 2021. Disponível em:
<https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5189/3868>.

- [6] MUNIZ NETO, A. C. **Geometria**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.
- [7] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria plana**. 9. ed. São Paulo: Atual Editora, 2013. v. 9.
- [8] BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.
- [9] DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. **Geometria Analítica**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.
- [10] MORGADO, A. C. de O.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção PROFMAT, 2023.
- [11] DJUKIĆ, D. **The IMO Compendium**: a collection of problems suggested for the international mathematical olympiads. 2. ed. New York: Springer, 2011.