Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 14, fev. 2019
Edição Ermac

Luiz Victor Lima Macêdo
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia
victor.mat.ifba@gmail.com

Igor Breda Ferraço
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia
igor.ferraco@ifba.edu.br

Utilização da matriz de Leslie para estudar o crescimento populacional feminino da cidade de Eunápolis

Using the Leslie Matrix to study female population growth in the city of Eunapolis

Resumo

Quando a variação de uma população se realiza em função do tempo, obtém-se um processo contínuo e discreto intitulado dinâmica de populações. Este processo é de fundamental importância no contexto das ciências aplicadas. O objetivo da dinâmica de populações é estudar as variações numéricas que sofrem as populações, determinar suas causas, preceder seu comportamento e analisar suas causas ecológicas. Neste trabalho, utilizamos o modelo matricial de Leslie para estudar o crescimento (ou decrescimento) populacional da cidade de Eunápolis, Bahia, a partir dos anos 2000, com o objetivo de comparar os resultados obtidos com os dados reais do sistema DATASUS. Para isto, utilizamos os dados contidos no mesmo para determinação dos parâmetros demográficos do modelo. Em seguida, realizamos simulações com o objetivo de estimar as populações nos anos de 2009 e 2018. Devido à proximidade dos dados reais com os resultados obtidos no ano de 2009 (não havia dados em relação a anos posteriores a 2012), concluímos que o modelo matricial de Leslie é uma ferramenta eficaz para realizar estimativas de populações femininas.
Palavras-Chave: Crescimento Populacional. Matriz de Leslie.

Abstract

When the variation of a population is performed as a function of time, a continuous and discrete process, called population dynamics, is obtained. The purpose of population dynamics is to study the numerical variations suffered by populations, determine their causes, precede their behavior and analyze their ecological causes. In this paper, we use the Leslie matrix model to study the growth (or decline) of the city of Eunápolis, from the year 2000, with the objective of comparing the results obtained with the actual data from the DATASUS system. For this, we use the data contained therein to determine the demographic parameters of the model. Then, we perform simulations in order to estimate the populations in the years 2009 and 2018. Due to the proximity of the actual data with the results obtained in the year 2009 and the growth of the city, we conclude that the Leslie matrix model is an effective tool to perform estimates of female populations.
Keywords: Population Growth. Matrix of Leslie.

Artigo recebido em set. 2018 e aceito em fev. 2019.

1 Introdução

O crescimento ou decrescimento populacional é, sem dúvida, um fenômeno de estudo muito importante no contexto das ciências aplicadas. Neste sentido, a contribuição da Matemática está em fornecer modelos que permitam analisá-lo quantitativamente em função do tempo. Assim, diversos modelos matemáticos já foram elaborados com o objetivo de estudar este fenômeno, conforme pode ser visto em Anton e Rorres (2001), Bacaer (2011), Bassanezi (2013) e Sodré (2007).

O modelo matricial (ou matriz) de Leslie é assim denominado em homenagem ao seu criador, o fisiólogo Patrick Holt Leslie (1900-1972). Leslie, conforme Bacaër (2011), nasceu em 1900 na Escócia e obteve o título de Bacharel em Fisiologia em 1921. Contudo, foi impedido de terminar seus estudos médicos devido a problemas de saúde. Assim, trabalhou por alguns anos no Departamento de Bacteriologia, até que em 1935 se interessou por Estatística e se juntou ao centro de pesquisa *Bureau of Animal Population*, que tinha como objetivo estudar as flutuações de populações animais. Mais tarde, em 1945, publicou seu artigo mais famoso, intitulado *On the use of matrices in certain populations mathematics*, onde apresenta o modelo aqui utilizado.

Neste trabalho, utilizamos o modelo matricial de Leslie para estudar o crescimento ou decrescimento populacional feminino da cidade de Eunápolis, a partir dos anos 2000, com o objetivo de estimar a população em anos posteriores e comparar com os dados reais obtidos no sistema DATASUS. Assim, pretendemos verificar a aplicabilidade do modelo, tendo em vista as mudanças e o crescimento que a cidade sofreu desde que foi emancipada em 1988. A escolha do tempo inicial (ano 2000) para este estudo justifica-se pela melhor adequação dos dados do sistema ao modelo.

Este artigo possui a seguinte estrutura: de início, na seção 2, apresentaremos o modelo matricial de Leslie. Detalhes adicionais poderão ser vistos em Anton e Rorres (2001) e Bacaer (2011). Em seguida, na seção 3, apresentaremos os dados do sistema DATASUS, a metodologia aplicada e discutiremos os resultados. Por fim, na seção 4, apresentaremos as conclusões.

2 Modelo matricial de Leslie

Suponhamos que seja I a idade máxima atingida pelas fêmeas de uma determinada população. Ao dividirmos a população em n faixas etárias, temos que a duração de cada faixa etária é dada por $\frac{I}{n}$, conforme a Tabela 1.

Tabela 1 – Faixas Etárias

Faixa Etária	Intervalo de Idade
1	$\left[0, {}^{I}/_{n}\right[$
2	$\left[{}^{I}/_{n}, {}^{2I}/_{n}\right[$
3	$\left[{}^{2I}/_{n}, {}^{3I}/_{n}\right[$
$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$\left[{}^{(n-2)I}/_{n}, {}^{(n-1)I}/_{n}\right]$
n	$\left[{}^{(n-1)I}/_{n}, I\right]$

Suponhamos que seja conhecido o número de fêmeas em cada uma das n faixas etárias no instante $t = 0$. Em particular, $x_1^{(0)}$ na primeira faixa, $x_2^{(0)}$ na segunda faixa, e assim por diante. Com estes n números, formaremos o vetor-coluna

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} \tag{1}$$

que chamaremos de *vetor de distribuição etária inicial.*

Conforme o tempo avança, o número de fêmeas em cada uma das n faixas etárias muda por conta de três processos biológicos: nascimento, morte ou envelhecimento. Descrevendo estes processos quantitativamente, poderemos projetar o vetor de distribuição inicial para o futuro.

A maneira mais fácil de estudar o processo de envelhecimento é observar a população em intervalos discretos de tempo, ou seja, $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k$. Desta forma, para observamos a variação da população em cada faixa devido ao envelhecimento, façamos:

$$t_0 = 0$$

$$t_1 = {}^{I}\!/_{n}$$

$$t_2 = {}^{2I}\!/_{n}$$

$$\vdots$$

$$t_k = {}^{kI}\!/_{n} \tag{2}$$

Daí, todas as fêmeas na $(i + 1) - ésima$ faixa etária no instante t_{k+1}, estavam na $i - ésima$ faixa etária no instante t_k.

Os processos de nascimento e morte entre dois tempos de observação sucessivos podem ser estudados de acordo com os parâmetros demográficos expostos na Tabela 2 a seguir.

Tabela 2 – Parâmetros demográficos

a_i $(i = 1, 2, 3, \dots, n)$	Número médio de filhas nascidas por fêmea durante o tempo em que ela está na $i - ésima$ faixa etária.
b_i $(i = 1,2, \dots, n)$	Fração de fêmeas na $i - ésima$ etária que se espera que vá sobreviver e passar para a $(i + 1) - ésima$ faixa etária.

De acordo com as definições, temos que: $a_i \geq 0$, para $i = 1, 2, 3, \dots, n$ e $0 < b_i \leq 1$, para $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$. Suporemos ainda que: nenhum dos b_i é nulo, pois desta maneira nenhuma fêmea sobreviveria a partir da $i - ésima$ faixa etária; pelo menos um dos a_i deve ser positivo, de modo que haja algum nascimento.

Assim, o vetor de distribuição etária no instante t_k é definido por

$$x^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} \tag{3}$$

em que $x_i^{(k)}$ é o número de fêmeas na $i - ésima$ faixa etária no instante t_k.

Desta forma, no instante t_k, as fêmeas na primeira faixa etária são exatamente as filhas nascidas entre os instantes t_{k-1} e t_k. Poderíamos escrever

$$\left\{\begin{matrix} número \\ de \\ fêmeas \\ na\ faixa \\ etária \\ 1 \\ no\ tempo\ t_k \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} número\ de \\ filhas\ nascidas \\ das\ fêmeas\ na \\ faixa\ etária\ 1 \\ entre\ os\ tempos \\ t_{k-1}\ e\ t_k \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} número\ de\ filhas \\ nascidas\ das\ fêmeas \\ na\ faixa\ etária\ 2 \\ entre\ os\ tempos \\ t_{k-1}\ e\ t_k \end{matrix}\right\} + \cdots + \left\{\begin{matrix} número\ de \\ filhas\ nascidas \\ das\ fêmeas\ na \\ faixa\ etária\ n \\ entre\ os\ tempos \\ t_k\ e\ t_{k-1} \end{matrix}\right\}$$

ou, matematicamente,

$$x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x^{(k-1)} + \cdots + a_n x_n^{(k-1)} \tag{4}$$

As fêmeas na $(i+1) - ésima$ faixa etária $(i = 1, 2, 3, \dots, n-1)$ no instante t_k são aquelas que estavam na $i - ésima$ faixa etária no instante t_{k-1} e que ainda vivem no instante t_k. Assim,

$$\left\{\begin{matrix} número\ de \\ fêmeas\ na\ faixa \\ etária\ i+1 \\ no\ instante\ t_k \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} fração\ de \\ femêas\ na\ faixa \\ etária\ i\ que \\ sobrevive\ e\ passa \\ para\ a\ faixa\ i+1 \end{matrix}\right\} \cdot \left\{\begin{matrix} número\ de \\ fêmeas\ na \\ faixa\ etária\ i \\ no\ instante\ t_{k-1} \end{matrix}\right\}$$

ou, matematicamente,

$$x_{i+1}^{(k)} = b_i \cdot x_i^{(k-1)}, i = 1, 2, \dots, n-1 \tag{5}$$

Utilizando notação matricial, podemos escrever as equações (4) e (5) da seguinte maneira:

$$
\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix} \tag{6}
$$

ou, simplificadamente,

$$
x^{(k)} = L \cdot x^{(k-1)}, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{7}
$$

em que L é a matriz de Leslie

$$
L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_n & 0 \end{bmatrix}. \tag{8}
$$

Observe que de (7), obtemos:

$$
x^{(1)} = L \cdot x^{(0)}
$$

$$
x^{(2)} = L \cdot x^{(1)} = L^2 \cdot x^{(0)}
$$

$$
x^{(3)} = L \cdot x^{(2)} = L^3 \cdot x^{(0)}
$$

$$
\vdots
$$

$$
x^{(k)} = L \cdot x^{(k-1)} = L^k \cdot x^{(0)} \tag{9}
$$

Portanto, ao conhecermos a distribuição etária inicial $x^{(0)}$ e a matriz de Leslie L, poderemos determinar a distribuição etária das fêmeas em tempos posteriores.

3 Aplicação do modelo na cidade de Eunápolis

Para estudarmos o crescimento ou decrescimento populacional feminino da cidade de Eunápolis, fizemos $I = 100$, $n = 10$ e escolhemos $t_0 = 2000$. Assim, a duração da faixa etária foi de 10 anos de acordo com os intervalos $[0-9], [10-19], [20-29], \ldots, [90-99]$.

Em relação à população feminina residente na cidade de Eunápolis ano 2000, obtivemos os seguintes dados através do sistema, conforme consta na Figura 1.

População residente por Faixa Etária segundo Município
Município: 291072 Eunápolis
Sexo: Feminino
Período: 2000

Município	Menor 1 ano	1 a 4 anos	5 a 9 anos	10 a 14 anos	15 a 19 anos	20 a 29 anos	30 a 39 anos	40 a 49 anos	50 a 59 anos	60 a 69 anos	70 a 79 anos	80 anos e mais	Total
TOTAL	882	3.585	4.229	4.918	5.365	7.937	6.045	4.338	2.537	1.604	851	417	42.708
291072 Eunápolis	882	3.585	4.229	4.918	5.365	7.937	6.045	4.338	2.537	1.604	851	417	42.708

Figura 1 - População residente na cidade de Eunápolis no ano 2000
Fonte: http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/tabcgi.exe?ibge/cnv/popba.def

Com isto, o vetor de distribuição inicial $x^{(0)}$ é dado por:

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 8696 \\ 10283 \\ 7937 \\ 6045 \\ 4338 \\ 2537 \\ 1604 \\ 851 \\ 417 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Cabe ressaltar que por não haver os valores exatos em relação às faixas etárias $[80-89]$, $[90-99]$, supomos que as 417 mulheres pertenciam à penúltima.

Conhecido então a distribuição etária inicial, faltava-se determinar os parâmetros de nascimento e sobrevivência para compormos a matriz de Leslie.

Para determinação dos parâmetros de natalidade a_i, com $i = 1, 2, \ldots, n$, utilizamos as informações contidas no sistema DATASUS, conforme as Figuras 2 e 3. Na Figura 2 temos o número de filhas nascidas por residência divididas em faixas etárias, enquanto que na Figura 3 por ocorrência.

Nascim p/resid.mãe por Idade da mãe segundo Município
Município: 291072 Eunápolis
Sexo: Fem
Período: 2000

Município	10 a 14 anos	15 a 19 anos	20 a 24 anos	25 a 29 anos	30 a 34 anos	35 a 39 anos	40 a 44 anos	45 a 49 anos	Idade ignorada	Total
TOTAL	18	280	334	149	74	39	5	2	24	925
291072 Eunápolis	18	280	334	149	74	39	5	2	24	925

Figura 2 – Mulheres nascidas por residência por faixa etária no ano 2000
Fonte: http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/tabcgi.exe?sinasc/cnv/nvba.def

Nascim p/ocorrênc por Idade da mãe segundo Município
Município: 291072 Eunápolis
Sexo: Fem
Período: 2000

Município	10 a 14 anos	15 a 19 anos	20 a 24 anos	25 a 29 anos	30 a 34 anos	35 a 39 anos	40 a 44 anos	45 a 49 anos	Idade ignorada	Total
TOTAL	20	379	421	188	98	53	12	2	35	1.208
291072 Eunápolis	20	379	421	188	98	53	12	2	35	1.208

Figura 3 – Mulheres nascidas por ocorrência por faixa etária no ano de 2000
Fonte: http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/tabcgi.exe?sinasc/cnv/nvba.def

Em resumo, o número de filhas nascidas em Eunápolis no ano 2000 pode ser visto na Tabela 3. Diferente do que foi feito em Macedo e Ferraço (2018), as 59 filhas nascidas que tiveram a idade da mãe ignorada, não foram adicionadas.

Tabela 3 – Número de filhas nascidas vivas na cidade de Eunápolis no ano 2000

Faixa Etária	Filhas Nascidas
$[00-09]$	0
$[10-19]$	697
$[20-29]$	1092

$[30-39]$	264
$[40-49]$	21
$[50-59]$	0
$[60-69]$	0
$[70-79]$	0
$[80-89]$	0
$[90-99]$	0

Daí, determinamos os a_i do seguinte modo:

$$a_i = \frac{p_i}{\sum_i^n p_i}, i = 1, 2, 3, \dots, n \tag{11}$$

em que p_i representa o número de filhas na $i - ésima$ faixa etária.

Desta forma, os valores obtidos para os parâmetros de natalidade em cada faixa etária podem ser vistos na Tabela 4 a seguir.

Tabela 4 – Parâmetros de natalidade por faixa etária

Faixa Etária	a_i
$[00-09]$	0
$[10-19]$	0,336
$[20-29]$	0,526
$[30-39]$	0,127
$[40-49]$	0,01
$[50-59]$	0
$[60-69]$	0
$[70-79]$	0
$[80-89]$	0
$[90-99]$	0

Em seguida, calculamos as taxas de sobrevivência, isto é, os b_i, $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$. Para isto, também utilizamos as informações contidas no sistema DATASUS, conforme Figuras 4 e 5.

Óbitos p/Residênc por Faixa Etária segundo Município
Município: 291072 Eunápolis
Sexo: Fem
Período: 2000

Município	Menor 1 ano	1 a 4 anos	5 a 9 anos	10 a 14 anos	15 a 19 anos	20 a 29 anos	30 a 39 anos	40 a 49 anos	50 a 59 anos	60 a 69 anos	70 a 79 anos	80 anos e mais	Idade ignorada	Total
TOTAL	25	5	2	3	3	6	14	12	20	28	31	30	1	180
291072 Eunápolis	25	5	2	3	3	6	14	12	20	28	31	30	1	180

Figura 4 – Número de óbitos por residência por faixa etária
Fonte: http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/tabcgi.exe?sim/cnv/obt10ba.def

Óbitos p/Ocorrênc por Faixa Etária segundo Município
Município: 291072 Eunápolis
Sexo: Fem
Período: 2000

Município	Menor 1 ano	1 a 4 anos	5 a 9 anos	10 a 14 anos	15 a 19 anos	20 a 29 anos	30 a 39 anos	40 a 49 anos	50 a 59 anos	60 a 69 anos	70 a 79 anos	80 anos e mais	Idade ignorada	Total
TOTAL	32	9	2	4	2	5	15	17	26	27	34	32	1	206
291072 Eunápolis	32	9	2	4	2	5	15	17	26	27	34	32	1	206

Figura 5 – Número de óbitos por ocorrência por faixa etária
Fonte: http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/tabcgi.exe?sim/cnv/obt10ba.def

Em resumo, o número de óbitos em Eunápolis no ano 2000 pode ser visto na Tabela 5. Os 2 óbitos que tiveram ignorada, não foram adicionados, diferente do que foi feito em Macedo e Ferraço (2018).

Tabela 5 – Número de óbitos femininos na cidade de Eunápolis no ano de 2000

Faixa Etária	Óbitos
$[00-09]$	75
$[10-19]$	12
$[20-29]$	11
$[30-39]$	29
$[40-49]$	29
$[50-59]$	46
$[60-69]$	55
$[70-79]$	65
$[80-89]$	62
$[90-99]$	0

Observe que supomos os óbitos classificados por 80 anos ou mais como pertencentes à penúltima faixa etária.

A partir daí, determinamos os $b_i, i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ do seguinte modo:

$$b_i = \frac{s_i}{x_i}, i = 1, 2, 3, \dots, n-1 \tag{12}$$

em que s_i representa o número de fêmeas sobreviventes na $i-ésima$ faixa etária.

Desta forma, os parâmetros de sobrevivência b_i obtidos podem ser vistos na Tabela 6 a seguir.

Tabela 6 – Parâmetros de mortalidade por faixa etária

Faixa Etária	b_i
$[00-09]$	0,991
$[10-19]$	0,998
$[20-29]$	0,998
$[30-39]$	0,995
$[40-49]$	0,993
$[50-59]$	0,981
$[60-69]$	0,965
$[70-79]$	0,923
$[80-89]$	0,851
$[90-99]$	$-$

Substituindo os valores obtidos em (6), temos a seguinte equação matricial:

$$
\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \\ x_5^{(1)} \\ x_6^{(1)} \\ x_7^{(1)} \\ x_8^{(1)} \\ x_9^{(1)} \\ x_{10}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}336 & 0{,}526 & 0{,}127 & 0{,}01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}991 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}998 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}998 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}995 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}981 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}965 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}923 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}851 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8696 \\ 10283 \\ 7937 \\ 6045 \\ 4338 \\ 2537 \\ 1604 \\ 851 \\ 417 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (13)
$$

Daí,

$$
x^{(1)} = \begin{bmatrix} 8441 \\ 8618 \\ 10262 \\ 7921 \\ 6015 \\ 4308 \\ 2489 \\ 1548 \\ 785 \\ 355 \end{bmatrix}. \qquad (14)
$$

Portanto, existem 8441 mulheres na primeira faixa etária, 8618 na segunda, e assim sucessivamente. Na Tabela 7, encontram-se os resultados obtidos pelo modelo em comparação com os dados reais do sistema DATASUS.

Tabela 7 – Comparação entre os resultados e os dados reais por faixa etária

Faixa Etária	Resultados do Modelo	DATASUS
$[0 - 9]$	8441	9923
$[10 - 19]$	8618	8938
$[20 - 29]$	10262	10166
$[30 - 39]$	7921	7723
$[40 - 49]$	6015	5909
$[50 - 59]$	4308	3886
$[60 - 69]$	2489	2163
$[70 - 79]$	1548	1225
$[80 - 89]$	785	589
$[90 - 99]$	355	$-$

Em relação ao valor total, consideramos a proximidade satisfatória: 50522 nos dados reais e 50742 na simulação do modelo, ou seja, uma diferença de 220 mulheres.

Na Tabela 8 a seguir, consta a diferença entre os mesmos por faixa etária.

Tabela 8 – Diferença entre os resultados e os dados reais no ano de 2009

Faixa Etária	Diferença
$[0-9]$	1482
$[10-19]$	320
$[20-29]$	96
$[30-39]$	198
$[40-49]$	106
$[50-59]$	422
$[60-69]$	323
$[70-79]$	326
$[80-89]$	196
$[90-99]$	$-$

Note que ao calcularmos $x^{(2)}$, obteremos uma estimativa da população feminina da cidade de Eunápolis no ano de 2018. De (6), vem que

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \\ x_5^{(2)} \\ x_6^{(2)} \\ x_7^{(2)} \\ x_8^{(2)} \\ x_9^{(2)} \\ x_{10}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}336 & 0{,}526 & 0{,}127 & 0{,}01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}991 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}998 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}998 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}995 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}981 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}965 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}923 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}851 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8441 \\ 8618 \\ 10262 \\ 7921 \\ 6015 \\ 4308 \\ 2489 \\ 1548 \\ 785 \\ 355 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Daí,

$$x^{(2)} = \begin{bmatrix} 9359 \\ 8365 \\ 8601 \\ 10241 \\ 7881 \\ 5972 \\ 4226 \\ 2401 \\ 1429 \\ 668 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Assim, existem 9359 na primeira faixa, 8365 na segunda e assim sucessivamente. No total, o modelo estimou que existem 59413 mulheres na cidade de Eunápolis. Contudo, não existem informações acerca da população feminina da cidade em 2018 no DATASUS. Assim, não houve como realizar comparações com os resultados obtidos.

4 Considerações finais

Neste trabalho, utilizamos o modelo matricial de Leslie para estudar o crescimento (ou decrescimento) populacional feminino da cidade de Eunápolis a partir do ano 2000. Para isto, utilizamos os dados do sistema DATASUS com objetivo de comparar os resultados com os dados obtidos em anos posteriores no mesmo sistema.

No processo de determinação dos parâmetros demográficos (Tabela 2), percebemos a importância dos mesmos, pois é a partir deles que se terá toda a distribuição etária posterior, conforme visto em (7). Além disto, é essencial que os métodos utilizados para determiná-los sejam fiéis a população em estudo, pois empregá-los de maneira errada poderiam levar a conclusões errôneas sobre o crescimento (ou descrecimento) da população estudada.

Em relação ao ano de 2009, consideramos os resultados obtidos satisfatórios, devido à proximidade dos resultados com os dados reais do sistema, como visto na Tabela 7, 8 e 9. Mais ainda em relação ao valor total, conforme a Tabela 8. Como no sistema DATASUS não havia informações quanto à população residente após o ano de 2012, não foi possível comparar os resultados do ano de 2018 com dados reais.

Cabe ressaltar que, embora a equação (7) apresente a distribuição etária da população para qualquer instante de tempo, ela não fornece uma ideia geral da dinâmica de crescimento (ou decrescimento). Para isto, deve-se investigar os autovalores e autovetores da matriz de Leslie associada. Este estudo, no entanto, ficará para trabalhos futuros.

Por fim, concluímos que o modelo matricial de Leslie é uma ferramenta eficaz para realizar estimativas de populações femininas.

5 Referências

ANTON, H. RORRES, C. **Álgebra linear e aplicações.** Trad: Claus Ivo Doering. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

BACAER, N. **A Shorty history of mathematical populational dinamycs.** Londres: Springer-Verlag, 2011.

BASSANEZI, C. B. **Modelagem matemática.** [2013]**.** Disponível em: <http://posmat.ufabc.edu.br/inverno/wp-content/uploads/2013/04/minicurso-ufabc1.pdf>. Acesso em: 29 nov. 2018.

MACEDO, L. V. L.; FERRAÇO, B. I. **Utilização da Matriz de Leslie para estudar o crescimento populacional da cidade de Eunápolis - BA**. In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 5., 2018, Bauru. **Caderno de trabalhos completos e resumos...** Bauru: Unesp, Faculdade de Ciências, 2018, p.485-486. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1-8SZZnioKApdmQG6BaOTltJARzfwAB9P/view>. Acesso em: 29 nov. 2018.

SODRÉ, U. **Modelos matemáticos.** Londrina, 2007. Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pdfs/modelos.pdf>. Acesso em: 29 nov. 2018.

TABNET DATASUS. **População Residente - Bahia**. [2018?] Disponível em: <http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/deftohtm.exe?ibge/cnv/popba.def>. Acesso em: 10 ago. 2018.

TABNET DATASUS. **Nascidos Vivos - Bahia**. [2018?]. Disponível em: <http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/deftohtm.exe?sinasc/cnv/nvuf.def>. Acesso em: 10 ago. 2018.

TABNET DATASUS. **Mortalidade - Bahia**. [2018?] Disponível em: <http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/deftohtm.exe?sim/cnv/obt10uf.def>. Acesso em: 10 ago. 2018.