



Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 14, fev. 2019
Edição Ermac

Denis Mota de Sousa

Universidade Federal do Rio de Janeiro
denis@caxias.ufrj.br

Marcelo Leonardo dos Santos Rainha

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
marcelo.rainha@uniriotec.br

Nilson Costa Roberty

Universidade Federal do Rio de Janeiro
nilson@con.ufrj.br

Sobre a não-unicidade de soluções para um problema de reconstrução de fontes características para equação de difusão-advecção

On the non-unicity of solutions for a reconstruction characteristic source problem for the diffusion-advection equation

Resumo

Estudamos o problema inverso de reconstrução de fontes para equação de difusão-advecção (2D) a partir dos dados de Dirichlet e Neumann, considerando que o termo fonte procurado é uma função característica de algumas classes de conjuntos do plano. Mostramos que se a classe de fontes a se reconstruir é o conjunto das funções características das bolas de um determinado raio fixo, então o problema tem unicidade de soluções. Mostramos também que se a classe for o conjunto das funções características das bolas com centro em um determinado ponto fixo, o problema também tem unicidade de soluções. Complementarmente, apresentamos indícios numéricos de que o problema inverso de reconstrução de fontes para a equação de difusão-advecção a partir de informações no bordo de um domínio bidimensional não possui solução única quando consideramos a informação a priori de que a fonte é uma função característica de um conjunto estrelado.

Palavras-chave: Problemas Inversos. Reconstrução de Fontes. Difusão-Advecção. Conjunto Estrelado. Conjunto Convexo.

Abstract

We study the inverse problem of reconstructing sources for diffusion-advection equation (2D) from the Dirichlet and Neumann data, considering that the source term searched is a characteristic function of some classes of plane sets. We show that if the class of sources to be reconstructed is the set of characteristic functions of the balls of a given fixed radius, then the problem has uniqueness of solutions. We also show that if the class is the set of characteristic functions of the balls with center at a certain fixed point, the problem also has uniqueness of solutions. In addition, we present numerical indications that the inverse problem of reconstruction of sources for the diffusion-advection equation from information on the edge of a two-dimensional domain does not have a unique solution when we consider a priori information that the source is a characteristic function of a star-shaped set.

Keywords: Inverse Problems. Source Reconstruction. Diffusion-Advection. Star-Shaped Set. Convex Set.



1 Introdução

Neste trabalho abordaremos o problema inverso de determinação do termo fonte de equações de difusão-advecção a partir de informações no bordo do domínio. Este problema modela situações onde deseja-se localizar fontes poluentes em rios e lagos ou uma fonte térmica imersa em um fluido. Quando não temos informações sobre o tipo de função que representa o termo fonte da equação, este problema não possui unicidade de soluções e, portanto, é mal-posto.

Uma estratégia bastante explorada para dar boa colocação para problemas que não possuem unicidade de soluções é considerar que a solução pertence a uma classe conhecida de funções. Nos problemas de identificação de fontes é comum considerar a informação a priori de que a fonte é uma função característica de um subconjunto do domínio (DE SOUSA; ROBERTY, 2012a), uma fonte pontual (ANDRLE; BEN BELGACEM; EL BADIA, 2011; RAP et al, 2006), ou uma combinação linear de funções conhecidas (ALVES et al, 2008; HAMDI, 2007).

Novikov publicou um trabalho (NOVIKOV, 1938) pioneiro em problemas inversos de identificação de fontes, onde foi demonstrado que o problema para a equação de Poisson tem solução única quando temos a informação a priori de que a fonte é uma função característica de um conjunto estrelado. Baseado neste resultado surgiram outros trabalhos apresentando métodos para obter fontes para esta equação a partir de dados do bordo do domínio, como em (ALVES et al, 2008; EL BADIA; DUONG, 1998; EL BADIA; NARA, 2011).

Porém, existem indícios numéricos de que este mesmo tipo de fonte não é reconstruível quando acrescentamos termos advectivos e de decaimento ao problema. Vamos apresentar neste texto um experimento numérico que nos levam a esta conclusão.

Além disso, mostramos que se a classe de fontes a se reconstruir é o conjunto das funções características das bolas com um determinado raio, então o problema tem unicidade de soluções. E também que se a classe for o conjunto das funções características das bolas com centro em um determinado ponto, o problema também tem unicidade de soluções.

Este trabalho é basicamente o mesmo apresentado em De Sousa (2018) com acréscimo dos dois resultados descritos no parágrafo anterior.

2 Reconstrução de fontes difusivo-advectivas

O problema inverso que tratamos neste trabalho é apresentado a seguir.

Problema 1. Dada a condição de Dirichlet $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e a condição de Neumann $g_n : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, encontre o termo fonte $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\gamma\Delta u + \beta \cdot \nabla u + \alpha u = F & \text{em } \Omega \\ u = g & \text{em } \partial\Omega \\ \partial_n u = g_n & \text{em } \partial\Omega \end{cases} .$$

As constantes $\gamma > 0$, $\beta \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha > 0$ no problema acima são conhecidos como termos *difusivo*, *advectivo* e *decaimento*.

Este problema é mal-posto quando estamos considerando que os dados de entrada e as soluções estão nos espaços usualmente considerados em problemas diretos de equações diferenciais parciais. Para ilustrar a má colocação do Problema 1, vejamos um exemplo onde não existe unicidade para a solução.

Exemplo 2. Considere o **Problema 1** com $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| < 1\}$, $\alpha = 1$, $\beta = (1, 1)$, $\gamma = 1$, $u = 0$ e $\partial_n u = 0$, em $\partial\Omega$, onde estamos denotando por $\|\cdot\|$ a norma euclidiana do \mathbb{R}^2 .

Definamos as funções $u_1, u_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$u_1(x) = -\|x\|^4 + 2\|x\|^2 - 1,$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$, e

$$u_2(x) = -\|x\|^6 + 3\|x\|^2 - 2,$$

para todo $x \in \overline{\Omega}$.

Assim, temos

$$\begin{cases} -\Delta u_i + (1, 1) \cdot \nabla u_i + u_i = F_i & \text{em } \Omega \\ u_i = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ \partial_n u_i = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases},$$

para $i = 1, 2$, onde

$$F_1(x) = -\|x\|^4 + 18\|x\|^2 + 4(1 - \|x\|^2)x \cdot (1, 1) - 9,$$

para todo $x \in \Omega$, e

$$F_2(x) = -\|x\|^6 + 36\|x\|^4 + 3\|x\|^2 + 6(1 - \|x\|^4)x \cdot (1, 1) - 14,$$

para todo $x \in \Omega$. Logo F_1 e F_2 são soluções do problema inverso de identificação de fonte considerado neste exemplo, além da solução trivial.

Uma forma de obtermos uma boa colocação para este problema é restringindo a procura da solução para um conjunto menor, isto é, considerando informações *a priori* sobre a fonte.

Se $\omega \subset \Omega$, a função $\chi_\omega : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ definida por

$$\chi_\omega(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \omega \\ 0, & \text{se } x \notin \omega \end{cases},$$

para todo $x \in \Omega$, é chamada *função característica* de ω .

Dizemos que $\omega \subset \mathbb{R}^2$ é um *conjunto estrelado* em relação a um ponto x_0 se para todo x pertencente a ω temos que o segmento com extremidades em x_0 e x está contido em ω .

Se ω é um conjunto estrelado fechado com bordo contínuo, podemos representar seu bordo da forma

$$x_0 + R(\theta)(\cos \theta, \sin \theta), \quad (1)$$

onde $R : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$ é contínua e $R(0) = R(2\pi)$.

Vamos considerar o **Problema 1**, sabendo-se que o termos fonte é χ_ω , onde $\omega \subset \Omega$ é um conjunto estrelado. Note que, determinando o ponto x_0 e a função R descritos em (1), o termo fonte χ_ω está identificado.

Em Novikov (1938) foi considerado o problema de identificação de uma fonte característica de um conjunto estrelado para a equação de Poisson. Foi provado que a solução deste problema é única. Porém, em nossos experimentos numéricos encontramos indícios de que este mesmo problema para a equação de difusão-advecção **não** tem solução única.

3 Unicidade para fontes características de bolas com um raio conhecido

Consideremos, primeiramente, o problema seguinte.

Problema 3. Dadas $\kappa, G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com $G(x) > 0$, para todo $x \in \omega$, e $h, h_{\mathbf{n}} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, encontre $\omega \subset \Omega$ aberto tal que

$$\begin{cases} -\Delta u + \kappa^2 u = G\chi_{\omega}, & \text{em } \Omega \\ u = h & \text{em } \partial\Omega \\ \partial_{\mathbf{n}} u = h_{\mathbf{n}} & \text{em } \partial\Omega \end{cases} .$$

Em Rainha (2012), foi provado o seguinte teorema sobre o **Problema 3**.

Teorema 4. Sejam $\kappa \in L^{\infty}(\Omega)$, $G \in L^2(\Omega)$, $h \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ e $h_{\mathbf{n}} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Se ω_1 e ω_2 são soluções do **Problema 3** com bordos de classe C^2 tais que $\omega_1 \cap \omega_2$, $\omega_1 \setminus \omega_2$ e $\omega_2 \setminus \omega_1$ são simplesmente conexos, então $\omega_1 = \omega_2$.

Chamamos o conjunto $B_{r_0}(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - x_0\| < r_0\}$ de bola de raio r_0 com centro em x_0 . Como decorrência do **Teorema 4** temos o seguinte corolário.

Corolário 5. Se $F_1 = \chi_{B_{r_0}(x_1)}$ e $F_2 = \chi_{B_{r_0}(x_2)}$, com $x_1, x_2 \in \Omega$ e $r_0 > 0$ tais que $B_{r_0}(x_1), B_{r_0}(x_2) \subset \Omega$, são soluções do **Problema 1**, então $x_1 = x_2$.

Demonstração. Fazendo a mudança de variável

$$u(x) = e^{\frac{1}{2\gamma}\beta \cdot x} w(x), \quad (2)$$

para todo $x \in \bar{\Omega}$, e denotando

$$\kappa = \sqrt{\frac{4\alpha\gamma + \|\beta\|^2}{4\gamma^2}}, \quad (3)$$

$$h(x) = g(x)e^{-\frac{1}{2\gamma}\beta \cdot x}, \quad (4)$$

e

$$h_{\mathbf{n}}(x) = g_{\mathbf{n}}(x)e^{-\frac{1}{2\gamma}\beta \cdot x} - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2\gamma} g(x)e^{-\frac{1}{2\gamma}\beta \cdot x}, \quad (5)$$

para todo $x \in \partial\Omega$, encontramos o seguinte problema equivalente ao **Problema 1**.

Problema 6. Dados $h, h_{\mathbf{n}} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e κ como definidos acima, encontre $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta w(x) + \kappa^2 w(x) = \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{1}{2\gamma}\beta \cdot x} F(x) & \text{para } x \in \Omega \\ w = h & \text{em } \partial\Omega \\ \partial_{\mathbf{n}} w = h_{\mathbf{n}} & \text{em } \partial\Omega \end{cases} .$$

Considerando-se $F_1 = \chi_{B_{r_0}(x_1)}$, $F_2 = \chi_{B_{r_0}(x_2)}$ e $G(x) = \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{1}{2\gamma}\beta \cdot x}$, para todo $x \in \Omega$, como $B_{r_0}(x_1)$ e $B_{r_0}(x_2)$ têm bordo de classe C^2 e $B_{r_0}(x_1) \cap B_{r_0}(x_2)$, $B_{r_0}(x_1) \setminus B_{r_0}(x_2)$ e $B_{r_0}(x_2) \setminus B_{r_0}(x_1)$ são simplesmente conexos, então pelo **Teorema 4** temos $B_{r_0}(x_1) = B_{r_0}(x_2)$. \square

4 Unicidade para fontes características de bolas com um mesmo centro

Para demonstrar o resultado proposto nesta seção usaremos o seguinte lema.

Lema 7 (Valor Médio para Equação de Helmholtz Modificada). *Seja $B_{r_0}(x_0)$ inteiramente contido em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Suponhamos que v satisfaça*

$$-\Delta v + \kappa^2 v = 0 \text{ em } \Omega.$$

Então

$$\frac{1}{2\pi r_0} \int_{\partial B_{r_0}(x_0)} v \, d\ell = v(x_0) I_0(r_0 \kappa),$$

onde I_0 é a função de Bessel modificada de ordem zero.

Este resultado decorre diretamente da fórmula do valor médio para a equação de Helmholtz (COURANT, 1989).

Teorema 8. *Se $F_1 = \chi_{B_{r_1}(x_0)}$ e $F_2 = \chi_{B_{r_2}(x_0)}$, com $r_1, r_2 > 0$ tais que $B_{r_1}(x_0), B_{r_2}(x_0) \subset \Omega$, são soluções do **Problema 1**, então $r_1 = r_2$.*

Demonstração. Se F_1 e F_2 como descritos acima são soluções do **Problema 1**, fazendo a mudança de variável descrita em (2), temos que F_1 e F_2 são também soluções do **Problema 6**. Subtraindo as equações correspondentes do mesmo problema considerando as duas diferentes soluções, obtemos

$$\begin{cases} -\Delta \bar{w}(x) + \kappa^2 \bar{w}(x) = \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{1}{2\gamma} \beta \cdot x} (F_2(x) - F_1(x)) & \text{para } x \in \Omega \\ \bar{w} = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ \partial_{\mathbf{n}} \bar{w} = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}.$$

Seja $V = \{v \in H^1(\Omega) \mid -\Delta v + \kappa^2 v = 0, \text{ com } v(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in \Omega\}$. Multiplicando a primeira equação do sistema obtido por $v \in V$ e integrando sobre Ω , obtemos, do lado esquerdo,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\Delta \bar{w} v + \kappa^2 \bar{w} v \, dx &= \int_{\Omega} \bar{w} \Delta v - v \Delta \bar{w} \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \mathbf{n}} v - \bar{w} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \, d\ell \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade foi usada a segunda identidade de Green. Do lado direito, fazendo $m = \min_{\Omega} \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{1}{2\gamma} \beta \cdot x}$ e supondo, sem perda de generalidades, que $r_2 \geq r_1$, obtemos

$$0 \leq \int_{\Omega} m(F_2 - F_1)v \, dx \leq \int_{\Omega} \frac{1}{\gamma} e^{-\frac{1}{2\gamma} \beta \cdot x} (F_2 - F_1)v \, dx = 0,$$

para todo $v \in V$. Logo

$$\int_{\Omega} F_1 v \, dx = \int_{\Omega} F_2 v \, dx,$$

para todo $v \in V$.

Pelo **Lema 7**, temos

$$\int_0^{r_1} I_0(r\kappa)r \, dr = \int_0^{r_2} I_0(r\kappa)r \, dr.$$

Como I_0 é uma função estritamente crescente, temos que $r_1 = r_2$. □

5 Índícios numéricos de não unicidade para fontes características de conjuntos estrelados

Dizemos que $\omega \subset \mathbb{R}^2$ é um *conjunto convexo* se para todo x e y pertencentes a ω temos que o segmento com extremidades em x e y está contido em ω . Todo conjunto convexo ω é estrelado em relação a qualquer $x \in \omega$.

Em De Sousa e Roberty (2012a) apresenta-se um método para resolver numericamente o **Problema 1**, com termo fonte $F = \chi_{\omega}$, onde ω é um conjunto convexo. O método foi desenvolvido a partir de uma formulação variacional deste problema apresentada a seguir.

Problema 9. Dados $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_{\mathbf{n}} : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, encontre $\chi_{\omega} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} \chi_{\omega}(x) e^{-\frac{1}{2\gamma}\beta \cdot x} v(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} h_{\mathbf{n}} v - h \partial_{\mathbf{n}} v \, d\ell,$$

para todo $v \in V = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid -\Delta v + \kappa^2 v = 0\}$, onde

$$\kappa^2 = \frac{4\alpha\gamma + \|\beta\|^2}{4\gamma^2},$$

$$h(x) = g(x) e^{-\frac{1}{2\gamma}\beta \cdot x},$$

e

$$h_{\mathbf{n}}(x) = g_{\mathbf{n}}(x) e^{-\frac{1}{2\gamma}\beta \cdot x} - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2\gamma} g(x) e^{-\frac{1}{2\gamma}\beta \cdot x},$$

para todo $x \in \partial\Omega$.

Usamos como funções testes as *ondas planas*, dadas por $v_{\varphi}(x) = e^{\kappa(\cos \varphi, \sin \varphi) \cdot x}$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$, onde $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Para determinar o conjunto ω no problema acima, consideramos a parametrização de seu bordo como em (1), discretizamos o domínio de R em M pontos e o domínio da variável φ em N pontos. Assim obtemos um sistema dado por

$$\mathcal{F}(x, r) = \mathbf{p},$$

onde $\mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ é uma função não-linear e $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^M$. Obtemos soluções aproximadas para este sistema usando o método de Levenberg-Marquardt (DENNIS JR; SCHNABEL, 1996).



Consideramos o **Problema 1**, sendo Ω a bola unitária com centro na origem e com parâmetros $\alpha = 1$, $\beta = 2(\cos \pi, \sin \pi)$ e $\gamma = 1.5$ para a equação. O termo fonte investigado foi a função característica χ_ω , onde ω é a união da parte interna da região delimitada pelas elipses de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = -0.5 + 0.2 \cos \theta \\ y = 0.3 + 0.1 \sin \theta \end{cases},$$

para $\theta \in [0, 2\pi)$, e

$$\begin{cases} x = -0.5 + 0.1 \cos \theta \\ y = 0.3 + 0.3 \sin \theta \end{cases},$$

para $\theta \in [0, 2\pi)$. A primeira equação representa a elipse com semi-eixos 0.2 e 0.1 e centro em $(-0.5, 0.3)$ e a segunda equação representa a elipse com semi-eixos 0.1 e 0.3 e mesmo centro. A fronteira e o centro de ω podem ser vistos em azul na **Figura 1**.

Obtivemos uma aproximação para u resolvendo numericamente o problema seguinte.

Problema 10. Dado ω como descrito acima, encontre $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -1.5\Delta u + 2(\cos \pi, \sin \pi) \cdot \nabla u + u = \chi_\omega & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}.$$

Para isso, utilizou-se o método de Galerkin com elementos lagrangeanos quadráticos, com uma malha de 859 elementos, sendo 73 elementos de bordo. A **Figura 2** mostra as curvas de nível da aproximação obtida para u .

A partir desta aproximação encontrada, utilizamos a fórmula

$$g_n(x) = \nabla u(x) \cdot \mathbf{n}(x)$$

com 500 pontos igualmente espaçados sobre $\partial\Omega$ para obter uma aproximação para $\partial_n u$.

Resolvemos o problema a seguir usando numericamente o método apresentado em De Sousa e Roberty (2012b).

Problema 11. Dada g_n obtida numericamente, encontre ω tal que

$$\begin{cases} -1.5\Delta u + 2(\cos \pi, \sin \pi) \cdot \nabla u + u = \chi_\omega & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ \partial_n u = g_n & \text{em } \partial\Omega \end{cases}.$$

Na **Figura 1** podemos constatar que nesta simulação o algoritmo nos deu como resposta um conjunto convexo próximo a ω em relação a localização e dimensão do conjunto. Porém o bordo do conjunto obtido não é tão próximo ao bordo de ω , o que nos leva a questionar se é possível desenvolver um algoritmo que nos dê uma aproximação melhor do que esta. Vejamos uma razão para acreditar que **não** seja possível.

Consideramos o **Problema 1**, com os mesmos coeficientes de difusão, advecção e decaimento utilizados nesta seção e com termo fonte χ_{ω^*} , onde ω^* é a elipse de semi-eixos 0.146492 e 0.256692 com centro em $(-0.5, 0.3)$. Estes valores foram escolhidos visando aproximar a fonte deste problema da fonte obtida na última simulação.

Obtivemos uma nova aproximação para u desta vez com a nova fonte χ_{ω^*} . Nas **Figuras 2** e **3** temos o gráfico de curvas de nível das aproximações para u obtidas para as fontes χ_ω e χ_{ω^*} , respectivamente. As aproximações para u obtidas com estas duas fontes são muito semelhantes.

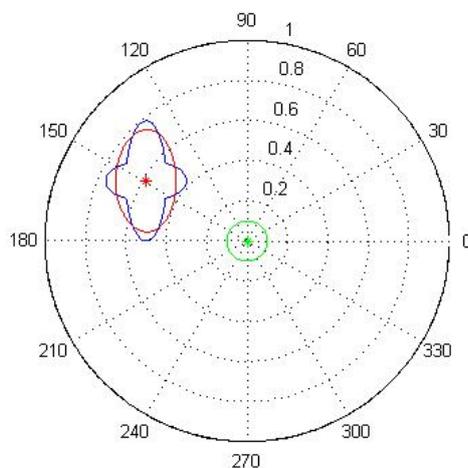


Figura 1: Fonte original em azul, estimativa inicial ξ^0 em verde e reconstrução obtida em vermelho.

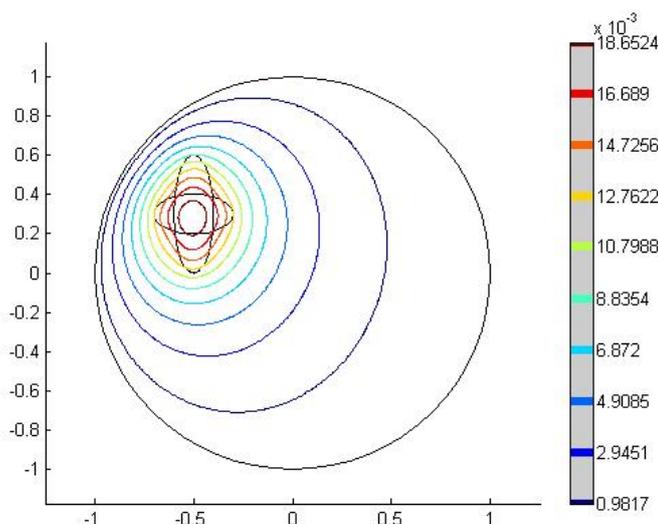


Figura 2: Curvas de nível da solução do problema direto com fonte χ_ω .

E mais, os valores aproximados para $\partial_n u$ também são muito próximos, verifica-se na **Figura 4**. Isto é um indício de que o problema inverso de reconstrução de fontes aqui estudado **não** possui unicidade de solução quando estas são consideradas no conjunto das funções características de um conjunto estrelado.

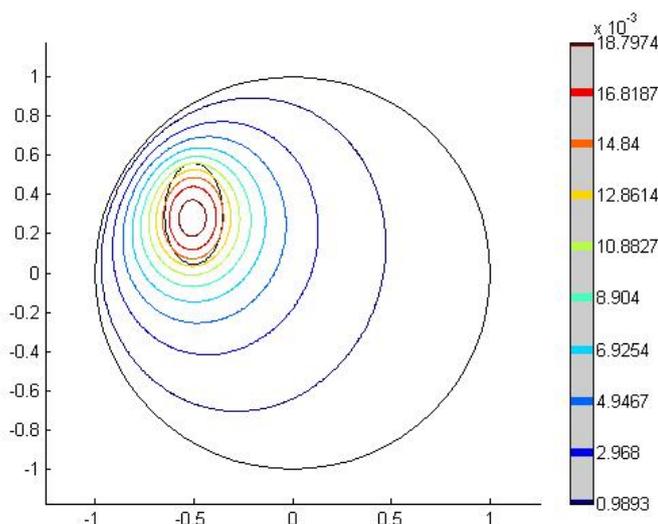


Figura 3: Curvas de nível da solução do problema direto com fonte χ_{ω^*} .

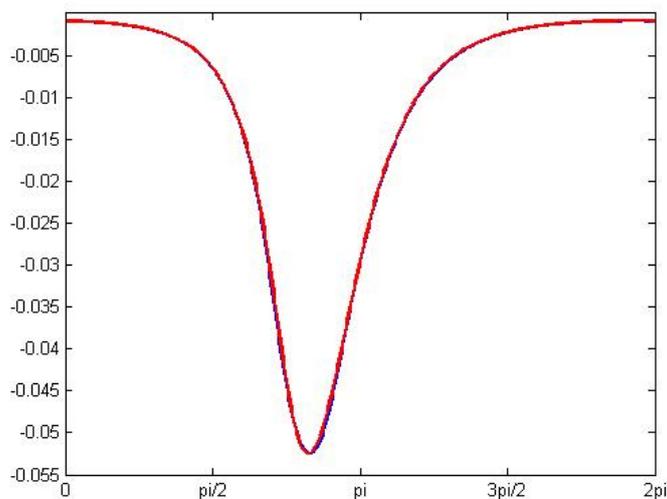


Figura 4: Gráficos de $\partial_n u$ obtida para as duas fontes. Em azul, a função obtida para a fonte χ_{ω} e em vermelho, a função obtida para a fonte χ_{ω^*} .

5.1 Conclusão

Mostramos aqui que, num problema inverso de reconstrução de uma fonte para a equação de difusão-advecção, se a classe de fontes a se reconstruir é o conjunto das funções características das bolas com um determinado raio fixado, então o problema tem unicidade de soluções. E que isso também acontece se a classe considerada for o conjunto das funções características das bolas com centro em um determinado ponto fixado.

Além disso, vimos também que existem indícios de que o problema inverso de reconstrução



de uma fonte característica de um conjunto estrelado não possui solução única. Considerando os nossos trabalhos anteriores onde apresentamos um algoritmo para obter fontes características de conjuntos convexos, podemos concluir que é plausível que este problema tenha unicidade de soluções para este tipo de fonte.

6 Agradecimentos

Nilson Costa Roberty agradece ao CNPq pelo suporte prestado durante esta pesquisa.

7 Referências bibliográficas

ALVES, C. J. S. et al. Recovering the source term in a linear diffusion problem by the method of fundamental solutions. **Inverse Problems in Science & Engineering**, v. 16, n. 8, p. 1005-1021, 2008.

ANDRLE, M.; BEN BELGACEM, F.; EL BADIA, A. Identification of moving pointwise sources in an advection-dispersion-reaction equation. **Inverse Problems**, v. 27, n. 2, 2011.

COURANT, R.; HILBERT, D. **Methods of mathematical physics**. New York, USA: Wiley, 1989. v. 2.

DENNIS JR, J. E.; SCHNABEL, R. B. **Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations**. Englewood Cliffs, USA: SIAM, 1996.

DE SOUSA, D. M. Sobre a não-unicidade de soluções para um problema de identificação de fontes características para equação de difusão-advecção. In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 5., 2018, Bauru. **Caderno de trabalhos completos e resumos...** Bauru: Unesp, Faculdade de Ciências, 2018. p. 306-311. Disponível em: <<https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/eventos2341/ermac-2018/caderno-de-trabalhos-e-resumos/>>. Acesso em: 18 jan. 2019.

DE SOUSA, D. M.; ROBERTY, N. C. Identificação de fontes para a equação unidimensional de difusão-advecção-decaimento. **TEMA: Trends in Applied and Computational Mathematics**, v. 12, n. 2, p. 101-110, 2011.

DE SOUSA, D. M.; ROBERTY, N. C. Um algoritmo para recuperar uma fonte difusiva-advectiva a partir de informações no bordo de um domínio bidimensional. In: CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA, 7., 2012, São Luís. **Anais...** São Luís - MA: [s.n.], Brasil, 2012a.

DE SOUSA, D. M.; ROBERTY, N. C. An inverse source problem for the stationary diffusion-advection-decay equation. **Inverse Problems in Science & Engineering**, v. 20, n. 7, p. 891-915, 2012b.

EL BADIA, A.; NARA, T. An inverse source problem for Helmholtz's equation from the Cauchy



data with a single wave number. **Inverse Problems**, v. 27, n. 10, 2011.

EL BADIA, A.; DUONG, T. H. Some remarks on the problem of source identification from boundary measurement, **Inverse Problems**, v. 14, n. 4, p. 883-891, 1998.

HAMDI, A. Identification of point sources in two dimensional advection-diffusion-reaction equation: application to pollution sources in a river. Stationary case. **Inverse Problems in Science & Engineering**, v. 15, n. 8, p. 855-870, 2007.

NOVIKOV, P. Sur le problem inverse du potentiel, **Doklady Akademii Nauk SSSR**, v. 18, n. 3, p. 165-168, 1938.

RAINHA, M. L. S. **Aspectos da teoria do potencial aplicados a problemas inversos de reconstrução de fontes**. 2012. 57 f. Tese (Doutorado em Engenharia Nuclear) - Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

RAP, A. et al. An inverse source problem for the convection-diffusion equation. **International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow**, v. 16, n. 2, p. 125-150, 2006.