



**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 14, fev. 2019
Edição Ermac

Matheus dos Santos Guzella
UFVJM – Universidade Federal
dos Vales do Jequitinhonha e
Mucuri
matheusguzella@gmail.com

Luiz Eduardo Czelusniak
USP – Universidade de São
Paulo
luizedu.cze@gmail.com

Vinicius Pessoa Mapelli
USP – Universidade de São
Paulo
viniciusmapelli@gmail.com

Gustavo dos Santos Ribeiro
USP – Universidade de São
Paulo
gustavo.srbr@gmail.com

Luben Cabezas-Gómez
USP – Universidade de São
Paulo
lubencg@sc.usp.br

Simulação numérica tridimensional da ascensão de uma bolha e da coalescência vertical de duas bolhas em um meio líquido

Three-dimensional numerical simulation of the bubble rise and the
vertical coalescence of two bubbles in a liquid

Resumo

O método de Lattice Boltzmann (LB) tem atraído muita atenção nos últimos anos para simulação de escoamentos isotérmicos e não isotérmicos. Os problemas envolvendo escoamentos multifásicos têm sido tratados com o método LB usando diferentes metodologias. Neste artigo, emprega-se o método LB dos pseudopotenciais para simulação tridimensional de uma bolha isotérmica ascendente e da coalescência vertical de duas bolhas, ambas em um meio líquido. Inicialmente, o método numérico é descrito e explicado. Posteriormente o mesmo é empregado para simular o problema de uma bolha estática, evidenciando a presença de velocidades espúrias (não nulas) próximas à interface. Posteriormente, simula-se o problema da bolha ascendente em um meio líquido por ação da força de empuxo. Por fim, simulações da coalescência vertical de duas bolhas em um meio líquido são realizadas. Os resultados das simulações são apresentados em termos de parâmetros adimensionais associados aos problemas estudados. Os resultados demonstram a eficiência do método em simular o problema da ascensão de uma bolha isotérmica em um meio líquido.

Palavras-chave: Bolhas. Método de Lattice Boltzmann. Métodos Numéricos e Aplicações.

Abstract

The Lattice Boltzmann (LB) method has attracted a great deal of attention in recent years for the simulation of isothermal and non-isothermal flows. The problems involving multiphase flows have been treated with the LB method using different methodologies. In this article, the LB method of pseudopotentials is used for three-dimensional simulation of an ascending isothermal bubble and the vertical coalescence of two bubbles, both in a liquid medium. Initially, the numerical method is described and explained. Later it is used to simulate the problem of a static bubble, evidencing the presence of spurious (non-zero) velocities close to the interface. Subsequently, the problem of the bubble rise is simulated in a liquid medium by the action of the buoyancy force. Finally, simulations of the vertical coalescence of two bubbles in a liquid medium are performed. The results of the simulations are presented in terms of dimensionless parameters associated to the problems. The results demonstrate the efficiency of the method to simulate the problem of ascending an isothermal bubble in a liquid medium.

Keywords: Bubbles. Lattice Boltzmann Method. Numerical Methods and Applications.



1 Introdução

Nas últimas décadas, o método de Lattice Boltzmann surgiu como uma técnica nova e efetiva para simulações de escoamento de fluidos e transferência de calor. Por basear-se em conceitos da teoria cinética dos gases e por ser composto somente por operações algébricas locais, ele tem atraído grande atenção na literatura para solução dos mais diversos problemas. De acordo com Wolf-Gladrow (2000), a relação entre a equação de Boltzmann e as equações de Navier-Stokes tornou-se um tema de pesquisa muito popular na comunidade acadêmica. A equação de Boltzmann relaciona a evolução temporal e espacial de um conjunto de partículas com um determinado operador de colisão. Dentre as vantagens do método sobre as técnicas tradicionais de dinâmica dos fluidos computacional podem ser citadas a facilidade de paralelização do algoritmo, a redução do custo computacional envolvido na correção da pressão via equação de Laplace e a facilidade de captura de interfaces. Como desvantagens citam-se a limitação do incremento de tempo (por se tratar de um método explícito no tempo) e a degradação da estabilidade do método para valores baixos ou elevados do parâmetro de relaxação temporal.

O método de Lattice Boltzmann tem sido empregado, com sucesso, para modelagem e simulação de diversos problemas em distintas áreas. Por exemplo, este método foi empregado por Pattison et al (2008) para realizar simulações em magnetohidrodinâmica, especificamente para aplicações de escoamentos em regime permanente com baixo número de Prandtl magnético. Problemas de transferência de calor conjugada, ou seja, problemas em que a condução de calor no sólido e a convecção no fluido são estudadas de forma acoplada em um único domínio têm sido amplamente estudados utilizando o método de Lattice Boltzmann. Por exemplo, Tarokh, Mohamad e Jiang (2013) realizaram um estudo da transferência de calor conjugada em um trocador de calor contra-corrente. A contribuição desse artigo foi demonstrar que o problema de transferência de calor conjugada pode ser simulado utilizando somente uma função de distribuição para a equação da energia para ambos os domínios. Segundo os autores, dessa forma, a continuidade do fluxo de calor na interface é garantida automaticamente. Wang, J., Wang, M. e Li (2007) realizaram um estudo semelhante, porém propuseram uma implementação generalizada do termo de geração de energia por unidade de volume no interior do sólido. Os resultados do modelo desenvolvido foram comparados com resultados de modelos disponíveis na literatura e a acurácia e a eficiência do modelo dos autores foi confirmada.

O modelo dos pseudopotenciais, conhecido como Modelo Shan-Chen (SHAN; CHEN, 1993), baseia-se na incorporação de uma força repulsiva entre partículas, levando à separação das fases. Este método tem sido empregado com muita frequência na literatura para simulação de escoamentos multifásicos, principalmente devido à sua simplicidade. De acordo com Huang, Krafczyk e Lu (2011), o modelo dos pseudopotenciais é um modelo eficiente para simulação de problemas envolvendo escoamentos multifásicos, mas não é possível ajustar a tensão superficial, a razão de densidade e a razão de viscosidade dos fluidos de forma independente. Parte dos parâmetros envolvidos nas simulações deve ser obtida por experimentos numéricos.

Diversos trabalhos foram publicados na literatura utilizando o método dos pseudopotenciais. Por exemplo, Chang, Huang e Lu (2017) realizaram um estudo numérico tridimensional do crescimento de uma bolha em um meio líquido quiescente. As simulações foram realizadas utilizando o método de Lattice Boltzmann híbrido, no qual a equação do momentum é resolvida pelo método de Lattice Boltzmann e a equação da energia é resolvida pelo método de Runge-Kutta. Dessa forma, de acordo com os autores, é possível evitar o

surgimento de correntes espúrias típicas da simulação deste tipo de problema. O estudo realizado compreendeu dois estágios de crescimento de bolhas em um meio líquido quiescente: crescimento isotérmico e isobárico. O primeiro está associado à dominância de forças de inércia, uma vez que a pressão no interior da bolha é muito elevada. Neste caso, o efeito da transferência de calor pode ser desprezado. Para o segundo, após o crescimento da bolha, a pressão e temperatura no interior da mesma são reduzidas. Assim, o efeito de inércia pode ser desprezado e o crescimento da bolha se dá à pressão constante, dependendo principalmente da transferência de calor a partir do líquido superaquecido. Os resultados numéricos foram comparados com relações analíticas disponíveis na literatura, para cada um dos casos, Equação de Rayleigh-Plesset (BRENNEN, 1993) e Lei D^2 de evaporação de uma gota (KUO, 1986). A comparação dos resultados revelou que o Método de Lattice Boltzmann forneceu excelentes resultados para a simulação das duas fases de crescimento de uma bolha em um meio líquido quiescente.

O objetivo deste artigo é a aplicação do método de Lattice Boltzmann dos pseudopotenciais para realizar simulações da ascensão de uma bolha isotérmica em um meio líquido. Inicialmente realizam-se simulações de uma bolha de vapor estática no meio líquido. Estas simulações são realizadas para verificar a presença de velocidades espúrias na interface líquido-vapor, típicas do desbalanceamento da tensão superficial na interface. Esta simulação permite obter a tensão superficial, por meio da Equação de Laplace. Posteriormente, por efeito da força de empuxo, simula-se a ascensão da bolha no meio líquido, obtendo-se os campos de densidade, velocidade e pressão ao longo do tempo. Por fim, resultados da coalescência vertical de duas bolhas são simuladas utilizando-se o método numérico. Esta simulação é importante por estar diretamente associada a fenômenos que ocorrem durante a formação de bolhas em superfícies aquecidas.

O presente artigo é estruturado da seguinte forma: apresenta-se detalhadamente o modelo matemático e a metodologia numérica empregada, resultados dos problemas mencionados no parágrafo anterior são apresentados e discutidos e, por fim, conclusões são apresentadas com base nos resultados obtidos. O trabalho foi apresentado parcialmente no Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (ERMAC-2018) (GUZELLA et al, 2018). No presente artigo foi aumentada a seção que trata sobre a explicação da metodologia de solução numérica (seção 2); e se apresentam resultados adicionais considerando a distribuição de pressão numa bolha (seção 3.1) e a coalescência vertical de duas bolhas (seção 3.2).

2 Modelo matemático e método numérico

A equação de Boltzmann descreve a evolução de um conjunto de partículas modeladas por meio de uma função de distribuição $f(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t)$ que descreve as partículas em um dado tempo t , na posição $\mathbf{x} = [x_1; x_2; x_3]$ e com velocidade $\mathbf{v} = [v_1; v_2; v_3]$:

$$\frac{\partial f(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{v}, \mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \Omega(f, f^{eq}) \quad (1)$$

Na Equação 1 f^{eq} é a função distribuição de equilíbrio, que descreve a condição de equilíbrio do conjunto de partículas. O termo $\Omega(f, f^{eq})$ representa o operador de colisões binárias entre as partículas. A equação de Lattice Boltzmann na forma discretizada corresponde a uma equação cinética para a função distribuição de partículas, similar à equação cinética utilizada no método de Lattice Gas-Automata. A discretização da Equação de Boltzmann baseia-se na introdução de velocidades discretas para as partículas simuladas \mathbf{e}_i ,

resultado em estruturas denominadas Lattice, semelhantes à uma malha computacional. Posteriormente discretiza-se esta equação no espaço e no tempo utilizando-se o método das diferenças finitas. Dessa forma obtém-se uma equação da evolução da função de distribuição das partículas no método de Lattice Boltzmann emprega, comumente, o operador de colisões simplificado de BGK (BHATNAGAR; GROSS; KROOK, 1954). Neste operador as colisões ocorrem como um processo simples de relaxação com uma constante de tempo τ :

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \delta_t, t + \delta_t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau} (f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)) \quad (2)$$

Na Equação 2 $f_i(\mathbf{x}, t)$ é a função de distribuição de partículas com velocidade \mathbf{e}_i na posição \mathbf{x} e no tempo t . O lado direito da Equação 2 corresponde à operação de colisão, na qual os efeitos associados às colisões das partículas simuladas são obtidos. A operação associada ao lado esquerdo da Equação 2 corresponde à operação de transmissão, na qual estes efeitos são transmitidos aos lattices localizados no interior do domínio computacional. A função distribuição de equilíbrio, $f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)$, na forma discretizada é obtida fazendo-se coincidir sua forma contínua com as quadraturas de Hermite associadas à funções de ponderação w_i . Dessa forma, obtém-se a função de distribuição de equilíbrio de Maxwell-Boltzmann discretizada (GUO; SHU, 2013):

$$f_i^{eq}(\mathbf{x}, t) = \rho w_i \left[1 + \frac{(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}^{eq})}{c_s^2} + \frac{(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{u}^{eq})^2}{2c_s^4} - \frac{(\mathbf{u}^{eq})^2}{2c_s^2} \right] \quad (3)$$

Na Equação 3 \mathbf{u}^{eq} é o vetor velocidade de equilíbrio do fluido, que leva em consideração o efeito de forças externas, c_s a velocidade do som associada ao esquema de velocidades selecionado para discretização. Para simulação tridimensional, neste artigo, emprega-se o esquema D3Q19 (3 direções e 19 velocidades), ver Guo e Shu (2013) e Huang, Sukop e Lu (2015). Assim tem-se $c_s^2 = 1/3$ e os coeficientes de ponderação são dados por:

$$w_i = \begin{cases} 1/3, i = \{0, 1, 2\} \\ 1/18, i = \{3, 4, 5\} \\ 1/36, i = \{6, 7, 8\} \end{cases} \quad (4)$$

Uma representação esquemática do esquema D319 é mostrada na Figura 1:

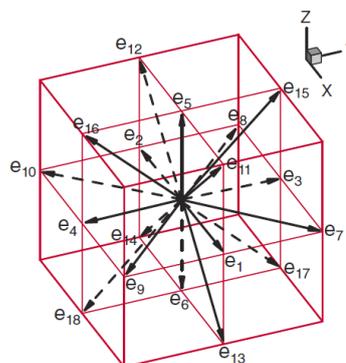




Figura 1: Esquema D3Q19 (extraído de Huang, Sukop e Lu, 2015).

Com a obtenção da função de distribuição de Boltzmann na forma discreta, $f_i(\mathbf{x}, t)$, pode-se obter o campo de densidades, ρ , e de velocidades, \mathbf{u} , pelas Equações 5 e 6, respectivamente:

$$\rho = \sum_i f_i \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = \frac{\sum_i \mathbf{e}_i f_i}{\rho} \quad (6)$$

O método dos pseudopotenciais, de acordo com Yuan e Schaefer (2006) simula a separação entre as fases líquido-vapor por meio da utilização de uma força repulsiva entre partículas, dada pela Equação 7:

$$\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{x}, t) = -g \psi(\mathbf{x}, t) \sum_i w_i \psi(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i t, t) \mathbf{e}_i \quad (7)$$

Na Equação 7 $\psi(\mathbf{x}, t)$ representa o potencial médio de campo e g é um parâmetro que controla a intensidade da força entre as partículas.

O potencial médio de campo é obtido pela Equação 8:

$$\psi = \sqrt{\frac{2(p - \rho c_s^2)}{c_s^2 g}} \quad (8)$$

Para o cálculo do potencial médio de campo, emprega-se uma Equação de Estado para o cálculo da pressão. Diferentes equações podem ser utilizadas. Neste trabalho foi utilizada a Equação de Carnahan e Starling (1969):

$$p = \rho RT \left[\frac{1 + b\rho/4 + (b\rho/4)^2 - (b\rho/4)^3}{(1 - b\rho/4)^3} \right] - a\rho^2 \quad (9)$$

Onde $a=0,4963R^2T_c^2/p_c$ e $b=0,187RT_c/p_c$. R , T_c e p_c representam a constante do gás, e a temperatura e pressão críticas. Para as simulações realizadas neste artigo, foram admitidos $a=1$, $b=4$, $R=1$ em unidades de rede (YUAN; SCHAEFER, 2006).

Para condição de equilíbrio de uma bolha estática em um meio, a tensão superficial faz com que a bolha permaneça esférica. Neste caso é possível calcular o salto de pressão que existe entre o interior da bolha e o meio líquido pela Equação de Young-Laplace (HUANG; SUKOP; LU, 2015):

$$\Delta p = \sigma \frac{2}{R} \quad (10)$$



O movimento ascendente em um meio líquido ocorre devido à ação da força de empuxo. Esta força foi introduzida pela Equação 11 (YUAN; SCHAEFER, 2006):

$$\mathbf{F}_g = G(\rho - \bar{\rho}) \quad (11)$$

Na Equação 11 G representa a aceleração da gravidade e $\bar{\rho}$ representa a densidade média, que é calculada considerando todo o domínio computacional (região tridimensional espacial cartesiana onde se modela o problema).

A velocidade de equilíbrio, \mathbf{u}^{eq} , é calculada incluindo-se o efeito da aceleração gerado pela força total, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{int}} + \mathbf{F}_g$:

$$\mathbf{u}^{\text{eq}} = \mathbf{u} + \tau \frac{\mathbf{F}}{\rho} \quad (12)$$

De acordo com Yuan e Schaefer (2006), a velocidade real do fluido, \mathbf{U} , é dada por:

$$\mathbf{U} = \mathbf{u}^{\text{eq}} + \frac{\mathbf{F}}{2\rho} \quad (13)$$

Por meio da expansão de Chapman-Enskog, conforme Guo e Shu (2013) demonstra-se a relação entre as escalas macroscópica e mesoscópica, ou seja, a relação entre a viscosidade e a relaxação temporal:

$$\nu = c_s^2(\tau - 0,5) \quad (14)$$

Assim, a escolha do parâmetro de relaxação temporal define a viscosidade cinemática. Uma simples análise da Equação 14 revela que $\tau \geq 0,5$. Logo, o operador de colisão BGK possui a limitação de simular somente problemas de baixos números de Reynolds ($\text{Re} = \mathbf{U} \times \text{DC} / \nu$). O número de Reynolds estabelece a relação entre as forças inerciais e viscosas. DC representa a dimensão característica. Em unidades de rede DC igual à aresta de cada cubo discreto do domínio computacional.

A condição inicial foi estabelecida por meio da função distribuição de equilíbrio (Equação 3). Condições de contorno periódicas foram consideradas em todas as direções, conforme Guo e Shu (2013). Esta condição de contorno é implementada igualando-se a função distribuição deste contorno com a do contorno imediatamente oposto.

O algoritmo associado à simulação empregando-se o método de Lattice Boltzmann dos pseudopotenciais é apresentado na Figura 2:

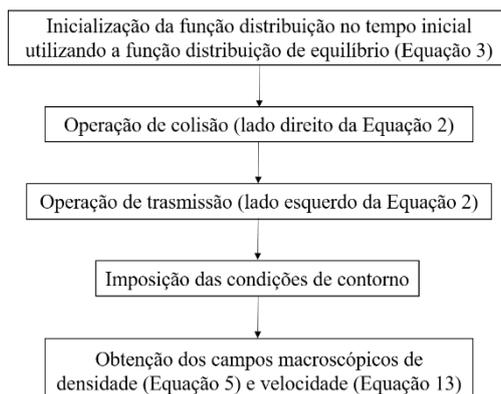


Figura 2: Algoritmo para simulação utilizando o método de Lattice Boltzmann

3 Resultados e discussão

As bolhas foram inicializadas no domínio computacional com um diâmetro de 30 (em unidades de Lattice). A relaxação temporal foi admitida unitária, ou seja, $\tau = 1$. Por meio da Equação 14 obtém-se a viscosidade dinâmica associada igual a 1,67 (em unidades de Lattice).

Para todas as simulações realizadas foi considerada a temperatura do fluido igual a $T/T_c=0,75$, em que T_c é a temperatura crítica do fluido. Nesta condição, a utilização da regra de construção das fases de Maxwell e a equação de estado não ideal de Carnahan-Starling resulta nas densidades das fases líquida e vapor iguais a 0,33 e 0,015, respectivamente. Convém ressaltar que as variáveis utilizadas nas simulações estão em unidades de Lattice, seguindo a metodologia de Gong e Cheng (2012). Estas unidades podem ser convenientemente convertidas para unidades do sistema internacional (ou outro conveniente) por meio das respectivas grandezas expressas na forma reduzida, ou seja, utilizando as propriedades críticas.

O domínio computacional foi estabelecido com uma malha uniforme com $51 \times 51 \times 81$ nós para simulação da bolha estática e $51 \times 51 \times 151$ nós para simulação da ascensão da bolha e da coalescência vertical de duas bolhas.

3.1 Simulação de uma bolha estática em um meio fluido

Inicialmente foram realizadas simulações de uma bolha estática imersa em um meio líquido, com resultados apresentados na Figura 3. Trata-se de um problema teste típico na simulação de problemas bifásicos. Neste caso, espera-se que a bolha estática permaneça em repouso no meio líquido. O objetivo destas simulações é abordar uma característica da simulação numérica de problemas bifásicos utilizando-se o método dos pseudopotenciais: a presença de velocidade não nula nas proximidades da interface (velocidades espúrias). A presença de velocidades espúrias na região da interface deve-se ao desbalanceamento da tensão superficial e surge em métodos numéricos utilizados na simulação deste tipo de problema.

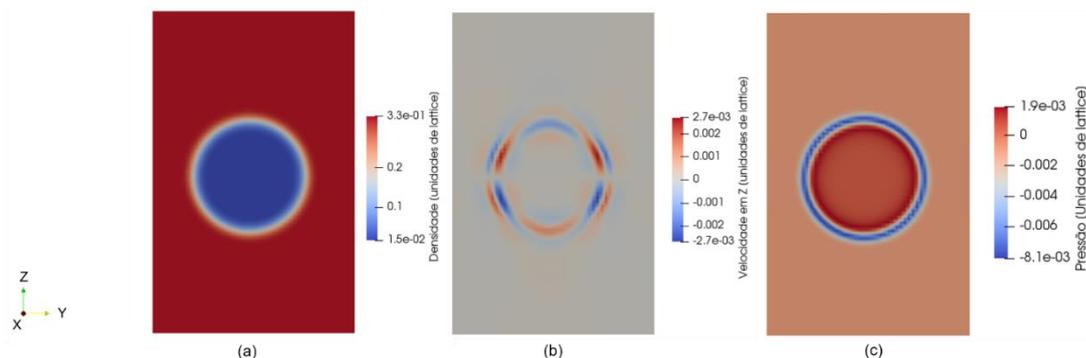


Figura 3: distribuição de densidades (a), velocidade na direção Z (b) e pressão (c) para a bolha estática.

O campo de pressões apresentado na Figura 3 permite a obtenção da tensão superficial associada à bolha. Pela Figura 3c a tensão superficial σ (em unidades de Lattice) é igual a 0,01425. No modelo dos pseudopotenciais a tensão superficial não pode ser ajustada de forma independente da força de interação entre as partículas, F_{int} , dada pela Equação 7. Desta forma, a tensão superficial é obtida por meio da simulação da bolha estática em um meio líquido.

3.2 Simulação da ascensão de uma bolha em um meio líquido

Neste caso, a aceleração da gravidade G foi assumida igual a 0,0003 (em unidades de Lattice), conforme Gong e Cheng (2012). A Figura 4 apresenta a distribuição de densidades para diferentes instantes de tempo ($t=0$, $t=50$ s e $t=100$ s), associados à ascensão da bolha no meio líquido.

A Figura 5 apresenta o campo de velocidades para a simulação da ascensão de uma bolha. A partir dos resultados o número de Reynolds para a simulação da ascensão da bolha é calculado como $Re=VD/\nu$, sendo V a velocidade terminal da bolha, D o diâmetro, e ν a viscosidade cinemática, calculada pela Equação 14. A velocidade máxima é calculada dos resultados mostrados nas Figuras 4 e 5, resultando $Re=5,4$. Este resultado demonstra que os efeitos viscosos são desprezíveis durante a ascensão da bolha no meio líquido. Isso ocorre devido às baixas velocidades associadas a este tipo de problema físico. Por meio da tensão superficial obtida anteriormente, pode-se caracterizar o problema físico simulado por meio do número de Weber, $We=\rho_v V^2 D/\sigma$, que é definido como a relação dos efeitos de inércia (V) e efeitos de tensão superficial (σ). Desta forma, tem-se $We=0,0284$ de modo que os efeitos de tensão superficial são superiores aos de inércia. Isso pode ser verificado por meio da Figura 4, em que nota-se que a forma da bolha não se altera durante a ascensão, ou seja, permanece esférica.

A Figura 6 apresenta o campo de pressões durante a ascensão da bolha. Em comparação com o resultado do campo de pressões associado à bolha estática, o intervalo de variação da pressão é praticamente o mesmo.

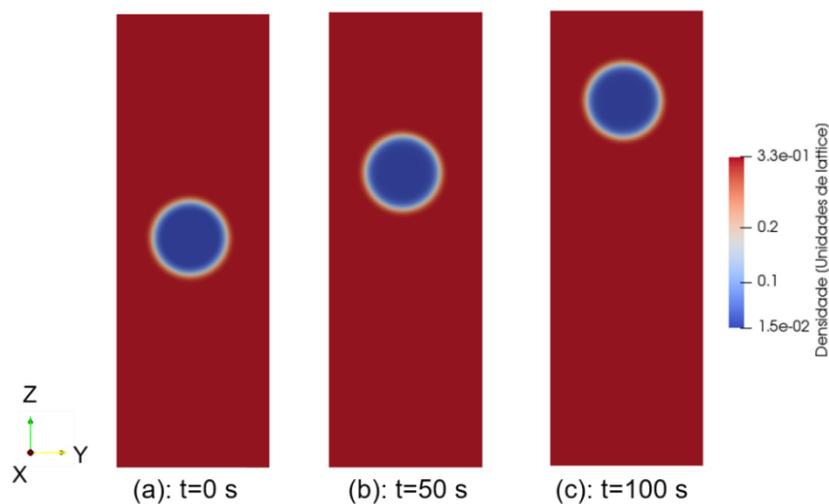


Figura 4: distribuição de densidades para a ascensão da bolha para diferentes instantes de tempo

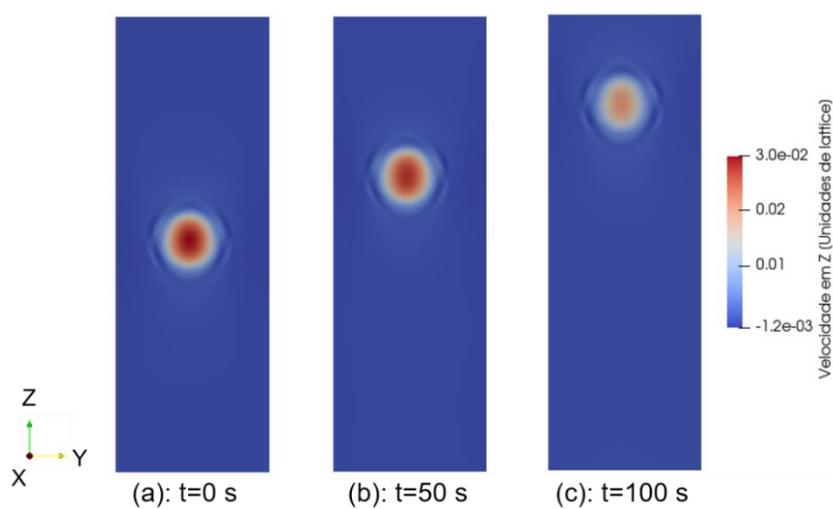


Figura 5: distribuição de velocidade para a ascensão da bolha (a) $t=0$ s (b) $t=50$ s (c) $t=100$ s

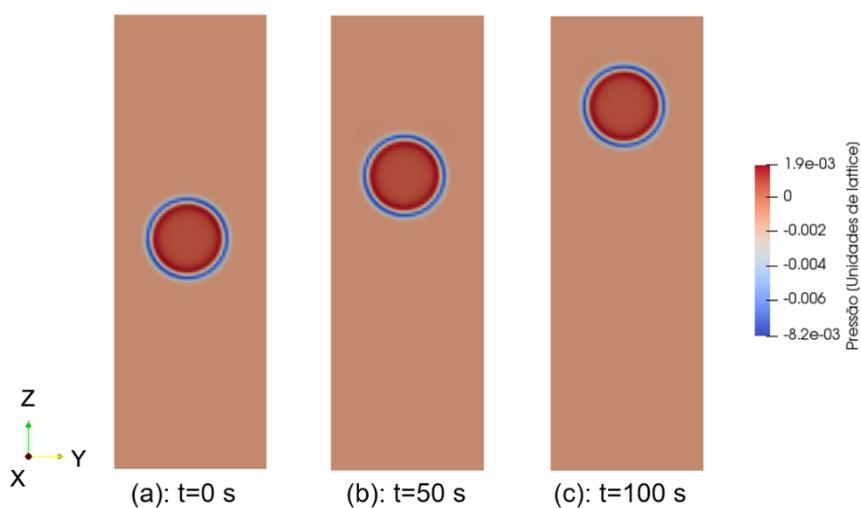


Figura 6: distribuição de pressão para a ascensão da bolha (a) $t=0$ s (b) $t=50$ s (c) $t=100$ s



3.3 Simulação da coalescência vertical de duas bolhas

A coalescência vertical de duas bolhas representa um fenômeno significativo na formação de bolhas em superfícies aquecidas. O modelo numérico baseado no método de Lattice Boltzmann possui a capacidade natural de capturar a coalescência de bolhas sem a necessidade de modificação do código numérico. A simulação da coalescência vertical de duas bolhas é realizada iniciando-se duas bolhas no meio líquido, posicionadas no mesmo eixo vertical. As bolhas foram inicializadas com diâmetro igual a 30 em unidades de Lattice.

A Figura 7 apresenta os estágios associados à coalescência vertical das bolhas de vapor em distintos intervalos de tempo. Por simplicidade as bolhas foram inicializadas em posições próximas em relação à vertical. Nota-se que a coalescência ocorre imediatamente. Ao apresentar as figuras em distintos intervalos de tempo se percebem os vários estágios associados à coalescência vertical. Inicialmente as bolhas comportam-se praticamente como se estivessem isoladas e posteriormente tendem a apresentar um formato elíptico. Nos estágios finais a bolha passa a ser única com um diâmetro superior ao das bolhas individualmente inicializadas.

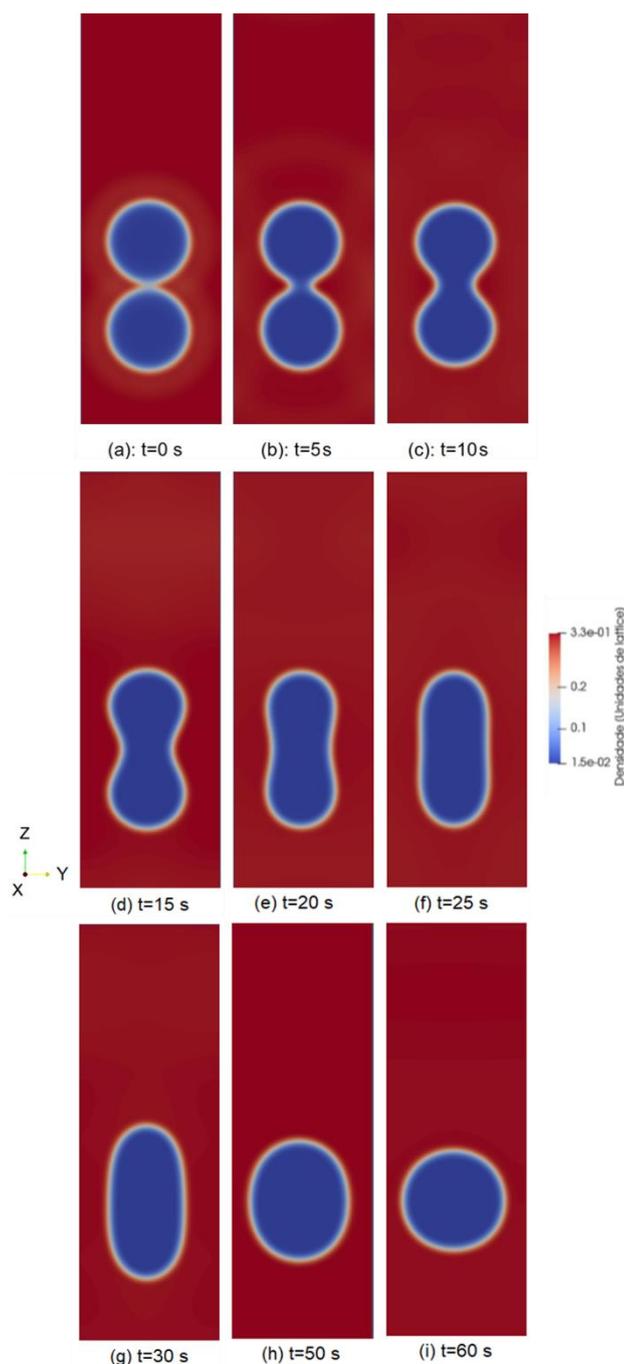


Figura 7: distribuição de densidades para a coalescência vertical de duas bolhas (a) $t=0$ s; (b) $t=5$ s; (c) $t=10$ s; (d) $t=15$ s; (e) $t=20$ s; (f) $t=25$ s; (g) $t=30$ s; (h) $t=50$ s; (i) $t=60$ s

4 Conclusão

Neste trabalho foram realizadas simulações da ascensão de uma bolha isotérmica em um meio líquido e a coalescência de duas bolhas por meio do método de Lattice Boltzmann dos pseudopotenciais. Resultados qualitativos foram apresentados de modo a avaliar a capacidade do método em simular estes problemas físicos, que se empregam comumente para testes de códigos numéricos do método LB para simulação de escoamentos bifásicos. A simulação da bolha estática permitiu a determinação da sua tensão superficial, enquanto a simulação da



ascensão da bolha em um meio líquido forneceu resultados qualitativos corretos fisicamente. Por fim, a simulação da coalescência vertical de duas bolhas demonstra que o método dos pseudopotenciais é capaz de capturar, naturalmente, a dinâmica associada a este fenômeno, sem a necessidade de modificação do modelo. Futuramente, pretende-se incluir efeitos de transferência de calor no problema, inclusive um estudo detalhado da formação, crescimento e desprendimento de uma bolha em uma superfície aquecida.

Agradecimentos

Os autores agradecem a EESC/USP, CNPq (Processos 306675/2014-5 e 304972/2017-7) e FAPESP (Processos 2016/09509-1 e 2018/09041-5) pelo auxílio financeiro. Também esclarecem que o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

5 Referências

BHATNAGAR, P. L.; GROSS, E. P.; KROOK, M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. **Physical review**, v. 94, n. 3, 1954. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.94.511>.

BRENNEN, C. E. **Cavitation and bubble dynamics**. New York: Cambridge University Press, 1993.

CARNAHAN, N. F.; STARLING, K. E. Equations of state for nonattracting rigid spheres. **Journal of Chemical Physics**, v. 51, n. 2, p. 635-636, 1969.

CHANG, X.; HUANG, H.; LU, X. Thermal lattice Boltzmann study of three-dimensional bubble growth in quiescent liquid. **Computers and Fluids**, v. 159, p. 232–242, 2017.

GONG, S.; CHENG, P. A lattice Boltzmann method for simulation of liquid-vapor phase-change heat transfer. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 55, n. 17-18, p. 4923-4927, 2012.

GUO, Z.; SHU, C. **Lattice Boltzmann method and its applications in engineering**. [Hackensack] New Jersey: World Scientific, 2013.

GUO, Z.; ZHENG, C.; SHI, B. An extrapolation method for boundary conditions in lattice Boltzmann method. **Physics of Fluids**, v. 14, n. 6, p. 2007-2010, 2002.

GUZELLA, M. S. et al. Simulação numérica tridimensional de uma bolha isotérmica ascendente em um meio líquido utilizando o método de lattice Boltzmann. In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 2018, Bauru. **Caderno de trabalhos completos e resumos**. Bauru: Unesp, Faculdade de Ciências, 2018. p. 293 – 298. Disponível em: <<https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/eventos2341/ermac-2018/caderno-de-trabalhos-e-resumos/>>. Acesso em: 16 dez. 2018.



HUANG, H.; KRAFCZYK, M.; LU, X. Forcing term in single-phase and Shan-Chen-type multiphase lattice Boltzmann models. **Physical Review E**, v. 84, n. 4, p. 1–15, 2011.

HUANG, H.; SUKOP, M.; LU, X. **Multiphase lattice Boltzmann methods: theory and application**. Oxford: Wiley Blackwell, 2015.

KUO, K. K. **Principles of combustion**. New York: John Wiley and Sons, 1986.

PATTISON, M. J. et al. Progress in lattice Boltzmann methods for magnetohydrodynamic flows relevant to fusion applications. **Fusion Engineering and Design**, v. 83, n. 4, p. 557-572, 2008.

SHAN, X.; CHEN, H. Lattice Boltzmann model for simulating flows with multiple phases and components. **Physical Review E**, v. 47, n. 3, p. 1815–1820, 1993.

TAROKH, A.; MOHAMAD, A. A.; JIANG, L. Simulation of conjugate heat transfer using the Lattice Boltzmann method. **Numerical Heat Transfer, Part A: Applications**, v. 63, n. 3, p. 159–178, 2013.

WANG, J.; WANG, M.; LI, Z. A lattice Boltzmann algorithm for fluid–solid conjugate heat transfer. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 46, n. 2, p. 228–234, 2007.

WOLF-GLADROW, D. A. **Lattice-gas cellular automata and lattice Boltzmann models: an introduction**. Berlin: Springer-Verlag, 2000.

YUAN, P.; SCHAEFER, L. Equations of state in a lattice Boltzmann model. **Physics of Fluids**, v. 18, n. 4, 2006. <https://doi.org/10.1063/1.2187070>.