

Aplicação de um método híbrido de pontos interiores e *branch-and-bound* em problemas de minimização de custo de colheita da cana-de-açúcar

Camila de Lima¹

Antonio Roberto Balbo²

Helenice de Oliveira Florentino Silva³

Resumo

Este trabalho tem o objetivo de desenvolver e aplicar um método híbrido que envolve os métodos previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound* em problemas referentes à minimização do custo de colheita da cana-de-açúcar. Desta forma, o método será utilizado para determinar a escolha das variedades de cana-de-açúcar para o plantio nas áreas determinadas pela usina, que podem ser do tipo mecanizáveis ou semi-mecanizáveis, que utilizam a queima da cana, de modo que se obtenha o menor custo no processo de colheita, respeitando-se as restrições do problema. O método primal-dual de pontos interiores é utilizado para se obter a solução ótima relaxada do modelo. A partir desta, utiliza-se o método *branch-and-bound* para determinar a solução ótima inteira 0-1 relacionada às restrições de integralidade do problema, relativas à escolha das variedades a serem plantadas. Os testes são realizados através de uma implementação computacional no software Borland C++ Builder 6.0 e os resultados numéricos obtidos são comparados àqueles encontrados na literatura e àqueles obtidos pelo aplicativo Solver do *software* Excel, demonstrando que o procedimento é eficiente e determina a solução ótima do problema.

Palavras Chave: Otimização, Métodos de Pontos Interiores, Método *Branch-and-Bound*, Biomassa Residual da Cana-de-Açúcar.

¹Email: cadlima@yahoo.com.br. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, FEB, UNESP, CEP: 17033-360, Bauru, SP.

²Email: arbalbo@fc.unesp.br. Departamento de Matemática, FC, UNESP, CEP: 17033-360, Bauru, SP.

³Email: helenice@ibb.unesp.br. Departamento de Bioestatística, IB, UNESP, CEP: 18618-970, Botucatu, SP.

1 Introdução

A produção de energia elétrica no Brasil é predominantemente hidráulica, porém há alguns anos, este setor tem sofrido algumas mudanças devido à necessidade da diversificação da matriz energética prevista no planejamento do setor. Assim, novas fontes de energia foram introduzidas, como as que exploram o gás natural, a energia nuclear, e as energias renováveis, as quais utilizam recursos que são reabastecidos naturalmente, promovendo um menor impacto ambiental e atendendo aos princípios de sustentabilidade, dentre elas destacam-se a energia solar, a energia eólica e energia cogerada pela biomassa residual [7].

A utilização da biomassa como fonte alternativa no processo de cogeração de energia tem sido avaliada como uma possível solução energética e ambiental, visto a baixa produção de micro poluentes.

Neste contexto, a cana-de-açúcar entra nesse estudo, por ser bastante cultivada no Brasil e por gerar uma grande quantidade de resíduos no solo, como folhas, palhas, ponteiros e frações de colmo, o que incentiva o aproveitamento desta biomassa residual para a cogeração de energia. Isso ocorre devido a proibição das queimadas, utilizadas no processo de colheita semi-mecanizado, o sistema de colheita mecanizado foi mais empregado, ocasionando um aumento significativo quantidade de resíduos no solo, que podem favorecer o aparecimento de pragas, contaminar o solo, e comprometer a próxima safra, caso não seja reaproveitado. Além disso, o período de colheita da cana-de-açúcar coincide com o período de estiagem das principais bacias hidrográficas do parque hidrelétrico brasileiro, e ainda, existe a possibilidade de armazenamento da biomassa por um determinado período até uma maior necessidade ou maior valor de comercialização desta energia.

A partir destes, diversos estudos vêm sendo realizados visando minimizar o custo, não somente da colheita mecanizável e semi-mecanizável, mas também da coleta de resíduos de cana-de-açúcar gerados nas áreas mecanizáveis, bem como, maximizar a produção de energia relativa ao aproveitamento da biomassa residual. O processo é feito de tal forma a atender as restrições de produção e demanda das usinas. Em [3], [11] e [5], são discutidos modelos matemáticos para a escolha de variedades de cana-de-açúcar que buscam otimizar o custo de coleta da biomassa residual e/ou a geração de energia.

A investigação destes modelos ocorre devido a necessidade das usinas em otimizar a colheita da cana-de-açúcar, bem como, a coleta dos resíduos ocasionados pelo corte mecanizado, visando o aproveitamento desta biomassa residual e otimizar a geração de energia a partir da biomassa.

Neste trabalho utiliza-se um procedimento híbrido envolvendo métodos primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound* para a resolução dos modelos relativos à colheita da cana-de-açúcar, apresentados em [9], que considera as áreas semi-mecanizáveis e mecanizáveis para o plantio, ainda sem considerar a minimização da coleta e a maximização da geração de energia da biomassa residual da cana, que são objetos de trabalhos futuros.

Na seção 2 é apresentado o procedimento híbrido desenvolvido envolvendo os métodos previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound*. Em seguida, na seção 3, são apresentados os modelos matemáticos, nos quais o método citado será aplicado. Os resultados dessa aplicação podem ser vistos na seção 4. E algumas considerações sobre o trabalho são feitas na seção 5.

2 Método previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound*

Seja o seguinte problema primal definido para variáveis canalizadas:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c^T x \\ \text{Sujeito a :} & \begin{cases} Ax = b \\ l \leq x \leq u \end{cases} \end{array} \quad (2.1)$$

em que $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$, $x, c, l, u \in R^n$ e A com posto n .

Tem-se então, o seguinte problema equivalente ao problema original (2.1):

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar } c^T x & \text{Minimizar } c^T x \\ \text{Sujeito a :} \begin{cases} Ax = b \\ x \geq l \text{ e } x \leq u \end{cases} & \Leftrightarrow \text{Sujeito a :} \begin{cases} Ax = b \\ x - r = l \text{ e } x + z = u \\ r \geq 0 \text{ e } z \geq 0 \end{cases} \end{array} \quad (2.2)$$

De acordo com [10], as restrições de igualdade reduzem a região de busca do problema, desta forma, a solução proposta por Lagrange é determinar um novo problema irrestrito, de modo que a função objetivo do PPL (2.2) seja penalizada através

dos multiplicadores de lagrange w , s e y , associados às restrições de igualdade do problema. As condições de primeira ordem, apresentadas de (2.4) a (2.7), garantem que as restrições sejam satisfeitas na solução ótima, e assim, a solução ótima da função lagrangiana corresponde ao ótimo do problema original, desde que este problema tenha uma solução.

Além disso, a função objetivo do problema (2.2) é penalizada através do produto de funções barreiras logarítmicas por um parâmetro de barreira $\mu > 0$, que condiciona as variáveis de folga do problema original a serem estritamente positivas, ou seja, $r > 0$ e $z > 0$, garantindo que as soluções permaneçam no interior da região viável do problema original. Assim, à medida que r e z tendem a zero e as soluções do problema aproximam-se da fronteira da região factível, as funções barreiras tendem ao infinito. Desta forma, o parâmetro de barreira deve tender a zero assintoticamente mais rápido do que as funções barreira logarítmica tendem ao infinito, de tal forma que o produto destas, tenda para zero e a solução da função lagrangiana barreira logarítmica tenda para a solução do problema original.

Desta forma, o problema de programação linear (PPL) com restrições lineares de igualdade e variáveis canalizadas (2.2), é redefinido através de um PPNL primal-dual irrestrito que é definido a partir da função lagrangiana barreira logarítmica $L_\mu(x, w, z, r, y, s)$:

$$L_\mu(x, w, z, r, y, s) = c^T x + w^T (b - Ax) + s^T (l + r - x) + y^T (x + z - u) - \mu \sum_{i=1}^n \ln(z_i) - \mu \sum_{i=1}^n \ln(r_i) \quad (2.3)$$

Em que: $w \in R^m$ e $y, s \in R^n$; $s \geq 0$, $y \geq 0$, são as variáveis duais do problema e $\mu > 0$ é o parâmetro de barreira ou parâmetro de centragem.

Assim, a partir de (2.3), temos as seguintes condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para este problema:

$$Ax = b \quad (2.4)$$

$$x + z = u \quad (2.5)$$

$$x - r = l \quad (2.6)$$

$$A^T w + s - y = c \quad (2.7)$$

$$RSe - \mu e = 0 \quad (2.8)$$

$$ZYe - \mu e = 0 \quad (2.9)$$

Em que: R, Z, S e Y são matrizes diagonais, respectivamente com r_i, z_i, s_i e y_i como elementos diagonais e $e = (1, \dots, 1)^T$. Considerando o problema (2.2) e a restrição $x - r = l$, nota-se que quando $l = 0$ temos que $x = r$, desta forma, a condição de otimalidade (2.8) pode ser reescrita como:

$$XSe - \mu e = 0 \quad (2.10)$$

em que: X é uma matriz diagonal tendo x_i como elementos da diagonal.

Se um ponto $(x^k, z^k, w^k, s^k, y^k)$ de uma iteração corrente k não satisfaz as equações de KKT apresentadas de (2.4) a (2.10), então gera o resíduo dual g^k , relacionado à equação (2.7), os resíduos primais t^k e f^k , referentes às equações (2.4) e (2.5), respectivamente, e as folgas complementares q^k e v^k , relacionadas às equações (2.9) e (2.10), respectivamente. Estes resíduos são calculados no passo 3, do algoritmo da seção 2.3 e serão utilizados no critério de parada do método, apresentado no passo 2 desse algoritmo.

No critério de parada são feitos os seguintes testes, com o objetivo de garantir que $(x^k, z^k, w^k, s^k, y^k)$ seja a solução ótima do problema:

- Factibilidade primal: $\frac{\|t^k\|}{\|b\|+1} = \frac{\|b - Ax^k\|}{\|b\|+1} \leq \varepsilon_1;$ (2.11)

- Factibilidade dual: $\frac{\|g^k\|}{\|c\|+1} = \frac{\|c - A^T w^k - s^k + y^k\|}{\|c\|+1} \leq \varepsilon_2;$ (2.12)

- Folgas complementares: $\|\tilde{v}^k\| < \varepsilon_3$, e $\|\tilde{q}^k\| < \varepsilon_4;$ (2.13)

em que $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0$ são pequenas tolerâncias positivas.

A definição de um novo ponto depende diretamente das direções de movimento e comprimento de passo nesta direção, sendo definido através de:

$$(x^{k+1}; z^{k+1}; w^{k+1}; s^{k+1}; y^{k+1}) = (x^k + \alpha_k^P d_x^k, z^k + \alpha_k^P d_z^k, w^k + \alpha_k^D d_w^k, s^k + \alpha_k^D d_s^k, y^k + \alpha_k^D d_y^k) \quad (2.14)$$

Em que $\alpha_k^P > 0$, é o comprimento de passo das variáveis primais e $\alpha_k^D > 0$, é o comprimento de passo das variáveis duais, e $d_x^k, d_z^k, d_w^k, d_s^k, d_y^k$ são as direções de busca.

As direções do passo previsor são determinadas utilizando o método de Newton, considerando uma aproximação linear de primeira ordem por série de Taylor das condições de KKT, apresentadas de (2.4) a (2.10), sobre o novo ponto definido em (2.14), sem considerar ainda o comprimento do passo. Assim, tem-se as seguintes direções do passo previsor, que serão apresentadas no passo 4 do algoritmo da seção 2.3:

$$d_x^k = \theta_k (A^T d_w^k + p^k - u^k) \quad (2.15)$$

$$d_z^k = -d_x^k + f^k \quad (2.16)$$

$$d_w^k = (A\theta_k A^T)^{-1} [A\theta_k (-p^k + u^k) + t^k] \quad (2.17)$$

$$d_s^k = X_k^{-1} (v^k - S_k d_x^k) \quad (2.18)$$

$$d_y^k = Z_k^{-1} (q^k - Y_k d_z^k) \quad (2.19)$$

em que $\theta_k = (X_k^{-1} S_k + Z_k^{-1} Y_k)^{-1}$, e $p^k = Z_k^{-1} (Y_k f^k - q^k) + X_k^{-1} v^k$.

As direções do passo corretor, por sua vez, consideram aproximações de segunda ordem sobre os resíduos relacionados às condições de complementaridade, q^k e v^k , os quais são redefinidos utilizando as direções de busca $(d_x^k; d_z^k; d_w^k; d_s^k; d_y^k)$ determinadas no passo previsor do método, para obter os novos resíduos do passo corretor $\tilde{q}^k$ e $\tilde{v}^k$, vistos no passo 5 do algoritmo 2.3, e calculados da seguinte forma:

$$\tilde{v}^k = \mu_k e - X_k S_k e - D_x^k D_s^k \quad (2.20)$$

$$\tilde{q}^k = \mu_k e - Z_k Y_k e - D_z^k D_y^k \quad (2.21)$$

em que: $D_x^k = \text{Diag}(d_x^k)$, $D_s^k = \text{Diag}(d_s^k)$, $D_z^k = \text{Diag}(d_z^k)$, e $D_y^k = \text{Diag}(d_y^k)$.

Desta forma, obtemos através do método de newton, como no passo previsor, as novas direções do passo corretor $(\tilde{d}_x^k; \tilde{d}_z^k; \tilde{d}_w^k; \tilde{d}_s^k; \tilde{d}_y^k)$, que podem ser vistas no passo 6 do algoritmo 2.3:

$$\tilde{d}_x^k = \theta_k (A^T \tilde{d}_w^k + p^k - u^k) \quad (2.22)$$

$$\tilde{d}_w^k = (A\theta_k A^T)^{-1} [A\theta_k (-p^k + u^k) + t^k] \quad (2.23)$$

$$\tilde{d}_z^k = -\tilde{d}_x^k + f \quad (2.24)$$

$$\tilde{d}_s^k = X_k^{-1} (\tilde{v}^k - S_k \tilde{d}_x^k) \quad (2.25)$$

$$\tilde{d}_y^k = Z_k^{-1}(\tilde{q}^k - Y_k \tilde{d}_z^k) \quad (2.26)$$

O comprimento do passo, apresentado no passo 8 do algoritmo citado, referente às variáveis primais e duais do problema, são calculados da seguinte maneira baseando-se em [4]:

$$\bullet \quad \alpha_k^P = \min \left\{ 1, \min \left\{ \frac{-\alpha x_i}{\tilde{d}x_i} / \tilde{d}x_i < 0 \right\}, \min \left\{ \frac{-\alpha z_i}{\tilde{d}z_i} / \tilde{d}z_i < 0 \right\} \right\} \quad (2.27)$$

$$\bullet \quad \alpha_k^D = \min \left\{ 1, \min \left\{ \frac{-\alpha s_i}{\tilde{d}s_i} / \tilde{d}s_i < 0 \right\}, \min \left\{ \frac{-\alpha y_i}{\tilde{d}y_i} / \tilde{d}y_i < 0 \right\} \right\} \quad (2.28)$$

em que $0 < \alpha < 1$.

Assim, definem-se os passos de 1 a 9 do algoritmo PDBB a seguir, de acordo com [7]. Este algoritmo é complementado no passo 10 pelo método *branch-and-bound*, que é usado para integralizar as soluções relaxadas obtidas pelo método primal-dual, baseando-se em [1], [2] e [6].

2.1 Algoritmo previsor-corretor primal-dual e *branch-and-bound* (PDBB)

Passo 1: Ajustar $k = 0$ e encontrar uma solução inicial $(x^0; z^0; w^0; s^0; y^0) \in P \times D$, ou seja, uma solução inicial factível. Seja $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 > 0$ pequenas tolerâncias positivas auxiliares ao passo 2 do algoritmo.

Passo 2: Testar a otimalidade de solução: Se o critério de parada definido de (2.11) à (2.13) é atingido então vá para o passo 10, pois a solução relaxada x^k, z^k, w^k, s^k, y^k obtida é ótima. Caso contrário, continue.

Passo 3: Fazer os cálculos intermediários do passo previsor.

Passo 4 : Calcular as direções $d_x^k, d_z^k, d_w^k, d_s^k$ e d_y^k do passo previsor, definidas de (2.15) à (2.19).

Passo 5: Fazer os cálculos intermediários do passo corretor, atualizando os termos de segunda ordem das folgas complementares vistos em (2.20) e (2.21)

Passo 6 : Atualizar as direções $\tilde{d}_x^k, \tilde{d}_z^k, \tilde{d}_w^k, \tilde{d}_s^k$ e $\tilde{d}_y^k$ do passo corretor, definidas de (2.22) à (2.26).

Passo 7: Testar a ilimitariedade: Se $t^k = 0, f^k = 0, \tilde{d}_x^k, \tilde{d}_z^k > 0$, e $c^t \tilde{d}_x^k < 0$, então o problema primal é ilimitado. Se $g^k = 0, \tilde{d}_w^k, \tilde{d}_s^k, \tilde{d}_y^k > 0$ e $b^t \tilde{d}_w^k > 0$, então o problema dual é ilimitado. Se ambos os casos acontecem, então PARE e vá para o passo 10. Se $\tilde{d}_x^k, \tilde{d}_z^k, \tilde{d}_w^k, \tilde{d}_s^k, \tilde{d}_y^k = 0$, então também PARE, x^k, z^k, w^k, s^k, y^k são soluções ótimas dos problemas primal e dual, respectivamente. Caso contrário ir para o passo 8.

Passo 8: Calcular os comprimentos dos passos primal e dual, através de (2.27) e (2.28).

Passo 9: Determinar uma nova solução:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k^P \tilde{d}_x^k, z^{k+1} = z^k + \alpha_k^P \tilde{d}_z^k, w^{k+1} = w^k + \alpha_k^D \tilde{d}_w^k, s^{k+1} = s^k + \alpha_k^D \tilde{d}_s^k, e y^{k+1} = y^k + \alpha_k^D \tilde{d}_y^k$$

Atualizar $k \leftarrow k+1$ e ir para o Passo 2.

Passo 10: Método *Branch-and-Bound*

Para cada x_i , se $x_i \geq 0.85$ assumo $x_i = 1$, o que implica que a variedade i será plantada no talhão j , e faça $x_h = 0, h \neq i$, para $h = 1, \dots, k$ em todos os h 's restantes e $j = 1, \dots, n$. (em que h é número de variedades e j é o número de talhões, e ambos são informados pelo usuário de acordo com o modelo em questão). Para as variáveis restantes, diferentes de 0 ou 1, percorra todos os nós cujas componentes x_i 's que ainda não atenderam o critério de integralidade ($0 < x_i < 0.85$), de tal forma que somente uma componente assumo o valor 1 para cada nível da árvore, verificando a viabilidade e a otimalidade. Armazene sempre o menor valor da função objetivo encontrado. Um fluxograma que detalha os procedimentos a serem feitos no passo 10 é visto em [2], [3] e [5].

O algoritmo PDBB é definido através de um procedimento envolvendo os métodos primal-dual e *branch-and-bound* e é proposto para a resolução dos modelos definidos na seção 3, da seguinte forma:

- i) Os passos de 1 a 9 resolvem o modelo relaxado para as variáveis limitadas superiormente $0 \leq x_i \leq u_i$;
- ii) O passo 10, que utiliza o método *branch-and-bound*, integraliza a variável x_i ($x_i = 0$ ou $x_i = u_i = 1$) para cada nível da árvore. A variável $x_i = 1$ implica que a variedade i deverá ser plantada em um talhão j .

3 Modelagem Matemática

De modo geral, o modelo apresentado nesta seção visa a minimização do custo da colheita da cana-de-açúcar, considerando as áreas mecanizáveis e semi-mecanizáveis. Um modelo de minimização de colheita da cana-de-açúcar é apresentado por [8], que considera as áreas de plantio mecanizáveis e semi-mecanizáveis, porém sem a divisão em talhões. Assim, um variante deste modelo é apresentado por [9], o qual considera em sua formulação, as áreas mecanizáveis e semi-mecanizáveis divididas em talhões. Para a resolução deste modelo são necessárias técnicas de programação inteira 0-1 (binária) para obter-se a solução ótima do problema. Desta forma, o modelo apresentado a seguir, baseando-se em [9], é equivalente ao problema (1.1), definido na seção 1.

3.1 Modelo – Minimização do custo de coleta da cana-de-açúcar

O problema consiste em determinar quais das n variedades i devem ser plantadas nos k talhões j de medida L_j (ha) e distância D_j (Km) do centro de produção ($j=1,2,...,k$) e, que ofereça o menor custo possível para o processo de colheita e de transporte da cana-de-açúcar do campo para a usina. Para formulação do modelo, a área para plantio foi dividida em duas partes, uma parte para plantio da cana que será colhida crua (l talhões) e outra para cana que deverá ser queimada na pré-colheita ($(k-l)$ talhões), devido aos diferentes custos para cada tipo de colheita.

Para a formulação da função objetivo do modelo são feitos os cálculos dos custos envolvidos no processo, baseando-se em [8] e [9]. Na colheita de cana queimada têm-se os custos de aceiro, queima, corte manual, carregamento da cana para o caminhão e transporte da cana do campo para a usina. Na colheita mecanizada têm-se os custos de corte e transporte da cana do campo para a usina.

O custo de transporte da variedade i plantada no talhão j (Ct_{ij}) a uma distância (D_j) do talhão j para a usina:

$$Ct_{ij} = c_{med_i} \cdot D_j \quad (3.1)$$

Em que: $i = 1, 2, \dots, n$ são os índices que representam as variedades; $j = 1, 2, \dots, k$ são os índices que representam os talhões; c_{med_i} é o custo médio do transporte da cana por km; e D_j é a distância do talhão j do centro de processamento, em talhões.

O custo C_{ij}^{SM} de colheita e transporte da cana-de-açúcar de variedade i plantada no talhão j no sistema semi-mecanizado é calculado da seguinte forma:

$$C_{ij}^{SM} = (Ca_i + Cq_i + Cco_i + Cca_i + Ct_{ij}). L_j \quad (3.2)$$

Em que: Ca_i é o custo de aceiro da variedade i ($R\$.ha^{-1}$); Cq_i é o custo da queima da variedade i ($R\$.ha^{-1}$); Cco_i é o custo de corte da variedade i ($R\$.ha^{-1}$); Cca_i é o custo de carregamento da variedade i ($R\$.ha^{-1}$); Ct_{ij} é o custo de transporte da variedade i plantada no talhão j ($R\$.ha^{-1}$), calculado em (2.1); e L_j é área do talhão j , em hectare.

No sistema mecanizado o custo, C_{ij}^M , de colheita e transporte da cana de variedade i plantada no talhão j , é calculado da seguinte forma:

$$C_{ij}^M = (Cco_i + Ct_{ij}). L_j \quad (3.3)$$

Em que: Cco_i é o custo de corte da variedade i ($R\$.ha^{-1}$); Ct_{ij} é o custo de transporte da variedade i plantada no talhão j ($R\$.ha^{-1}$), calculado em (2.1); e L_j é área do talhão j , em hectare.

A partir dos cálculos (3.2) e (3.3), é proposta a função objetivo do modelo que visa o menor custo possível no processo de colheita. Para a eficiência do modelo, deve-se satisfazer as restrições de sacarose e de fibra da cana (recomendações da empresa para manter a qualidade da cana e a demanda de açúcar e álcool) e usar toda a área destinada para o plantio da cana (mecanizada e semi-mecanizada). Este modelo é definido a seguir:

$$\text{Minimizar } CCT = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^l C_{ij}^M X_{ij} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=l+1}^k C_{ij}^{SM} X_{ij} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeito a: } & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k A_i X_{ij} \geq \overline{PT}; \\ & \overline{F}_l T \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k F_i X_{ij} \leq \overline{F}_s T; \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ij} = 1;$$

$$X_{ij} = 0 \text{ ou } 1, i = 1, 2, \dots, n \text{ e } j = 1, 2, \dots, k$$

Em que: CCT é o custo do processo de colheita e transporte da cana de açúcar; $i = 1, 2, \dots, n$ são os índices que representam as variedades, $j = 1, 2, \dots, k$ são os índices que representam os talhões; l é número de talhões em que se considera o sistema

mecanizado; $k - l$ é o número de talhões em que se considera o sistema semi-mecanizado; C_{ij}^M é o custo da colheita e do transporte da cana de variedade i plantada no talhão j ($j=1, \dots, l$), no sistema mecanizado; C_{ij}^{SM} é o custo da colheita e do transporte da cana de variedade i plantada no talhão j ($j=l+1, \dots, k$), no sistema semi-mecanizado; X_{ij} são as variáveis de decisão, tais que, $X_{ij} = 1$ implica que a cana de variedade i deve ser plantada no talhão j e em caso contrário $X_{ij} = 0$; A_i é a estimativa de produção de sacarose da variedade i (t/ha); $\bar{P}$ é a quantidade mínima estabelecida para a POL da cana; T é o número total de talhões; F_i é a estimativa do teor de fibra da variedade i ; $\bar{F}_l$ e $\bar{F}_s$ são as quantidades mínimas e máximas estabelecidas para a fibra da cana.

Com o intuito de utilizar mais variedades, inseriu-se ao modelo uma restrição que limita a quantidade que cada tipo de variedade pode ser plantada.

$$\sum_{j=1}^k X_{ij} \leq M \quad (3.6)$$

Em que: M é o número máximo que cada variedade i pode ser plantada.

4 Resultados

Para a aplicação do método aos modelos investigados foram utilizados dados necessários das tabelas 1, 2 e 3, apresentadas por [8] e [9]. A tabela 1 apresenta a área e a distância dos talhões à usina. A tabela 2 apresenta os custos referentes ao processo de colheita. A tabela 3 apresenta os custos referentes ao processo de transporte. E por fim, a tabela 4 apresenta as estimativas por tipo de variedades, em que A_i é a produtividade de açúcar fermentescível (POL) da variedade i , F_i é a produtividade de fibra da variedade i e P_c é a produtividade da cana-de-açúcar da variedade i . A seguir, têm-se as tabelas 1, 2, 3 e 4:

Tabela 1: Área e distância dos talhões até a usina

Dados dos Talhões							
Talhãoj	1	2	3	4	5	6	7
Lj	8,490	4,520	0,000	4,220	5,740	6,610	30,410
Dj	3,490	2,490	16,080	3,490	2,590	2,590	15,330
Talhãoj	9	10	11	12	13	14	15
Lj	12,010	54,950	0,000	3,780	10,430	6,150	8,790
Dj	9,240	12,630	16,430	8,250	7,800	8,590	2,250

Tabela 2: Custos envolvidos no processo de colheita

Custos Colheita	
Operação	Custo
Aceiro	0,14
Queima	0,17
Corte	7,03
Corte cana crua	10,5
Carregamento	1,62

Tabela 3: Custos envolvidos no processo de transporte

Custos Transporte	
Transporte	Custo
Cana crua	6,42
Cana queimada	5,35

Tabela 4: Estimativas de valores por variedade

Dados das variedades				
i	Variedade	Ai	Fi	Pc
1	SP80-1816	16,420	13,940	100,000
2	RB72454	20,400	12,900	186,000
3	SP80-3280	18,460	12,630	158,000
4	SP81-3250	18,380	11,320	179,000
5	RB855536	17,050	12,510	165,000
6	RB855113	17,540	10,910	155,000
7	SP79-1011	15,800	10,330	158,000
8	RB835486	12,840	9,280	155,000
9	RB711406	20,770	16,120	183,000
10	SP70-1143	15,010	11,590	155,000

Através da implementação do algoritmo PDBB, visto na seção (1.1), no *software* Borland C++ Builder 6.0, pode-se obter as soluções ótimas do modelo apresentado na seção (2.1), e estes resultados foram comparados com aqueles obtidos pelo aplicativo *Solver* do *software* Excel, que para o caso específico a resolução de problemas lineares do tipo inteiro e binário, utiliza o método simplex, e com aqueles obtidos por [9], cuja obtenção de resultados é realizada a partir da utilização de algoritmos genéticos. Nas tabelas de 5 e 6 são apresentados os resultados reais e inteiros obtidos a partir da aplicação do algoritmo PDBB, proposto na seção 1.1. Estas representam os valores reais obtidos pelos passos de 1 a 9 do algoritmo PDBB, e indicam quais índices devem ser ramificados. Na coluna “Passo 10 Método PDBB” estão indicadas as variedades para plantio, encontrada pelo passo 10 do método. E ainda, a tabela 5 é referente ao modelo, apresentado em [9], e a tabela 6, é referente a este mesmo modelo, mas acrescentando neste, a nova restrição (3.6), apresentada na seção (3.1), em sua formulação. Foram definidos os talhões 3 e 11 para áreas semi-mecanizáveis, e os demais para as áreas

mecanizáveis. A tabela 7 exibe a comparação entre os resultados obtidos por [9], pelo Solver e pelo algoritmo PDBB.

Tabela 5: Resultados obtidos

Método PDBB - Resultados da minimização do custo da colheita da cana-de-açúcar										
Áreas mecanizáveis										
Talhão	Variedades									
	SP80-1816	RB72454	SP80-3280	SP81-3250	RB855536	RB855113	SP79-1011	RB835486	RB711406	SP70-1143
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,953298	0,003719	0,005728	0,004076	0,005043	0,006084	0,005729	0,006080	0,003862	0,006079
2	0,914294	0,006971	0,010760	0,007646	0,009468	0,011432	0,010762	0,011418	0,007237	0,009710
4	0,918444	0,000229	0,011792	0,007508	0,009755	0,011555	0,010514	0,010634	0,007529	0,011737
5	0,931309	0,005482	0,008443	0,006009	0,007434	0,008968	0,008445	0,008959	0,005691	0,008956
6	0,939954	0,004784	0,007378	0,005245	0,006493	0,007837	0,007379	0,007831	0,004967	0,007829
7	0,986698	0,001087	0,001586	0,001173	0,001412	0,001678	0,001586	0,001677	0,001122	0,001677
8	0,922552	0,006184	0,009525	0,006779	0,008386	0,010117	0,009527	0,010106	0,006419	0,010102
9	0,966958	0,002640	0,004035	0,002887	0,003559	0,004282	0,004035	0,004281	0,002739	0,004279
10	0,991983	0,000684	0,000925	0,000722	0,000836	0,000974	0,000925	0,000974	0,000699	0,000974
12	0,894922	0,008375	0,012947	0,009189	0,011387	0,013759	0,012950	0,013740	0,008693	0,013733
13	0,962241	0,003015	0,004619	0,003299	0,004072	0,004903	0,004619	0,004901	0,003128	0,004899
14	0,935684	0,005129	0,007904	0,005622	0,006958	0,008396	0,007905	0,008388	0,005325	0,008385
15	0,954965	0,003588	0,005522	0,005622	0,004862	0,005864	0,005522	0,005860	0,003725	0,005859
16	0,993012	0,000619	0,000791	0,000646	0,000726	0,000827	0,000791	0,000827	0,000630	0,000827
Áreas semi-mecanizáveis										
Talhão	Variedades									
	SP80-1816	RB72454	SP80-3280	SP81-3250	RB855536	RB855113	SP79-1011	RB835486	RB711406	SP70-1143
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0,997936	2,321E-5	0,000189	3,267E-5	7,024E-5	0,000403	0,000189	0,000411	2,690E-5	0,000416
11	0,987319	0,001041	0,001508	0,001121	0,001345	0,001594	0,001508	0,001594	0,001073	0,001594

Temos que o valor da função objetivo encontrada pelo método PDBB obtidos pelos passos de 1 a 9, em 11 iterações, é de aproximadamente R\$345.586,34688. A partir da tabela 5, nenhuma ramificação deverá ser feita, visto que sem a integralização do método pelo passo 10, os valores apresentados na primeira coluna em destaque, são valores acima de 0,85. Pela coluna “Passo10 Método PDBB”, é possível notar que o método PDBB integralizou os resultados pelo passo 10, determinando a plantação da variedade 1-SP80-1816 em todos os talhões e obteve uma melhoria no custo da minimização da colheita que passou a ser: R\$341.654,54718.

Tabela 6: Resultados obtidos

Método PDBB - Resultados da minimização do custo da colheita da cana-de-açúcar										
Áreas mecanizáveis										
Talhão	Variedades									
	SP80-1816	RB72454	SP80-3280	SP81-3250	RB855536	RB855113	SP79-1011	RB835486	RB711406	SP70-1143
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,004818	0,036716	0,157798	0,046060	0,094411	0,158676	0,153034	0,152901	0,040547	0,155037
2	0,004876	0,062921	0,120656	0,076517	0,132035	0,146579	0,115501	0,141568	0,069123	0,130224
4	0,004875	0,001019	0,001552	0,070596	0,138900	0,195352	0,158443	0,160072	0,072716	0,196475
5	0,004901	0,050955	0,137786	0,062631	0,114928	0,148884	0,132979	0,144459	0,056036	0,146442
6	0,004902	0,045452	0,146318	0,056339	0,108141	0,151706	0,141432	0,146811	0,050075	0,148825
7	0,011555	0,010952	0,096042	0,014068	0,032845	0,247742	0,094982	0,237151	0,012130	0,242533
8	0,004889	0,056022	0,129975	0,068283	0,119960	0,146736	0,125292	0,142695	0,061492	0,144656
9	0,004073	0,026822	0,159250	0,034027	0,074270	0,176097	0,155326	0,168940	0,029675	0,171521
10	0,953917	0,003423	0,005879	0,003875	0,005143	0,006095	0,005872	0,006093	0,003607	0,006097
12	0,004843	0,069143	0,111951	0,082216	0,127888	0,141811	0,107673	0,138572	0,075438	0,140465
13	0,004542	0,030543	0,161164	0,038598	0,082434	0,167627	0,156807	0,161079	0,03377	0,163434

14	0,004904	0,048215	0,142065	0,059517	0,111723	0,150200	0,137209	0,145549	0,053072	0,147545	6 (RB855113)
15	0,004791	0,035611	0,158820	0,044735	0,092405	0,159947	0,154105	0,154044	0,039336	0,156207	8 (RB835486)
16	0,956247	0,003183	0,005577	0,003598	0,004792	0,005893	0,005572	0,005892	0,003352	0,005895	1 (SP80-1816)
Áreas semi-mecanizáveis											
Talhão	Variedades										Passo 10 Método PDBB
	SP80-1816	RB72454	SP80-3280	SP81-3250	RB855536	RB855113	SP79-1011	RB835486	RB711406	SP70-1143	Variedade a ser plantada
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
3	0,953044	0,003965	0,005989	0,004490	0,005804	0,005519	0,005979	0,005512	0,004181	0,0055172	1 (SP80-1816)
11	0,068161	0,010089	0,088249	0,012958	0,030225	0,236129	0,087362	0,225880	0,011171	0,229776	10 (SP70-1143)

Para o modelo com restrição de plantio de variedade, o valor da função objetivo encontrada pelo método PDBB obtidos pelos passos de 1 a 9, em 21 iterações, é de aproximadamente R\$431.395,40287. De acordo com a tabela 6, o método PDBB nos passos de 1 a 9 determinou diretamente apenas a plantação da variedade 1 em 3 talhões (3, 10 e 16), e para a determinação do plantio nos demais talhões, foi necessária a ramificação através do passo 10 do método PDBB para a integralização dos resultados.

Assim, a partir da solução real encontrada, realizou-se o passo 10 do método PDBB, que após 9 iterações, integralizou os resultados e determinou o plantio da variedade 1-SP80-1816 para os talhões 3, 10 e 16, da variedade 3 – SP80-32801 nos talhões 2, 4 e 12, da variedade 6 – RB855113 nos talhões 9, 13 e 14, da variedade 7 – SP79-1011 no talhão 8, da variedade 8 – RB835486 nos talhões 5, 6 e 15, e da variedade 10 – SP70-1143 nos talhões 1, 7, e 11, que são apresentados na coluna “Passo 10 Método PDBB”. Neste caso, também houve uma melhoria no custo da minimização da colheita que passou a ser: R\$ 422.584,03702.

Note que o valor da função objetivo deste problema comparada à tabela 5, aumentou cerca de R\$85.809,05, devido à restrição do número de variedades para o plantio nos talhões. Isso também justifica o aumento de iterações para os passos de 1 a 9 do método PDBB.

A tabela 7 a seguir, estão os valores ótimos das funções objetivo encontrados, cuja linha “AG” corresponde ao melhor resultado obtido por [9], a partir da utilização de algoritmos genéticos para a obtenção de resultados, a linha “Solver” corresponde ao resultados obtidos pelo programa citado, que utiliza o método simplex e a linha “PDBB” correspondem aos resultados obtidos através da implementação em C++ do procedimento híbrido envolvendo o algoritmo previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound* (PDBB).

Tabela 7: Comparação de resultados

Valores da função objetivo (R\$)		
Procedimento	Modelo sem restrição de variedades	Modelo com restrição de variedades
AG	472.305,59	-----
Solver	341.654,547178	422.584,0370180
PDBB	341.654,547184	422.584,0370179

Nesta tabela, é possível notar que os resultados obtidos pelos procedimentos Solver e PDBB se diferenciam apenas a partir da quinta ou sexta casa decimal, e são considerados melhores que aqueles obtidos pelo procedimento AG, cujo valor da função objetivo sem a restrição adicional, que limita o plantio de variedades nos talhões, é superior aos resultados obtidos pelos demais procedimentos quando consideram esta restrição.

5 Considerações Finais

Neste trabalho fez-se uma aplicação de um procedimento híbrido envolvendo os métodos previsor-corretor primal-dual de pontos interiores e *branch-and-bound* no modelo de minimização do custo da colheita da cana-de-açúcar, que considera áreas mecanizáveis e semi-mecanizáveis, apresentado por [9]. Explorou-se uma nova restrição na formulação do modelo, que incluía a restrição de quantidades de variedades destinadas ao plantio.

Os resultados obtidos mostram a eficiência do algoritmo PDBB implementado no software Borland C++ Builder 6.0, quando comparado àqueles obtidos pelo aplicativo Solver do *software* Excel, que utiliza o método simplex, bem como àqueles apresentados em [9], que utilizou algoritmos genéticos para a resolução do modelo apresentado na seção 3.1. Além disso, estes incentivam a utilização destes métodos para outros modelos.

5.1 Trabalhos Futuros

O trabalho proposto e em desenvolvimento encontra-se em fase intermediária de execução. Como proposta futura, pretende-se investigar o procedimento híbrido

aplicado ao modelo de maximização de energia envolvido no processo de aproveitamento da biomassa residual da cana-de-açúcar.

6 Agradecimentos

Agradecemos à CAPES pela Bolsa de Mestrado.

Referências Bibliográficas

- [1] BAZARAA, Mokhtar. S. and SHETTY, C. “*Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*”. John-Wiley & Sons, Inc., (1979).
- [2] BORCHES, Brian and MITCHELL, John E. *Using an interior point method in a branch and bound algorithm for integer programming*. Technical Report 195, Mathematical Sciences, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY 12180, March 1991, Revised July 7, (1992).
- [3] FLORENTINO, Helenice Oliveira. *Programação linear inteira em problemas de aproveitamento da biomassa residual de colheita da cana-de-açúcar*. 64f. Tese (Livre Docência) – Instituto de Biociências de Botucatu – Universidade Estadual Paulista, Botucatu, SP, (2006).
- [4] GRANVILLE, S., *Optimal Reactive Dispatch Through Interior Point Methods*. IEEE Transactions on Power Systems, v.9, p.136-146, 1994.
- [5] HOMEM, Thiago Pedro Donadon. *Procedimento híbrido envolvendo os métodos Primal-Dual de Pontos Interiores e Branch-and-Bound em problemas multiobjetivo de aproveitamento de resíduos de cana-de-açúcar*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia – Universidade Estadual Paulista. Bauru, (2010).
- [6] HOMEM, Thiago Pedro Donadon, BALBO, Antonio Roberto and FLORENTINO, Helenice Oliveira. *Optimal energy generation with biomass of sugarcane harvest*. Revista IEEE América Latina, v.1, p. 653-658, (2011).
- [7] PELLEGRINI, Maria Cristina. *Inserção de centrais cogeneradoras a bagaço de cana no parque energético do Estado de São Paulo: exemplo de aplicação de metodologia para análise dos aspectos locais e de integração energética*. Dissertação (Mestrado em Energia) – Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, (2002).

- [8] RAMOS, Rômulo Pimentel. *Modelo matemático para custo e energia na produção de açúcar e álcool*. Dissertação (Mestrado em Agronomia/Energia na Agricultura) – Faculdade de Ciências Agronômicas – Universidade Estadual Paulista. Botucatu, (2010).
- [9] SILVA, Leandro M. *Algoritmo Genético na Otimização do Custo de Colheita e de Transporte da Cana-de-Açúcar*. Dissertação (Mestrado em Biometria) – Faculdade de Ciências Agronômicas – Universidade Estadual Paulista. Botucatu, (2011).
- [10] SOUZA, M. A. S., *Investigação e aplicação de métodos primal - dual de pontos interiores em problemas de despacho econômico e ambiental*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia – Universidade Estadual Paulista. Bauru, (2010).
- [11] TOLENTINO, Gilmar. *Programação Linear Inteira Aplicada ao Aproveitamento do Palhiço da Cana-de-Açúcar*. Dissertação (Mestrado em Agronomia/Energia na Agricultura) – Faculdade de Ciências Agronômicas – Universidade Estadual Paulista, Botucatu, SP, (2007).