Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 14, fev. 2019
Edição Ermac

Soluções periódicas para versões generalizadas do modelo de produção de células sanguíneas *(hematopoiese)* de Mackey e Glass

Periodic solutions for generalized versions of the blood cell production model (*hematopoiesis) by Mackey e Glass.*

Raul Lima
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
raul_lyma@hotmail.com

Suzete Maria Silva Afonso
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
smafonso@rc.unesp.br

Resumo

Recentemente, o uso da teoria de ponto fixo como ferramenta para garantir existência de soluções periódicas e positivas para equações diferenciais tem ganhado bastante destaque, devido à dificuldade em determinar funcionais de Liapunov para certas classes de equações. Neste trabalho, provaremos a existência de soluções periódicas e positivas para versões generalizadas do modelo de produção de células do sangue proposto por Mackey e Glass, a saber $\dot{y}(t) = -\alpha y(t) + \dfrac{\beta}{1+y^n(t-\tau)}$, através de um teorema de ponto fixo de Krasnoselskii.

Palavras-chave: Equações Diferenciais com Retardamento. Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii. Soluções periódicas. Cones em Espaços de Banach.

Abstract

Recently, the use of fixed-point theory as a tool to ensure the existence of periodic and positive solutions to differential equations has gained considerable prominence due to the difficulty in determining Liapunov functionals for certain classes of equations. In this work, we will guarantee the existence of periodic and positive solutions for generalized versions of the blood cell production model proposed by Mackey and Glass, namely $\dot{y}(t) = -\alpha y(t) + \dfrac{\beta}{1+y^n(t-\tau)}$, through a fixed point theorem of Krasnoselskii.

Keywords: Retarded Differential Equations. Krasnoselskii's Fixed Point Theorem. Periodic Solutions. Cones in Banach Spaces.

Artigo recebido em set. 2018 e aceito em jan. 2019.

1 Notações

Os seguintes símbolos serão usados ao longo do texto.

1. $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$.
2. $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$.
3. $\mathbb{R}^n_+ := \underbrace{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \cdots \times \mathbb{R}^+}_{n-\text{vezes}}$.
4. $A - B = \{x \in A; x \notin B\}$.
5. $C(A,B)$ é o espaço vetorial das funções contínuas $\varphi : A \to B$.
6. $\overline{\Omega}$ denota o fecho do conjunto Ω.
7. $\operatorname{int}\Omega$ denota o interior do conjunto Ω.
8. $\partial\Omega$ denota a fronteira do conjunto Ω.

2 Introdução

As equações diferenciais funcionais com retardamento (EDFR) constituem uma ferramenta muito importante na modelagem matemática, pois determinam modelos mais realísticos, e por essa razão o estudo sobre o comportamento de suas soluções se faz necessário. Ao longo do século XX, os funcionais de Liapunov foram a principal ferramenta para o estudo de propriedades qualitativas de soluções de EDFR, mas a dificuldade em determinar tais funcionais impulsionaram o estudo de estabilidade através da teoria de ponto fixo, ferramenta com a qual tal dificuldade tende a desaparecer, como se pode constatar em [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], por exemplo. No texto apresentamos a motivação para o problema e realizamos com detalhes a demonstração dos resultados essenciais para garantir a existência de soluções periódicas para o modelo proposto. O resumo deste artigo, apresentado no Ermac 2018, pode ser encontrado em [15].

Na segunda metade do século XX, Mackey e Glass, em [16], propuseram o modelo para a produção de células do sangue (hematopoiese), dado pela equação diferencial

$$\dot{y}(t) = -\alpha y(t) + \frac{\beta}{1 + y^n(t-\tau)}, \quad n > 0, \tag{1}$$

em que α, β e τ são constantes positivas, $y(t)$ denota a densidade populacional de células maduras no instante t e τ é o tempo entre a produção de células na medula óssea e sua maturação para lançamento na corrente sanguínea. Supõe-se que as células são perdidas para a corrente sanguínea a uma taxa α, e o fluxo de células na corrente sanguínea advindas do compartimento de células tronco depende da densidade de células maduras no tempo $t - \tau$.

Além do modelo de produção de células sanguíneas, em muitos outros problemas, como os populacionais e econômicos, por exemplo, é necessária uma discussão sobre a existência de soluções positivas que gozem de algumas propriedades qualitativas. Especialmente em análise funcional, problemas de não-negatividade podem ser desenvolvidos sobre cones, que no contexto a ser abordado, é um subconjunto fechado e convexo de um determinado espaço. Em [17], Zhang e seus colaboradores extraíram propriedades qualitativas de uma família de equações diferenciais que contemplam duas generalizações do modelo proposto por Mackey e Glass, a saber:

$$\dot{y}(t) = -a(t)y(t) + \frac{b(t)}{1+y^n(t-\tau(t))}, \quad n > 0, \tag{2}$$

e

$$\dot{y}(t) = -a(t)y(t) + b(t)\frac{y(t-\tau(t))}{1+y^n(t-\tau(t))}, \quad n > 0, \tag{3}$$

em que $a, b \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, $a(t) \neq 0, b(t) \neq 0, a(t) = a(t+\omega), b(t) = b(t+\omega)$, onde ω é uma constante positiva.

A fim de garantir a existência de soluções positivas e periódicas para os modelos (2) e (3), estabelecemos, na primeira parte do texto, uma relação entre a teoria de cones e a de pontos fixos, utilizando [18] como principal referência. Em seguida, são apresentadas as versões do Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii para cones e são fornecidas condições de existência de soluções periódicas positivas para a seguinte classe de equações diferenciais

$$\dot{y}(t) = -a(t)y(t) + f(t, y(t-\tau_1(t)), y(t-\tau_2(t)), \ldots, y(t-\tau_n(t))),$$

que contempla os modelos (2) e (3), desde que as funções a e f cumpram algumas condições.

3 Definições e resultados preliminares

Definição 1. *Seja X um espaço de Banach real. Um subconjunto não vazio, fechado e convexo K de X é um* ***cone*** *se cumpre as seguintes condições:*

i) se $x \in K$ e $\lambda \geq 0$, então $\lambda x \in K$;

ii) se $x \in K$ e $-x \in K$, então $x = \theta$, onde θ denota o elemento neutro de X.

Um cone K é ***sólido*** *se contém pontos interiores, ou seja, se $\operatorname{int} K \neq \emptyset$.*

Um cone K é ***gerador*** *se $X = K - K$, isto é, se todo elemento $x \in X$ pode ser representado na forma $x = u - v$, com $u, v \in K$.*

Um cone K é ***normal*** *se existe uma constante $\delta > 0$ tal que $\|x+y\| \geq \delta$, para quaisquer $x, y \in K$, com $\|x\| = \|y\| = 1$.*

Definição 2. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Um operador linear $\Psi : X \to Y$ é* ***completamente contínuo*** *se Ψ leva sequências fracamente convergentes em X em sequências convergentes em Y.*

Definição 3. *Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Um operador linear $\Psi : X \to Y$ é* ***compacto*** *se $\overline{\Psi(B)} \subset Y$ é compacto sempre que $B \subset X$ é limitado.*

É possível verificar que todo operador compacto é completamente contínuo. Veja [19], Proposição 3.3, página 170.

Definição 4. *Um operador $\Psi : X \to Y$ é **condensado** se é contínuo, limitado e $\mu(\Psi(S)) < \mu(S)$, para qualquer conjunto limitado $S \subset X$, com $\mu(S) > 0$.*

Na Definição 4, $\mu(S)$ denota a medida de não compacidade de S. Os leitores interessados podem encontrar definições e propriedades de medida de não compacidade na referência [20].

Definição 5. *Seja X um espaço de Banach real. Um subconjunto $E \subset X$ é um **retrato** de X se existe uma função contínua $r : X \to E$, denominada **retração**, tal que, para todo $x \in X$ e para todo $a \in E$, tem-se*

i) $r(x) \in E$;

ii) $r(a) = a$.

Observação 6. *Por um teorema devido a Dugundji (veja [21]), sabe-se que todo subconjunto convexo fechado e não vazio de X é um retrato de X. Em particular, um cone em X é um retrato de X.*

O próximo resultado apresenta o conceito de índice de ponto fixo de uma aplicação num conjunto, que será uma ferramenta importante para a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii, o qual por sua vez será fundamental para provar a existência de soluções periódicas positivas para uma determinada classe de equações diferenciais com retardo.

Teorema 7 (Teorema 2.3.1, [18], página 82)**.** *Seja E um retrato de um espaço de Banach X. Então, para todo subconjunto aberto e relativamente limitado $U \subset E$ e todo operador completamente contínuo $\Psi : \overline{U} \to E$ que não possua pontos fixos em ∂U, existe um número inteiro $i(\Psi, U, E)$ que goza das seguintes propriedades:*

i) (Normalidade): $i(\Psi, U, E) = 1$ *se* $\Psi x \equiv y_0 \in U$ *para todo* $x \in \overline{U}$;

ii) (Aditividade): $i(\Psi, U, E) = i(\Psi, U_1, E) + i(\Psi, U_2, E)$, *se U_1 e U_2 são subconjuntos abertos e disjuntos de U, tais que Ψ não possui pontos fixos em* $\overline{U} - (U_1 \cup U_2)$;

iii) (Invariância por Homotopia): $i(H(t,\cdot), U, E)$ *é independente de t* $(0 \leq t \leq 1)$ *sempre que* $H : [0,1] \times \overline{U} \to E$ *é completamente contínuo e* $H(t,x) \neq x$ *para todo* $(t,x) \in [0,1] \times \partial U$;

iv) (Permanência): $i(\Psi, U, E) = i(\Psi, U \cap Y, Y)$, *se Y é um retrato de E e* $\Psi(\overline{U}) \subset Y$.

Ademais, seja

$$M = \{(\Psi, U, E);\ E \text{ é um retrato de } X,\ U \text{ é um subconjunto aberto e limitado de } E,$$

$$\Psi : \overline{U} \to E \text{ é completamente contínuo e } \Psi x \neq x \text{ em } \partial U\}$$

*e seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros. Então, existe exatamente uma única função $d : M \to \mathbb{Z}$ que tem as propriedades $i) - iv)$. Em outras palavras, $i(\Psi, U, E)$ é unicamente determinado. Ao número inteiro $i(\Psi, U, E)$, chamamos de **índice de ponto fixo** de Ψ em U com respeito a E.*

Teorema 8 (Teorema 2.3.2, [18], página 86)**.** *Nas condições do Teorema 7, o índice de ponto fixo do operador Ψ tem a seguinte propriedade:*

v) (Propriedade de Solução): Se $i(\Psi,U,E)\neq 0$, então Ψ tem pelo menos um ponto fixo em U.

Lema 9 (Lema 2.3.1, [18], página 88)**.** *Sejam K um cone num espaço de Banach X, $\Omega\subset X$ um subconjunto aberto e limitado que contém o elemento neutro de X $(\theta\in X)$ e $\Psi: K\cap\overline{\Omega}\to K$ um operador condensado. Se $\Psi x\neq\mu x$, para quaisquer $x\in K\cap\partial\Omega, \mu\geq 1$, então $i(\Psi,K\cap\Omega,K)=1$.*

Lema 10 (Lema 2.3.2, [18], página 88)**.** *Sejam K um cone num espaço de Banach X, $\Omega\subset X$ um subconjunto aberto e limitado de X, $\Psi: K\cap\overline{\Omega}\to K$ e $\Phi: K\cap\partial\Omega\to K$ operadores completamente contínuos. Se*

i) $\inf\limits_{x\in K\cap\partial\Omega}\|\Phi x\|>0$ *e*

ii) $x-\Psi x\neq\mu\Phi x$*, para todo* $x\in K\cap\partial\Omega$*, com* $\mu\geq 0$*,*

então $i(\Psi,K\cap\Omega,K)=0$.

Os próximos resultados são consequências do Lema 10.

Lema 11 (Corolário 2.3.1, [18], página 90)**.** *Sejam K um cone num espaço de Banach X, $\Omega\subset X$ um subconjunto aberto e limitado de X e $\Psi: K\cap\overline{\Omega}\to K$ um operador completamente contínuo. Se existir $u_0>\theta$ tal que*

$$x\neq\Psi x+\lambda u_0, \ \ para \ \ x\in K\cap\partial\Omega \ \ e \ \ \lambda>0,$$

então $i(\Psi,K\cap\Omega,K)=0$.

Lema 12 (Lema 2.3.3, [18], página 91)**.** *Sejam K um cone num espaço de Banach X, $\Omega\subset X$ um subconjunto aberto e limitado de X e $\Psi: K\cap\overline{\Omega}\to K$ um operador completamente contínuo. Se*

i) $\inf\limits_{x\in K\cap\partial\Omega}\|\Psi x\|>0$ *e*

ii) $\Psi x\neq\mu x$*, para todo* $x\in K\cap\partial\Omega$*, com* $0<\mu\leq 1$*,*

então $i(\Psi,K\cap\Omega,K)=0$.

Neste trabalho serão abordados resultados acerca da seguinte classe de equações diferenciais com retardo:

$$\dot{y}(t)=-a(t)y(t)+f(t,y(t-\tau_1(t)),y(t-\tau_2(t)),\dots,y(t-\tau_n(t))) \tag{4}$$

onde $a\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$, $a(t)\neq 0$, $a(t)=a(t+\omega), f\in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n_+,\mathbb{R}^n_+)$ é $\omega-$ periódica com respeito a primeira variável, $\tau_i\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$ e $\tau_i(t+\omega)=\tau_i(t), 1\leq i\leq n$, onde ω é uma constante positiva.

Por conveniência, consideraremos em $\mathbb{R}^n_+$ a norma dada por $|u|=\max\limits_{1\leq j\leq n}\{u_j\}$, para $u=(u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n_+$.

Por uma questão de simplicidade, fixaremos algumas notações que serão utilizadas na sequência. São elas:

$$G(t,s)=\frac{e^{\int_t^s a(\theta)d\theta}}{e^{\int_0^\omega a(\theta)d\theta}-1}, \tag{5}$$

$$\delta = e^{-\int_0^{\omega} a(\theta)\,d\theta}, \tag{6}$$

$$\max f_0 = \limsup_{|u|\to 0} \max_{t\in[0,\omega]} \frac{f(t,u)}{a(t)|u|}, \qquad \max f_\infty = \limsup_{|u|\to \infty} \max_{t\in[0,\omega]} \frac{f(t,u)}{a(t)|u|}, \tag{7}$$

$$\min f_0 = \liminf_{\substack{|u|\to 0\\ u_j\geq\delta|u|\\ 1\leq j\leq n}} \min_{t\in[0,\omega]} \frac{f(t,u)}{a(t)|u|} \quad \text{e} \quad \min f_\infty = \liminf_{\substack{|u|\to \infty\\ u_j\geq\delta|u|\\ 1\leq j\leq n}} \min_{t\in[0,\omega]} \frac{f(t,u)}{a(t)|u|}. \tag{8}$$

Lema 13 (Lema 2.2, [17], página 720)**.** *A função $G(t,s)$, definida em* (5)*, tem as seguintes propriedades:*

i) $G(t+\omega,s+\omega) = G(t,s)$*, para quaisquer* $t,s\in\mathbb{R}$;

ii) $\dfrac{\delta}{1-\delta} = G(t,t) \leq G(t,s) \leq G(t,t+\omega) = \dfrac{1}{1-\delta}$*, para qualquer* $s\in[t,t+\omega]$*;*

iii) $\delta \leq \dfrac{G(t,s)}{G(t,t+\omega)} \leq 1$*, para qualquer* $s\in[t,t+\omega]$*;*

iv) $\displaystyle\int_t^{t+\omega} G(t,s)a(s)\,ds = 1$*, para qualquer* $t\in\mathbb{R}$.

O próximo resultado mostra como é possível transformar a equação (4) numa equação integral.

Lema 14. *Uma função $y(t)$ é uma solução ω-periódica de* (4) *se, e somente se, é também solução $\omega-$ periódica da equação integral*

$$y(t) = \int_t^{t+\omega} G(t,s) f(s,y(s-\tau_1(s)),\ldots,y(s-\tau_n(s)))\,ds, \tag{9}$$

onde $G(t,s)$ é função definida em (5)*.*

Demonstração. Seja $y(t)$ uma solução ω-periódica de (4). Multiplicando a equação (4) por $e^{\int_s^t a(u)du}$, temos a seguinte equação equivalente:

$$\left(y(t)\cdot e^{\int_s^t a(u)du}\right)' = e^{\int_s^t a(u)du}\cdot f(t,y(t-\tau_1(t)),y(t-\tau_2(t)),\ldots,y(t-\tau_n(t))). \tag{10}$$

Agora, integrando ambos os membros da equação (10) de t a $t+\omega$, obtemos:

$$\begin{aligned}
y(t+\omega)\cdot e^{\int_{t+\omega}^t a(u)du} - y(t) &= \int_t^{t+\omega} e^{\int_s^t a(u)du}\cdot f(s,y(s-\tau_1(s)),y(s-\tau_2(s)),\ldots,y(s-\tau_n(s)))\,ds\\
\Leftrightarrow y(t)\left(e^{\int_{t+\omega}^t a(u)du}-1\right) &= \int_t^{t+\omega} e^{\int_s^t a(u)du}\cdot f(s,y(s-\tau_1(s)),y(s-\tau_2(s)),\ldots,y(s-\tau_n(s)))\,ds\\
\Leftrightarrow y(t) &= \int_t^{t+\omega} \frac{e^{\int_s^t a(u)du}}{e^{\int_0^{\omega} a(u)du}-1}\cdot f(s,y(s-\tau_1(s)),y(s-\tau_2(s)),\ldots,y(s-\tau_n(s)))\,ds\\
\Leftrightarrow y(t) &= \int_t^{t+\omega} G(t,s)\cdot f(s,y(s-\tau_1(s)),y(s-\tau_2(s)),\ldots,y(s-\tau_n(s)))\,ds,
\end{aligned}$$

de onde segue o resultado. □

Sejam

$$X = \{y \in C(\mathbb{R},\mathbb{R});\ y(t) = y(t+\omega)\} \quad \text{e} \quad K = \{y \in X;\ y(t) \geq 0 \text{ e } y(t) \geq \delta\|y\|\}. \tag{11}$$

É fácil verificar que X é um espaço de Banach com a norma da convergência uniforme $\|y\| = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |y(t)|$ e K é um cone em X . Cabe observar que, aqui, $|y(t)|$ denota o valor absoluto de $y(t)$.

Vamos definir o operador $\Psi : X \to X$ por

$$(\Psi y)(t) = \int_t^{t+\omega} G(t,s) f(s, y(s-\tau_1(s)), \ldots, y(s-\tau_n(s)))\, ds.$$

Através do Teorema de Arzelà-Ascoli, pode-se provar que o operador Ψ é compacto e, portanto, completamente contínuo. A demonstração desse fato é extensa, porém simples; por essa razão, será omitida aqui.

4 Teorema do ponto fixo de Krasnoselskii

O Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii já se mostrou como uma boa alternativa, quando não é possível utilizar os teoremas do ponto fixo de Banach e Schauder, para obter propriedades qualitativas de equações diferenciais. Veja, por exemplo, [22] e [23]. Uma adaptação para cones garante a existência de soluções positivas, além de soluções periódicas para o modelo a ser abordado. Nesta seção, primeiramente apresentaremos uma versão que também é conhecida como Teorema da Compressão e Extensão de Cones de Krasnoselskii. Em sua demonstração, uma extensão do Teorema de Tietze, dada por Dugundji em [21], é utilizada.

Teorema 15 (Teorema 2.3.4, [20], página 94 - Krasnoselskii)**.** *Sejam X um espaço de Banach real e $K \subset X$ um cone em X. Assuma que Ω_1, Ω_2 são subconjuntos abertos e limitados de X, tais que $\theta \in \Omega_1$ e $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. Suponha que*

$$\Psi : K \cap (\overline{\Omega}_2 - \Omega_1) \to K,$$

é um operador completamente contínuo, que cumpre uma das duas condições:

i) $\|\Psi y\| \leq \|y\|, \forall y \in K \cap \partial\Omega_1$ *e* $\|\Psi y\| \geq \|y\|, \forall y \in K \cap \partial\Omega_2$; *ou*

ii) $\|\Psi y\| \geq \|y\|, \forall y \in K \cap \partial\Omega_1$ *e* $\|\Psi y\| \leq \|y\|, \forall y \in K \cap \partial\Omega_2$.

Nessas condições, Ψ tem pelo menos um ponto fixo em $K \cap (\overline{\Omega}_2 - \Omega_1)$.

Demonstração. Vamos supor que a condição $i)$ seja válida. Pelo Teorema de Extensão de Tietze (Teorema 4.1, [21], página 357), o operador Ψ pode ser estendido a um operador completamente contínuo de $K \cap \overline{\Omega}_2$ em K, o qual também denotaremos por Ψ, por simplicidade de notação. Suponhamos que Ψ não possua pontos fixos em $K \cap \partial\Omega_1$ e $K \cap \partial\Omega_2$.

Afirmamos que

$$\Psi x \neq \mu x, \ \text{para quaisquer } x \in K \cap \partial\Omega_1 \ \text{ e } \ \mu \geq 1. \tag{12}$$

De fato, caso contrário existiriam $x_0 \in K \cap \partial\Omega_1$ e $\mu_0 > 1$ (estamos assumindo que Ψ não possui pontos fixos em $K \cap \partial\Omega_1$) tais que $\Psi x_0 = \mu_0 x_0$ e, portanto, $\|\Psi x_0\| = \mu_0\|x_0\| > \|x_0\|$, o que contradiz a validade de i). Assim, por (12) e pelo Lema 9, temos que $i(\Psi, K \cap \Omega_1, K) = 1$.

Por outro lado, também podemos verificar

$$\Psi x \neq \mu x, \text{ para quaisquer } x \in K \cap \partial\Omega_2 \text{ e } 0 < \mu \leq 1. \tag{13}$$

Com efeito, se existissem $x_1 \in K \cap \partial\Omega_2$ e $0 < \mu_1 < 1$ (estamos assumindo que Ψ não possui pontos fixos em $K \cap \partial\Omega_2$) tais que $\Psi x_1 = \mu_1 x_1$, então teríamos $\|\Psi x_1\| = \mu_1\|x_1\| < \|x_1\|$, o que também contrariaria a validade da condição i).

Pois bem, em virtude da hipótese i), podemos afirmar que

$$\inf_{x \in K \cap \partial\Omega_2} \|\Psi x\| \geq \inf_{x \in K \cap \partial\Omega_2} \|x\| > 0, \tag{14}$$

já que $\theta \notin K \cap \partial\Omega_2$. Por (13) e (14) e Lema 12, temos que $i(A, K \cap \Omega_2, K) = 0$.

Pela aditividade do índice de ponto fixo i (Teorema 7-ii)), temos

$$i(\Psi, K \cap \left(\Omega_2 - \overline{\Omega}_1\right), K) = i(\Psi, K \cap \Omega_2, K) - i(\Psi, K \cap \Omega_1, K) = -1 \neq 0. \tag{15}$$

Por (15) e pelo Teorema 8, concluímos que Ψ tem pelo menos um ponto fixo em $K \cap (\Omega_2 - \Omega_1) \subset K \cap (\overline{\Omega}_2 - \Omega_1)$.

Caso a condição ii) seja válida, a demonstração segue de forma análoga. $\square$

O próximo resultado é uma versão alternativa do Teorema 15 e sua demonstração segue de forma similar.

Teorema 16 (Lema 2.1, [17], página 720)**.** *Sejam X um espaço de Banach real e $K \subset X$ um cone em X. Assuma que Ω_1, Ω_2 são subconjuntos abertos e limitados de X, tais que $\theta \in \Omega_1$ e $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. Suponha que*

$$\Psi : K \cap (\overline{\Omega}_2 - \Omega_1) \to K,$$

é um operador completamente contínuo, que cumpre uma das duas condições:

i) $\|\Psi y\| \leq \|y\|$, *para todo* $y \in K \cap \partial\Omega_1$, *e*

ii) Existe $\phi \in K - \{0\}$ *tal que* $y \neq \Psi y + \lambda\phi$ *para* $y \in K \cap \partial\Omega_2$ *e* $\lambda > 0$;

ou

iii) $\|\Psi y\| \leq \|y\|$, *para todo* $y \in K \cap \partial\Omega_2$, *e*

iv) Existe $\phi \in K - \{0\}$ *tal que* $y \neq \Psi y + \lambda\phi$ *para* $y \in K \cap \partial\Omega_1$ *e* $\lambda > 0$.

Nessas condições, Ψ *tem pelo menos um ponto fixo em* $K \cap (\overline{\Omega}_2 - \Omega_1)$.

Já apresentadas as versões do Teorema do Ponto Fixo de Krasnoselskii para cones, vamos relacioná-las com a existência de soluções $\omega-$ periódicas para a equação diferencial (4), através dos próximos resultados.

Lembramos que o espaço de Banach X e o cone K a serem mencionados foram definidos em 11 e que as notações δ, $\max f_0$, $\max f_\infty$, $\min f_0$ e $\min f_\infty$ foram estabelecidas em (6), (7) e (8), respectivamente.

Teorema 17. *Assuma que*

(H_1) $\min f_0 > 1$;

(H_2) *Exista* $\rho > 0$ *tal que* $f(t,u) < a(t)\rho$, *para* $\delta\rho \leq |u| \leq \rho$.

Nessas condições, a equação (4) *tem pelo menos uma solução* ω*-periódica em* $\mathbb{R}$.

Demonstração. Como $\min f_0 > 1$, existe uma constante positiva r_1, tal que $r_1 < \rho$ e

$$f(t,u) \geq a(t)|u|, \text{ para } |u| \leq r_1, \ u_j \geq \delta|u|, \ j = 1,2,\ldots,n. \tag{16}$$

Sejam

$$u(t) = (y(t-\tau_1(t)),\ldots,y(t-\tau_n(t))) \qquad \text{e} \qquad \Omega_1 = \{y \in X; \|y\| < r_1\}.$$

Então, para todo $y \in K \cap \partial\Omega_1$, temos

$$u_j(t) = y(t-\tau_j(t)) \geq \delta\|y\| = \delta r_1 \geq \delta|u(t)|$$

e

$$\delta r_1 < \delta\rho \leq |u(t)| = \max_{1\leq j\leq n}\{y(t-\tau_j(t))\} \leq \|y\| = r_1.$$

Defina $\phi(t) = 1$ para $t \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que

$$y \neq \Psi y + \lambda\phi, \text{ para } y \in K \cap \partial\Omega_1 \text{ e } \lambda > 0. \tag{17}$$

De fato, caso contrário, existiriam $y_0 \in K \cap \partial\Omega_1$ e $\lambda_0 > 0$, tais que $y_0 = \Psi y_0 + \lambda_0\phi$. Seja $\mu = \min_{t\in\mathbb{R}} y_0(t)$. Segue de (16) e do Lema 13 - parte iv) que

$$\begin{aligned}
y_0(t) &= (\Psi y_0)(t) + \lambda_0 \\
&= \int_t^{t+\omega} G(t,s) f(s, y_0(s-\tau_1(s)),\ldots,y_0(s-\tau_n(s)))ds + \lambda_0 \\
&\geq \int_t^{t+\omega} G(t,s)a(t)|u|ds + \lambda_0 \\
&= \int_t^{t+\omega} G(t,s)a(t) \max_{1\leq j\leq n}\{y_0(s-\tau_j(s))\}ds + \lambda_0 \\
&\geq \mu \int_t^{t+\omega} G(t,s)a(t)ds + \lambda_0 \\
&= \mu + \lambda_0,
\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Dessa maneira, obtemos $\mu \geq \mu + \lambda_0 > \mu$, uma contradição.

Por outro lado, (H_2) implica que existe $\rho > 0$ tal que $f(t,u) < a(t)\rho$, para $\delta\rho \leq |u|\rho$. Portanto, para $y \in K$, com $\|y\| = \rho$, temos $\delta\rho \leq |u| \leq \rho$ e

$$\begin{aligned}
(\Psi y)(t) &= \int_t^{t+\omega} G(t,s) f(s, y_0(s-\tau_1(s)),\cdots,y_0(s-\tau_n(s)))ds \\
&< \int_t^{t+\omega} G(t,s)a(t)\rho ds \\
&= \rho \\
&= \|y\|,
\end{aligned}$$

já que $\int_t^{t+\omega} G(t,s)a(t)ds = 1$ (Lema 13 -vi)). Consequentemente, temos

$$\|\Psi y\| \leq \|y\|, \text{ para qualquer } y \in K \cap \partial\Omega_2, \tag{18}$$

onde $\Omega_2 = \{y \in X : \|y\| < \rho\}$.

Por (17) e (18) e pelo Teorema 16, segue que Ψ tem pelo menos um ponto fixo $y_1 \in K \cap (\overline{\Omega}_2 - \Omega_1)$, isto é, existe $y_1 \in K \cap (\overline{\Omega}_2 - \Omega_1)$ tal que

$$y_1(t) = (\Psi y_1)(t), \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Claramente y_1 é uma solução ω-periódica da equação (4). □

Teorema 18. *Assuma que*

(H_3) $\max f_0 < 1$;

(H_4) *Exista* $\rho > 0$ *tal que* $f(t,u) > a(t)\rho$, *para* $\delta\rho \leq |u| \leq \rho$.

Nessas condições, a equação (4) *tem pelo menos uma solução* $\omega-$*periódica em* $\mathbb{R}$.

A demonstração do Teorema 17 será omitida aqui por ser similar à demonstração do Teorema 17.

Teorema 19. *Assuma que umas das seguintes hipóteses seja válida:*

(H_5) $\min f_0 > 1$ *e* $\max f_\infty < 1$;

(H_6) $\max f_0 < 1$ *e* $\min f_\infty > 1$.

Então, a equação (4) *tem pelo menos uma solução* $\omega-$*periódica em* $\mathbb{R}$.

Demonstração. Se a hipótese (H_5) for válida, então as condições (H_1) e (H_2) serão cumpridas e o resultado seguirá pelo Teorema 17.

De maneira análoga, se a hipótese (H_6) for válida, então as condições (H_3) e (H_4) serão cumpridas e o resultado seguirá pelo Teorema 18. □

5 Aplicação: modelo de Mackey & Glass

Para aplicarmos os resultados obtidos nas seções anteriores, devemos observar que as equações (2) e (3) são do tipo representado em (4).

Seja $u(t) = y(t-\tau(t))$, para $t \in \mathbb{R}$.

Para a equação (2), temos

$$\frac{f(t,u(t))}{a(t)u(t)} = \frac{b(t)}{1+y^n(t-\tau(t))} \cdot \frac{1}{a(t)y(t-\tau(t))} = \frac{b(t)}{a(t)} \cdot \frac{1}{y(t-\tau(t))(1+y^n(t-\tau(t)))}.$$

Daí,

$$\min f_0 = \liminf_{|u|\to 0} \min_{t\in[0,\omega]} \frac{b(t)}{a(t)} \cdot \frac{1}{y(t-\tau(t))(1+y^n(t-\tau(t)))} = \infty > 1$$

e

$$\max f_\infty = \limsup_{|u|\to\infty} \max_{t\in[0,\omega]} \frac{b(t)}{a(t)} \cdot \frac{1}{y(t-\tau(t))(1+y^n(t-\tau(t)))} = 0 < 1.$$

Para a equação (3), temos

$$\frac{f(t,u(t))}{a(t)u(t)} = \frac{b(t)y(t-\tau(t))}{1+y^n(t-\tau(t))} \cdot \frac{1}{a(t)y(t-\tau(t))} = \frac{b(t)}{a(t)} \cdot \frac{1}{1+y(t-\tau(t))}.$$

Daí,

$$\min f_0 = \liminf_{|u|\to 0} \min_{t\in[0,\omega]} \frac{b(t)}{a(t)} \cdot \frac{1}{1+y(t-\tau(t))} > 1 \Longleftrightarrow b(t) > a(t).$$

e

$$\max f_\infty = \limsup_{|u|\to\infty} \max_{t\in[0,\omega]} \frac{b(t)}{a(t)} \cdot \frac{1}{1+y(t-\tau(t))} = 0 < 1.$$

Portanto, pelo Teorema 19 temos que a primeira generalização do modelo proposto por Mackey e Glass possui sempre uma solução ω-periódica, enquanto que para a segunda versão generalizada isso ocorre apenas se $b(t) > a(t)$.

Referências

[1] BURTON, T. A. Perron-type stability theorems for neutral equations. **Nonlinear Analysis**., v. 55, n. 3, p. 285-297, 2003.

[2] BURTON, T. A. Stability by fixed point theory or Liapunov theory: a comparison. **Fixed Point Theory**, v. 4, n. 1, p. 15-32, 2003.

[3] BURTON, T. A. Fixed points and stability of a nonconvolution equation. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 132, n. 12, p. 3679-3687, 2004.

[4] BURTON, T. A. Stability and fixed points: addition of terms. **Dynamic Systems Applications**, v. 13, p. 459-478, 2004.

[5] BURTON, T. A. Stability by fixed point methods for highly nonlinear delay equations. **Fixed Point Theory**, v. 5, n. 1, p. 3-20, 2004.

[6] BURTON, T. A. Fixed points, stability, and exact linearization. **Nonlinear Analysis**, v. 61, n. 5, p. 857-870, 2005.

[7] BURTON, T. A. Fixed points, stability, and harmless perturbations. **Fixed Point Theory Applications**, p. 35-46, 2005.

[8] BURTON, T. A. Fixed points, Volterra equations, and Becker's resolvent. **Acta Math. Hungar.**, v. 108, n. 3, p. 261-281, 2005.

[9] BURTON, T. A.; FURUMOCHI, T. A note on stability by Schauder's theorem. **Funkcial. Ekvac.**, v. 44, n. 1, p. 73-82, 2001.

[10] BURTON, T. A.; FURUMOCHI, T. Fixed points and problems in stability theory for ordinary and functional differential equations. **Dynam. Systems Appl.**, v. 10, p. 89-116, 2001.

[11] BURTON, T. A.; FURUMOCHI, T. Asymptotic behavior of solutions of functional differential equations by fixed point theorems. **Dynam. Systems Appl.**, v. 11, p. 499-521, 2002.

[12] BURTON, T. A.; FURUMOCHI, T. Krasnoselskii's fixed point theorem and stability. **Nonlinear Analysis**, v. 49, n. 4, p. 445-454, 2002.

[13] BURTON, T. A.; FURUMOCHI, T. Asymptotic behavior of nonlinear functional differential equations by Schauder's theorem. **Nonlinear Studies**, v. 12, n. 1, p. 73-84, 2005.

[14] BURTON, T. A.; ZHANG, B. Fixed points and stability of an integral equation: Nonuniqueness. **Appl. Math. Lett.**, v. 17, n. 7, p. 839-846, 2004.

[15] LIMA, R; AFONSO, S. M. S. Soluções periódicas para versões generalizadas do modelo de produção de células sanguíneas *(hematopoiese)* de Mackey e Glass. In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 5., 2018, Bauru. **Caderno de trabalhos completos e resumos...** Bauru: Unesp, Faculdade de Ciências, 2018. p. 468-469. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1-8SZZnioKApdmQG6BaOTltJARzfwAB9P/view>. Acesso em: 9 nov. 2018.

[16] MACKEY, M. C.; GLASS, L. Oscillation and chaos in physiological control system. **Science**, v. 197, n. 4300, p. 287-289, 1977.

[17] ZHANG, W.; ZHU, D.; BI, P. Existence of periodic solutions of a scalar functional differential equation via a fixed point theorem. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 46, n. 5-6, p. 718-729, 2007.

[18] DAJUN, G.; LAKSHMIKANTHAM, V. **Nonlinear problems in abstract cones**. San Diego: Academic Press, 1988.

[19] CONWAY, J. B. **A course in functional analysis**. New York: Springer-Verlag, 1985.

[20] LAKSHMIKANTHAM, V.; LEELA, S. **Nonlinear differential equations in abstract spaces**. Oxford: Pergamon, 1981.

[21] DUGUNDJI, J. An extension of Tietze's theorem. **Pacific J. Math**. v. 1, n. 3, p. 353-367, 1951.

[22] BURTON, T. A. **Stability by fixed point theory for functional differential equations**. New York: Dover Publications, 2006.

[23] LIMA, R.; AFONSO, S. M. S. Análise de estabilidade e limitação de uma classe de equações diferenciais com retardamento via teorema do ponto fixo de Krasnoselskii. **C.Q.D.- Revista Eletrônica Paulista de Matemática**,

v. 11, p. 11-25, dez. 2017. Edição Iniciação Científica. Disponível em: <http://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/revista-cqd/edicoes>. Acesso em: 9 nov. 2018.