Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 14, fev. 2019
Edição Ermac

Um sistema de colheita de energia investigado através do Método de Cardano Tartaglia

An energy harvesting system investigated through Cardano Tartaglia Method

Daniel Zarpelão Porcel
UNESP – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
danielzporcel@gmail.com

Antonio Roberto Balbo
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
antonio.balbo@unesp.br

Gustavo Tanaka Chaves
UNESP – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
gustavotanakachaves@gmail.com

Célia Aparecida dos Reis
UNESP – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
celia.reis@unesp.br

Resumo

Nos dias atuais a produção e o consumo de energia é importante para a realização de muitas atividades humanas, com isso há uma grande demanda a ser atendida, que aumenta gradativamente no decorrer dos anos. Devido ao aumento do consumo de energia, estudos e pesquisas tem sido desenvolvido relativos a sistemas de captação chamados de sistemas de colheita de energia. Esses estudos visam o desenvolvimento de sistemas que captam energia de fontes renováveis presentes no ambiente, das quais citamos, a solar, a eólica, a térmica, entre outras. Estas possibilitam sua conversão em energia elétrica, que pode ser diretamente utilizada ou armazenada para uso posterior. Um sistema de colheita de energia bem desenvolvido é aquele que colhe a energia gerada por vibração mecânica, captada através de material piezoelétrico. Este trabalho apresenta um sistema de colheita de energia modelado como um sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares, que será solucionado através do método de Cardano Tartaglia. Testes com um problema real são feitos, apresentando as soluções obtidas pelo método, bem como uma análise do retrato de fase desse.
Palavras-chave: Sistemas de Colheita de energia, Material Piezoelétrico, Método de Cardano Tartaglia.

Abstract

Nowadays the production and the consumption of energy is important to the realization of many human activities, with this there is a great demand to be attended, which it has been increasing gradatively with over the years. Due to the increasing of energy consum, studies and researches have been realized related to the energy captation systems, denominated energy harvesting systems. These studies search the development of systems, which they capture energy of renewable fonts found in the environment, such as the solar, the wind, the thermal energy, among others. These enable their conversion for electric energy, that can be directly used or armazened to posterior usage. A well-developed energy harvesting system is one it harvests the energy generated by mechanical vibration, captured through piezoelectric material. This work presents an energy harvesting system modelled as a nonlinear ordinary differential equations system, that it will be solved by the Cardano Tartaglia method. Tests with a actual problem are done, presenting the solutions obtained by the method, as well as a phase portrait analysis of this.
Keywords: Energy Harvesting Systems, Piezoelectric Material ,Cardano Tartaglia Method.

Artigo recebido em set. 2018 e aceito em fev. 2019.

1 Introdução

Nos dias atuais, a energia tem extrema importância à realização de todas as atividades humanas, o que provoca um aumento em relação à demanda global de produção e consumo de energia, que vem ocorrendo nos últimos 150 anos, citando como exemplos, a produção de alimentos, o transporte, a refrigeração, os processos industriais, entre outros. Nestes casos, a energia que vem sendo utilizada, vem de diversas fontes que podem ser classificadas como fontes renováveis e não renováveis, de acordo com o que foi estudado pelos autores Kong et al (2014) e Arbex (2016).

As fontes que por característica podem ser substituídas ou regeneradas por outras procedentes de fenômenos naturais, tais como fontes provenientes das ondas do mar, solar, eólica e geotérmica, incluindo as de reaproveitamento de biomassas, são denominadas de fontes renováveis. No entanto, quando não há a reposição em seu armazenamento, ou seja, tem um fornecimento limitado, podendo incluir nestas, fontes como petróleo, carvão e energia nuclear, são denominadas de fontes não renováveis. Algumas dessas fontes, têm sido utilizadas como meio de exploração comercial no mundo, de acordo com Shafiee e Topal (2009).

O uso de energia que são provenientes de combustíveis fósseis, como a produzida pela queima do carvão e petróleo, vem aumentando constantemente, sendo estas fontes com reserva e armazenamento limitados e que um dia poderão se esgotarem, além de serem poluentes ao meio ambiente. Com isso, há preocupações a respeito de explorar recursos que produzam energias não esgotáveis, que venham de fontes de energias não poluentes e com grande possibilidade de serem renováveis e duradouras.

Tendo em vista esse cenário, foram iniciados vários estudos sobre "energy harvesting", relativas a sistemas que, como o próprio nome indica, realizam a colheita de energia captadas através de vibrações por meio de sistemas mecânicos ou piezoelétricos. Estes sistemas buscam o desenvolvimento de tecnologias para o atendimento do consumo energético relativo às atividades humanas e industriais, com redução de poluentes, de forma que consiga abastecer a demanda energética em qualquer local e a qualquer momento, podendo ser utilizada como um meio profissional ou até mesmo como entretenimento, sem haver a dependência de combustíveis fósseis, produzidas apenas com fontes de energia provenientes de meios naturais, ou seja, que são consideradas como renováveis.

"Energy harvesting" ou colheita de energia tem como objetivo a exploração de energias provenientes do meio ambiente e sua conversão em energia elétrica de modo que, ela seja ilimitada e com a possibilidade de ser armazenada e utilizada de forma direta em locais de demandas específicas (ARBEX, 2016; CELLULAR, 2016). Esse processo de colheita de energia ocorre através da captação de energia mecânica, realizada através de uma fonte de vibração do ambiente (ILIUK et al, 2011).

A colheita de energia resulta em uma energia elétrica que é captada através da energia cinética do movimento (vibração) e da sua conversão em energia elétrica. Há a presença desse tipo de captação em vários lugares, sejam eles em meios industriais, no qual o grande nível de vibrações harmônicas facilita a sua captação e conversão (CELLULAR, 2016; WILLIAMS; YATES, 1996). Por meio de acoplamento piezoelétrico são explorados e captados os níveis de vibrações encontrados em grandes quantidades de aplicações, que incluem o movimento humano, como é o caso específico de dois exemplos que serão mostrados nesse trabalho, associados a campos de futebol, o primeiro no Japão, em que a energia é captada pela vibração dos torcedores e o outro no Brasil, em que a movimentação dos jogadores é captada e convertida em energia elétrica para a iluminação do campo. Mas há também, além de

captação através de movimentos do corpo humano, a captação por aparelhos domésticos, movimento de automóveis, prédios, pontes, entre outros.

Os sistemas de energy harvesting, em geral, são sistemas não lineares de equações diferenciais ordinárias (EDO´s) ou parciais (EDP´s), que podem ser analisados através de técnicas desenvolvidas à resolução destes, tais como as técnicas de análise e controle de sistemas, lineares e não lineares, as quais encontram-se em grande expansão. Exemplos destas são, as técnicas não lineares baseadas na teoria de estabilidade de Lyapunov e os métodos de linearização exata no espaço de estado (REIS; BALTHAZAR; BARBANTI, 2013; REIS et al, 2013, 2014a, 2014b, 2014c, 2015a, 2015b, 2015c; REIS; VASCONCELLOS; OLIVEIRA NETO, 2015; SILVA, 2003; SLOTINE, 1991).

Neste trabalho será investigado um modelo de sistema não linear de equações diferenciais de colheita de energia, o qual é definido para materiais piezoelétricos e foi proposto inicialmente em Ghouli et al (2016). Esse autor, em sua resolução, utiliza um método complexo para a determinação das soluções de equilíbrio desse sistema, chamado de método quase-periódico. A partir desse modelo, pretende-se explorar um método mais simples à sua resolução, conhecido como método de Cardano Tartaglia, o qual, de acordo com Lima (1987) e Garbi (1997), é um método algébrico que possibilita determinar raízes exatas de um polinômio de grau 3. Para encontrar esse polinômio, no sistema de equações não lineares do modelo analisado, é feita algumas transformações algébricas propostas em Ghouli et al (2016), as quais transformam esse sistema, de forma equivalente, em um polinômio do 6º grau. Com uma mudança de variável conveniente, esse polinômio é expresso em um polinômio de grau 3, cujas raízes podem ser determinadas pelo método algébrico citado. Assim, após encontrar as três raízes exatas deste polinômio, com substituições adequadas, estas serão convertidas nas soluções de equilíbrio do sistema de colheita de energia investigado. Após determinar as soluções de equilíbrio do sistema, mostra-se que estas são assintoticamente estáveis, apresentando-se seus planos de fase e realizando a análise de sua estabilidade. Dessa forma, o objetivo principal do trabalho é o de investigar e determinar soluções de equilíbrio para um sistema de colheita de energia, formulado para materiais piezoelétricos através do método de Cardano Tartaglia.

Destaca-se que, no trabalho divulgado em Porcel (2018), foi apresentado um modelo de colheita de energia e o método de resolução de Cardano Tartaglia. Neste trabalho, os passos do método foram revistos e um algoritmo foi apresentado, bem como uma aplicação de um sistema de colheita de energia, considerada a partir de dados apresentados em Ghouli et al (2016), foi solucionada pelo método citado. Verificou-se que, as soluções obtidas são assintoticamentes estáveis para a aplicação considerada, a partir da análise de estabilidade realizada para essas.

Neste trabalho, na Seção 2, apresentam-se exemplos de aplicações de modelos de colheita de energia. Em seguida, na Seção 3, é modelado um sistema de colheita de energia, o qual foi definido para materiais piezoelétricos. Na seção 4, será apresentada uma resolução deste sistema, com transformações algébricas equivalentes, através do método de Cardano Tartaglia e apresentando de forma explicita suas soluções de equilíbrio. Na seção 5, partindo de uma aplicação deste modelo vista em Ghouli et al (2016), serão apresentados os resultados numéricos obtidos, tais como, soluções de equilíbrio do modelo proposto e interpretação geométrica destas soluções através do plano de fases deste. Na seção 6 é feita as conclusões do trabalho e na Seção 7 apresentam-se as referências utilizadas para o desenvolvimento deste.

2 Aplicação nos dias atuais

É comum o estudo de colheita de energia de modo que seja apenas informado onde ela pode atuar. Dessa forma, essa seção irá apresentar dois exemplos dos dias atuais que captam energia através de fontes de vibração do corpo humano, que ocorre um em um estádio de futebol no Japão e outro em um campo de futebol no Brasil.

Os cientistas japoneses encontraram uma forma de diminuir os gastos com a energia elétrica em um estádio de futebol, isso tudo depende exatamente dos torcedores. Em um moderno estádio na cidade de Kobe há um gasto expressivo de energia elétrica e a partir desse cenário foi que os estudiosos da área, convocaram a torcida para ajudar na redução de gastos desse estádio.

Para ajudar, o torcedor necessita apenas vibrar durante o jogo, pois foram instaladas placas que captam a energia de acordo com o movimento do público presente ao jogo, o que faz com que, quanto mais se moverem, mais energia vão produzir.

Outro fato acontece no Brasil, na cidade do Rio de Janeiro, em um campo de futebol society que ganhou iluminação através dos próprios jogadores. Uma empresa holandesa, investiu em um projeto e colocou cerca de 200 telhas que capturam energia de acordo com a movimentação dos jogadores. Essas telhas, ficam debaixo do gramado e assim que captam o movimento das pessoas, elas agem como geradores, convertendo e transmitindo energia elétrica a painéis solares que foram instalados em torno do campo, cujo objetivo é "alimentar" os holofotes.

Essa empresa holandesa já instalou esses painéis por algumas estações de trem na Europa, por centros comerciais na Austrália e no Terminal 3 do Aeroporto de Heathrow, em Londres. Assim como essa empresa, os cientistas japoneses já instalaram placas numa prefeitura do Japão e também em uma ponte de Tóquio, com o qual capta energia através dos movimentos dos carros e ajuda na iluminação.

Na próxima seção, será apresentada a modelagem matemática de um sistema de colheita de energia de materiais piezoelétricos, o qual foi estudado por Ghouli et al (2016).

3 A modelagem matemática

Para este trabalho, é considerado um sistema de colheita de energia modelado por equações não lineares do seguinte modo:

$$\ddot{x}(t) + \delta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + \gamma\, x(t)^3 - X^{v(t)} = \alpha x(t-\tau) + f\ \ cos(\lambda\, t) \qquad (1)$$

$$\dot{v}(t) + \beta v(t) + k\dot{x}(t) = 0 \qquad (2)$$

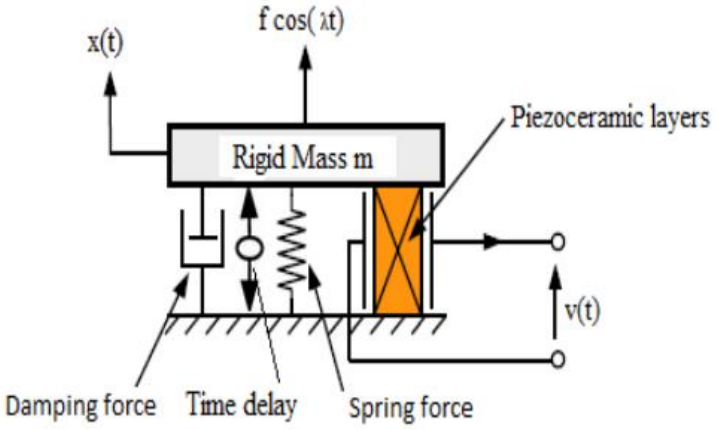
O sistema descrito em (1) e (2) é proposto com a definição de parâmetros e variáveis dependentes do tempo, definidas a seguir

- *x(t)* é o deslocamento relativo da massa rígida *m*;
- *v(t)* é a voltagem de resistência;
- δ é a taxa de amortecimento mecânico;
- γ é o parâmetro de rigidez;
- *X* é o termo de acoplamento piezoelétrico na equação mecânica;
- *k* é o termo de acoplamento piezoelétrico no circuito elétrico;
- β constante de tempo do circuito elétrico;

- α é o ganho e τ o tempo de atraso;
- f e λ são respectivamente a amplitude e a frequência de excitação.

Sendo este modelo, estudado por Ghouli et al (2016) e Arbex (2016) conforme Figura 1.

Figura 1: Esquema do sistema de colheita de energia (GHOULI et al, 2016).



A colheita de energia através de materiais piezoelétricos propõe que certos materiais têm a capacidade de gerar potência elétrica através da energia mecânica. Dessa forma o sistema massa-mola-amortecedor apresentado nas equações (1) e (2) e mostrado na Figura 1 apresenta uma força que é aplicada para cima e causa assim um deslocamento *x(t)* na direção indicada, além disso, possui uma estrutura de rigidez e um amortecedor que gera uma tensão no dispositivo piezoelétrico.

Este modelo é útil para fornecer informações quanto ao deslocamento, velocidade e aceleração da massa rígida, além de permitir cálculos da energia armazenada no material piezoelétrico devido a rigidez da viga e o deslocamento da massa, tornando esse modelo eficaz para descrever fenômenos mecânicos relativos a vigas.

Com os estudos feitos por Ghouli et al (2016), é possível fazer substituições de parâmetros nas equações (1) e (2) do seguinte modo:

$$\delta = \varepsilon\tilde{\delta},\ \ \gamma = \varepsilon\tilde{\gamma},\ \ X = \varepsilon\tilde{X},\ \ \alpha = \varepsilon\tilde{\alpha},\ \ f = \varepsilon\tilde{f},\ \ \sigma = \varepsilon\tilde{\sigma}$$

Com as substituições, as equações (1) e (2), podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x = \varepsilon[-\tilde{\delta}\dot{x}(t) - \tilde{\gamma}x(t)^3 + \tilde{X}v(t) + \tilde{\alpha}x(t-\tau) + \tilde{f}\,cos(\lambda t)] \quad (3)$$

$$\dot{v}(t) + \beta v(t) + k\dot{x}(t) = 0 \quad (4)$$

O novo sistema formado pelas equações (3) e (4), é reescrito e alterado, de forma equivalente, através da técnica conhecida como escala múltipla. Tais alterações fazem com que a solução do sistema (1) e (2) pode ser investigada a partir das expressões (3) e (4) e expressadas a seguir:

$$x(t) = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^3) \quad (5)$$

$$v(t) = v_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon v_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 v_2(T_0, T_1, T_2) + O(\varepsilon^3), \quad (6)$$

/

onde $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 t$. Substituindo (5) e (6) no sistema (1) e (2) as equações (5) e (6), é obtido um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, da forma:

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} = \dfrac{C_1}{2\omega_0} a + \dfrac{f}{2\omega_0} sin(\varphi) \\ a\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{C_2}{2\omega_0} a - \dfrac{C_3}{2\omega_0} a^3 + \dfrac{f}{2\omega_0} cos(\varphi) \end{cases}. \quad (7)$$

onde *a* é a amplitude e θ o período e tem-se definidos as variáveis a seguir:

$$C_1 = -\delta\omega_0 - \alpha\, sin(\omega_0\tau) - \frac{\kappa\beta\chi\omega_0}{(\beta^2 + \omega_0^2)}, \quad C_2 = 2\omega_0\sigma + \alpha\, cos(\omega_0\tau) - \frac{\kappa\beta\chi\omega_0^2}{(\beta^2 + \omega_0^2)}, C_3 = \frac{3\gamma}{4}$$

$$\varphi = \tilde{\sigma} T_2 - \theta$$

A partir do sistema (7), será feita a análise de seus pontos críticos, os quais são determinados por um método diferente do autor Ghouli et al (2016). Serão apresentados na próxima seção cálculos que transformam o sistema (7) em uma equação polinomial de modo que suas raízes sejam determinadas pelo método de Cardano Tartaglia.

4 A equação polinomial do 3º. grau e o método de Cardano Tartaglia

Para se desenvolver o método de Cardano Tartaglia no sistema de equações diferenciais apresentado em (7), é necessário que este sistema proposto passe por uma transformação de modo a transformá-lo em uma equação polinomial de grau 3.

Desta forma, serão feitas diversas substituições de maneira que (7) seja transformado, em uma equação de grau 6 e uma nova transformação para possibilitar que este seja investigado através de uma equação polinomial de grau 3. Para isso serão realizados alguns procedimentos, iniciando com a determinação dos pontos críticos relativos ao sistema não linear (7), os quais associam-se à resposta de estado estável. Considera-se desse, considera-se inicialmente:

$$\frac{da}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad (8).$$

Sob estas condições, considerando a primeira linha (7), obtém-se:

$$a = \frac{-f}{C_1} sen(\varphi), \quad sen(\varphi) = \frac{-C_1}{f} a, \quad \cos(\varphi) = \frac{\sqrt{f^2 - C_1^2 a^2}}{f}. \quad (9).$$

Aplicando a substituição de $\cos(\varphi)$ obtido em (8) à segunda linha do sistema (7), determina-se um polinômio de grau 6, expresso por:

$$C_3^2 a^6 - 2C_2 C_3 a^4 + (C_1^2 + C_2^2) a^2 - f^2 = 0. \quad (10)$$

Após determinada a equação de grau 6, é necessário fazer uma nova transformação de modo que esta seja equivalente a uma equação polinomial de grau 3 para assim ser utilizado o

método de Cardano Tartaglia. Desta forma, são definidas as seguintes substituições a serem feitas na equação (10):

$$x = a^2, \qquad A = -\frac{2C_2C_3}{C_3^2}, \qquad B = \frac{(C_1^2 + C_2^2)}{C_3^2}, \qquad C = -\frac{f^2}{C_3^2}. \tag{11}$$

Essas substituições são reescritas e expressas através de outra equação polinomial do 3º grau da seguinte forma:

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0. \tag{12}$$

Impondo (11) em (10) torna-se possível determinar a equação do 3º grau (12). Com isso, foram feitas outras substituições, conforme o método citado descreve, para determinar suas raízes.

Inicialmente, é feita a seguinte substituição:

$$x = y - \frac{A}{3} \tag{13}$$

Aplicando a substituição de (13) em (12), encontra-se a equação (14):

$$y^3 + (B - \frac{A^2}{3})y + (C - \frac{AB}{3} + \frac{2A^3}{27}) = 0 \tag{14}$$

Tomando como $p = B - \frac{A^2}{3}$ e $q = C - \frac{AB}{3} + \frac{2A^3}{27}$ e substituindo (14), obtemos (15):

$$y^3 + py + q = 0 \tag{15}$$

Como uma equação desta forma possui, pelo menos, uma raíz real, então ela será da forma $y = u + v$, substituído na equação (15), obtendo-se:

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0 \iff \tag{16}$$
$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0 \iff \tag{17}$$
$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0 \tag{18}$$

Utilizando a última equação apresentada em (18) e sendo imposta a condição de que $p = -3uv$ e $q = -(u^3 + v^3)$, encontra-se que:

$$u^3v^3 = \frac{-p^3}{27} \text{ e } u^3 + v^3 = -q \tag{19}$$

Após os cálculos feitos, considera-se u^3 e v^3 como variáveis, o problema equivale a resolução de uma equação do 2º grau seguinte modo:

$$z^2 - S\,z + P = 0 \tag{20}$$

considerando, *S* como a soma das raízes: $u^3 + v^3$ e *P* como o produto das raízes: u^3v^3. Dessa forma é resolvida a equação do 2º grau do seguindo modo:

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{21}$$

Resolvendo (21), obtém-se as partes u e v da primeira raiz: $r_1 = u + v$. Para a obtenção dessa raiz é calculado o discriminante:

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \tag{22}$$

A primeira raiz (r_1) encontrada satisfaz a equação considerando a translação ocorrida em (13), será dada por:

$$r_1 = u + v - \frac{A}{3} \tag{23}$$

Com a expressão (23), (12) é expressa através de um polinômio do segundo grau encontrado:

$$p(x) = x^2 + (A + r_1)x - \frac{C}{r_1} \tag{24}$$

Do polinômio as 3 raízes procuradas serão expressas de acordo com o sinal de D:

i) se D < 0, encontramos os seguintes valores:

$$r = \sqrt{\frac{-(-3uv)^3}{27}}, \text{ então:}$$

$$r_1 = 2\sqrt[6]{\frac{-(-3uv)^3}{27}}\, cos\left(\frac{arccos\left(\frac{u^3+v^3}{2r}\right)}{3}\right) - \frac{A}{3}; \tag{25a}$$

$$r_2 = 2\sqrt[6]{\frac{-(-3uv)^3}{27}}\, cos\left(\frac{arccos\left(\frac{u^3+v^3}{2r}\right) - 6uv\, i}{3}\right) - \frac{A}{3}; \tag{25b}$$

$$r_3 = 2\sqrt[6]{\frac{-(-3uv)^3}{27}}\, cos\left(\frac{arccos\left(\frac{u^3+v^3}{2r}\right) - 12uv\, i}{3}\right) - \frac{A}{3}. \tag{25c}$$

ii)

Se D > 0:

$$r_1 = u + v - \frac{A}{3}; \tag{26a}$$

$$r_{2,3} = \frac{-(A+u+v-\frac{A}{3}) \pm \sqrt{(u+v-\frac{A}{3}+A)^2 + \frac{4C}{x}}}{2}. \tag{26b}$$

iii)

$$\text{Se D} = 0,\ \ (u + v - \frac{A}{3} + A)^2 + \frac{4C}{x} = 0, \textit{então}:$$

$$r_1 = u + v - \frac{A}{3}; \tag{27a}$$

$$r_{2,3} = \frac{-(A+u+v-\frac{A}{3})}{2}. \tag{27b}$$

Desse modo, foi possível determinar as raízes da equação polinomial (12) através do método de resolução de Cardano Tartaglia.

As três raízes encontradas, nos casos i) – (25a) a (25c), ii) - (26a) e (26b) e iii) - (27a) e (27b), para a equação (12), deverão ser reescritas através dos termos expressos em (11), de modo que seja feita a substituição desses termos e obtenha-se as raízes da equação (10). Os pontos críticos ou soluções de equilíbrio do sistema de colheita de energia (7), devido à imposição das condições vistas em (8) e das expressões definidas em (11), auxiliam na determinação das soluções de equilíbrio deste sistema, as quais são determinadas, inicialmente, como as raízes da equação polinomial (12) associadas à variável de amplitude a do sistema, conforme os cálculos feitos a seguir:

i) Com D < 0, é possível determinar as seguintes raízes:

$$r = \sqrt{\frac{-\left(\frac{C_1^2 + C_2^2}{C_3^2} + \frac{\left(\frac{2C_2C_3}{C_3^2}\right)^2}{3}\right)^3}{27}}, \text{então:}$$

$$r_1 = 2\sqrt[6]{\frac{-\left(\frac{C_1^2+C_2^2}{C_3^2}+\frac{\left(\frac{2C_2C_3}{C_3^2}\right)^2}{3}\right)^3}{27}}\cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{\frac{f}{C_3^2}+\frac{-2C_2C_3\cdot(C_1^2+C_2^2)}{3C_3^4}+\frac{2C_2C_3}{27C_3^2}}{2r}\right)}{3}\right) - \frac{\frac{2C_2C_3}{C_3^2}}{3}; \tag{28a}$$

$$r_2 = 2\sqrt[6]{\frac{-\left(\frac{C_1^2+C_2^2}{C_3^2}+\frac{\left(\frac{2C_2C_3}{C_3^2}\right)^2}{3}\right)^3}{27}}\cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{\frac{f}{C_3^2}+\frac{-2C_2C_3\cdot(C_1^2+C_2^2)}{3C_3^4}+\frac{2C_2C_3}{27C_3^2}}{2r}\right)+2\left(\frac{C_1^2+C_2^2}{C_3^2}+\frac{\left(\frac{2C_2C_3}{C_3^2}\right)^2}{3}\right)i}{3}\right) - \frac{\frac{2C_2C_3}{C_3^2}}{3}; \tag{28b}$$

$$r_3 = 2\sqrt[6]{\frac{-\left(\frac{C_1^2+C_2^2}{C_3^2}+\frac{\left(\frac{2C_2C_3}{C_3^2}\right)^2}{3}\right)^3}{27}}\cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{\frac{f}{C_3^2}+\frac{-2C_2C_3\cdot(C_1^2+C_2^2)}{3C_3^4}+\frac{2C_2C_3}{27C_3^2}}{2r}\right)+4\left(\frac{C_1^2+C_2^2}{C_3^2}+\frac{\left(\frac{2C_2C_3}{C_3^2}\right)^2}{3}\right)i}{3}\right) - \frac{\frac{2C_2C_3}{C_3^2}}{3}. \tag{28c}$$

ii) Com D > 0, obtém-se os seguintes resultados:

$$r_1 = u + v - \frac{A}{3} \tag{29a}$$

$$r_{2,3} = \frac{\left(\frac{2C_2}{C_3} - a^2 \pm \sqrt{\frac{a^6C_3^2 - 4C_2C_3a^4 + 4C_2^2a^2 - 4f}{a^2C_3^2}}\right)}{2}. \tag{29b}$$

i) Com D = 0, obtém-se os seguintes resultados:

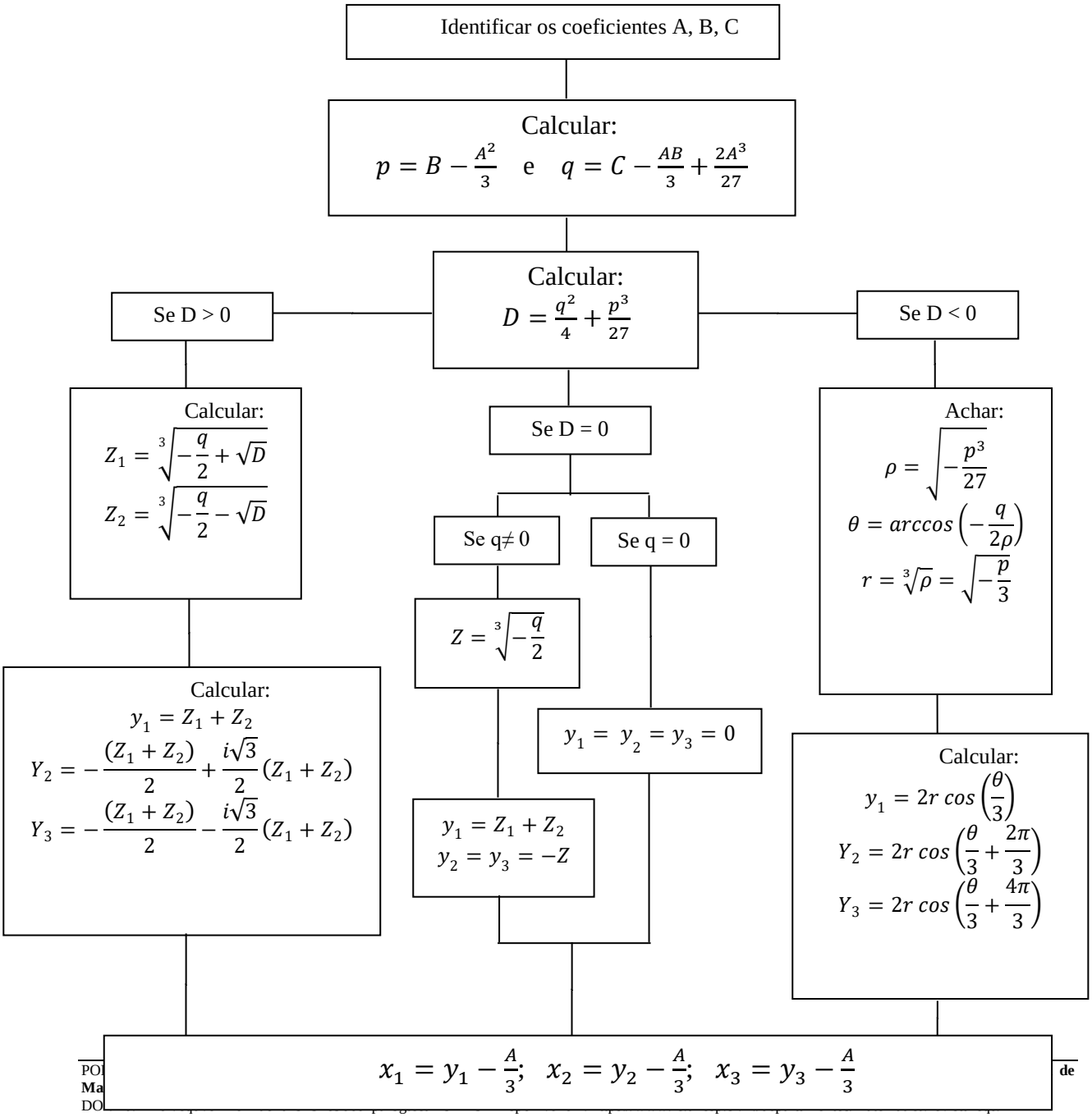
$$r_1 = u + v - \frac{A}{3}; \tag{30a}$$

$$r_{2,3} = \frac{\left(\frac{2C_2}{C_3} - a^2\right)}{2}. \tag{30b}$$

Para cada solução obtida nos casos i) – (28a) a (28c), ii) - (29a) e (29b) e iii) - (30a) e (30b), considerando-se (11), determinam-se as raízes da equação polinomial (10) associadas à variável *a*. Com as soluções de (10) calculadas, consideram-se as expressões em (9), para se determinar as soluções do sistema (7), relativas ao período φ.

De forma resumida é possível escrever todos esses cálculos através de um algoritmo, conforme mostrado abaixo:

Algoritmo de resolução do método de Cardano - Tartaglia



Assim, a partir do desenvolvimento e obtenção de soluções de equílibrio determinadas nesta seção, através do método de Cardano-Tartaglia, foi possível determinar soluções explícitas para o sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares (7), associado ao problema de colheita de energia estudado por Ghouli et al (2016), formulado pelas equações (1) e (2). Na próxima seção, as soluções obtidas na seção 4 serão exploradas à resolução de um problema real, relativo a um sistema de colheita de energia.

5 Resultados numéricos obtidos para um sistema de colheita de energia

Após a determinação, na seção 4, das soluções associadas à equação polinomial de 3º. Grau (12), utilizadas para obter as soluções da equação polinomial (10) e que, a partir destas, possibilitaram a obtenção dos pontos críticos relativos ao sistema de colheita de energia definido em (7). Testes numéricos são realizados, considerando-se os dados utilizados à resolução de um problema real, relativo a um sistema de colheita de energia através de uma placa de captação piezoelétrica, extraídos de Ghouli et al (2016) e apresentados na tabela 1:

Tabela 1: Parâmetros para análise assintótica de um problema de colheita de energia encontrados em Ghouli et al (2016)

Parâmetros do artigo	Valores
k	0.5
f	0.2
X	0.05
α	0.4
ω_0	0.6
β	0.9
δ	0.001
τ	0.5
σ	0.03
γ	0.07

Através dos parâmetros da tabela 1, tem-se que o valor do discriminante expresso na equação (21), calculado numericamente como $D = 49{,}3839$, satisfaz a condição ii) – (29a) e (29b), apresentada nesta seção.

Dessa forma, foi possível determinar *u* e *v* usando a primeira raiz para $\Delta > 0$.

$$x = u + v - \frac{A}{3} = a^2$$

Substituindo os valores numéricos encontrados, através do Software MatLab versão 2016a, tem-se os seguintes valores de x_1, x_2 e x_3 :

$$x_1 = 7{,}7192 + 2{,}1041i;$$
$$x_2 = 7{,}7192 - 2{,}1041i$$
$$x_3 = 0{,}226$$

Através das raízes encontradas, calculou-se os valores de a, considerando que $a^2 = x$. Porém, x_1 e x_2 são números complexos, então suas raízes devem ser calculadas por meio da Segunda Fórmula de Moivre, definida da seguinte maneira:

$$z = \sqrt[n]{|z|}\left(cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\, sen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$$

No qual $k\ e\ n \in \mathbb{N}$, tal que $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Desta forma as 6 raízes encontradas são:

$$a_1 = 2{,}8036 + 0{,}3752i;$$
$$a_2 = -2{,}8036 - 0{,}3752i;$$
$$a_3 = 2{,}8036 - 0{,}3752i;$$
$$a_4 = -2{,}8036 + 0{,}3752i;$$
$$a_5 = 0{,}4761\ ;$$
$$a_6 = -0{,}4761\ .$$

Para determinar φ, voltamos na equação (9) e aplicamos as substituições:

$$a = \frac{-f}{C_1} sen(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \varphi = arcsen\left(\frac{-C_1}{f}.a\right);$$

Resultando nos seguintes valores de φ:

$$\varphi_1 = 1{,}4130 + 1{,}2258i$$
$$\varphi_2 = -1{,}4130 - 1{,}2258i$$
$$\varphi_3 = 1{,}4130 - 1{,}2258i$$
$$\varphi_4 = -1{,}4130 + 1{,}2258i$$
$$\varphi_5 = 0{,}3155$$
$$\varphi_6 = -0{,}3155$$

Então, os pontos que satisfazem o sistema (7), segundo os parâmetros considerados, são:

$$\begin{aligned} P_1 &= (2{,}8036 + 0{,}3752i\ ;\ 1{,}4130 + 1{,}2258i); \\ P_2 &= (-2{,}8036 - 0{,}3752i\ ;\ -1{,}4130 - 1{,}2258i); \\ P_3 &= (2{,}8036 - 0{,}3752i\ ;\ 1{,}4130 - 1{,}2258i); \\ P_4 &= (-2{,}8036 + 0{,}3752i\ ;\ -1{,}4130 + 1{,}2258i) \\ P_5 &= (0{,}4761\ ;\ 0{,}3155); \\ P_6 &= (-0{,}4761\ ;\ -0{,}3155). \end{aligned} \qquad (34)$$

.

Para fins de validação numérica dos resultados encontrados, podemos substituir os valores dos pontos, mostrados acima (34), no sistema (7), obtendo os seguintes resultados:

Tabela 2: Valores encontrados a partir das substituições dos pontos no sistema.

Pontos encontrados: P(a, φ) em (34)	**Valores encontrados pela substituição dos pontos em (34) no sistema (7)**
$P_1 = (2{,}8036 + 0{,}3752i\ ;\ 1{,}4130 + 1{,}2258i);$	(0,0000; 0,0000)
$P_2 = (-2{,}8036 - 0{,}3752i\ ;-1{,}4130 - 1{,}2258i);$	(0,0000 ; 0,0000)
$P_3 = (2{,}8036 - 0{,}3752i\ ;\ 1{,}4130 - 1{,}2258i);$	(0,0000; 0,0000)
$P_4 = (-2{,}8036 + 0{,}3752i\ ;\ -1{,}4130 + 1{,}2258i);$	(0,0000 ; 0,0000)
$P_5 = (0{,}4761\ ;\ 0{,}3155);$	(0,0000 ; 0,0000)
$P_6 = (-0{,}4761\ ;\ -0{,}3155).$	(0,0000 ; 0,0000)

Na tabela 2, pode-se notar que, ao calcular os pontos em (34) no sistema de equações diferenciais (7), tem-se valores muito próximos de zeros, tanto para os pontos com coordenadas complexas com parte imaginária não nula (P_3, P_4, P_5 e P_6) quanto para os pontos

de coordenadas reais puras (P_1 e P_2). Isso mostra que os parâmetros adotados junto as raízes obtidas, fazem o sistema convergir para a origem. Sendo assim, pode-se concluir que o sistema (7) tem um comportamento estável em torno da vizinhança dos pontos críticos encontrados numericamente.

Nessa seção foram apresentadas as raízes do sistema de equações diferenciais ordinárias não lineares, através de algumas transformações até determinar um polinomio de grau 3 resolvido por Cardano Tartaglia. Na próxima seção, utilizando o software MatLab, será apresentada uma breve análise sobre um ponto crítico e o sistema não linear (7), onde foi obtido através de uma simulação computacional deste sistema, utilizando o método de Runge-Kutta Felberg, partindo-se dos pontos iniciais $(-0{,}3761\,;\,-0{,}2155)$, para obter aproximadamente P_6.

6 Análise dos resultados reais obtidos para o sistema de colheita de energia

Após o desenvolvimento do sistema de colheita de energia e a resolução através do método de Cardano Tartaglia, é possível fazer uma análise através de suas variações de acordo com o sistema, através de sua amplitude e de alguns parâmetros já definidos pelo autor Ghouli et al (2016), conforme visto na Tabela (1) da seção 4.

Definidos os parâmetros, foram realizadas algumas simulações utilizando o programa computacional *MatLab* 2016a, que resolve o sistema (7) pelo método numérico Runge-Kutta Felberg de quarta ordem, sendo que para tal tomamos um ponto inicial $(-0{,}3761\,;\,-0{,}2155)$ como ponto de partida para as simulações, no qual como observado a seguir, através da figura 2, a curva período-tempo convergindo para: $a_6 = -0{,}4761$

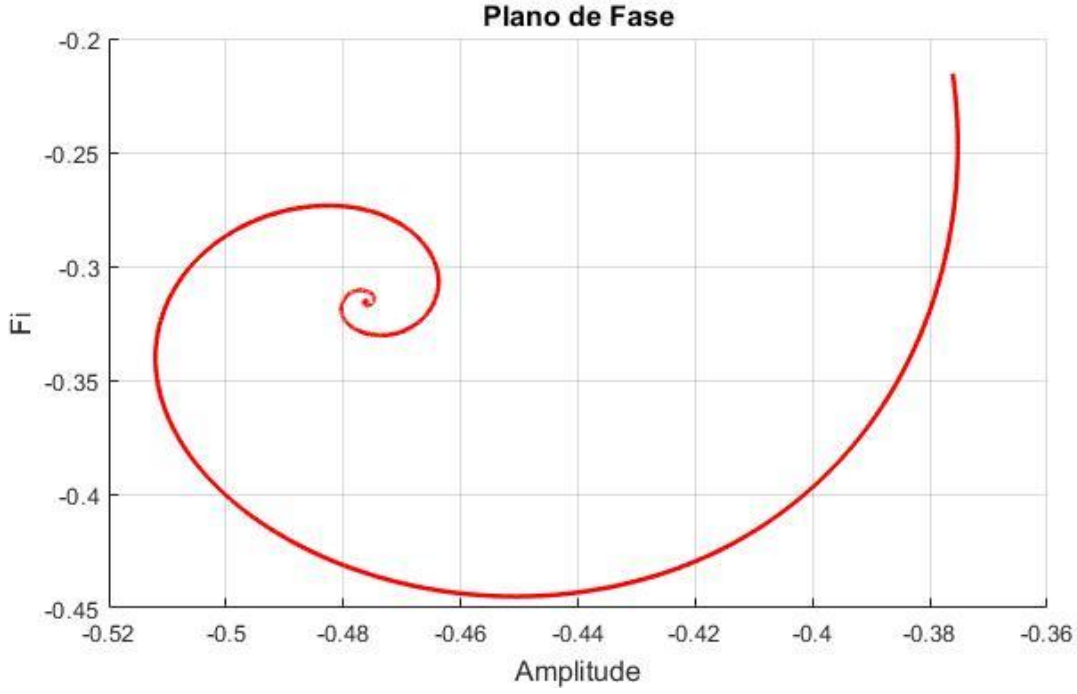
Figura 2: Variação da amplitude do sistema (7)

Na Figura 2, tem-se o histórico no tempo da variável a que representa a amplitude do sistema de colheita de energia. Nota-se que a oscilação se estabiliza quando o tempo tende a $+\infty$. A figura 3, mostra a curva variação angular ao longo do tempo convergindo para $\varphi_6 = -0{,}3155$.

Figura 3: Variação angular do sistema (7)

A Figura 4 mostra o plano de fase - histórico no tempo, das variáveis a_6 e φ_6, que expressam, respectivamente, a amplitude e o período do sistema, quando o tempo tende a $+\infty$. Observamos que a curva converge para próximo da solução $P_6 = (-0{,}4761\ ;\ -0{,}3155)$.

Figura 4: Plano de fase do sistema (7)



Na Figura 4, observa-se a convergência do sistema (7) para o ponto crítico $P_6 = (-0{,}4761\ ;\ -0{,}3155)$, que possui características de um ponto assintoticamente estável do sistema (SLOTINE, 1991).

A partir dos resultados apresentados na tabela 2, pelo método de Cardano Tartaglia, pode-se comparar com resultados diretos do sistema não linear (7) e concluir de que o método possibilita a determinação de valores exatos para a resolução deste sistema. Através dos resultados encontrados é possível fazer uma breve análise, baseada no estudo de Lyapunov, que indica que os valores obtidos convergem para um ponto crítico, sendo assim considerado como um ponto estável deste sistema, conforme demonstram as simulações presentes nessa seção. Essa análise será feita em trabalhos futuros.

Realizadas todas as simulações computacionais do sistema (7), através do método de Runge-Kutta Felbergh, é possível mostrar que, após de um determinado tempo, as curvas representando uma sequência de pontos obtida por esse método, se estabilizam quando se aproximam dos pontos de equilíbrio (tabela 2). Como demonstram as figuras 2,3 e 4, no início há uma grande amplitude e variação angular para a sequência de pontos representados, porém diminuem e se estabilizam à medida que se aproximam de um ponto de equilíbrio determinado pelo método de Cardano-Tartaglia.

7 Conclusão

Neste trabalho apresentou-se a descrição e análise de um sistema de colheita de energia, modelado através de equações diferenciais ordinárias não lineares e estudado em Ghouli et al (2016). No trabalho deste autor, o método quase periódico foi utilizado na determinação de pontos críticos relativos a este sistema, o qual apresenta complexidade e dificuldades inerentes à sua aplicação. Este trabalho diferencia-se de Ghouli et al (2016) por utilizar um método mais simples à resolução deste sistema, quando procurou-se determinar seus pontos críticos, o método de Cardano Tartaglia. Após transformar o sistema inicial, em uma equação polinomial de grau 6, a qual de forma equivalente, foi transformada em uma de grau 3, foi possível através do método citado determinar as suas raízes. As soluções destas equações possibilitaram explicitar os pontos de equilíbrio do sistema de colheita de energia investigado. Um teste numérico foi realizado considerando-se um problema real de colheita de energia e simulações numéricas, em torno da origem, através do software MatLab. Esse possibilitou uma análise gráfica da estabilidade assintótica do sistema, em relação a um ponto crítico, de acordo com o plano de fase analisado para os parâmetros a e φ. Desta forma, foi possível fazer a validação dos resultados obtidos para o sistema testado, de forma explícita, através dos valores determinados pelo método de Cardano Tartaglia e de forma aproximada, através do software MatLab.

Para trabalhos futuros, serão feitas simulações do sistema e obtenção dos seus pontos críticos por meio da teoria de Lyapunov, para verificar a estabilidade dos pontos determinados e também, fazer uma comparação com os resultados obtidos no trabalho de Ghouli et al (2016).

8 Referências

ARBEX, H. C. **Análise dinâmica de um modelo matemático não-linear e não-ideal de um dispositivo MagLev para a coleta de energia do meio ambiente**. 2016. 83 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Unesp, Bauru, 2016.

CELLULAR, A. C. S. **Analise da influência de efeitos não-lineares em sistemas de colheita de energia baseados em vibração utilizando materiais piezoelétricos**. 2016. 72 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-graduação e Pesquisa de Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

GARBI, G.G**. O romance das equações algébricas**. São Paulo: Makron Books, 1997.

GHOULI, Z. et al. Energy harvesting in a delayed and excited Duffing harvester device. **MATEC Web of Conferences,** v. 83, 2016.

ILIUK, I. et al. On a vibrating model of energy harvest, with nonlinear piezoelectric coupling and excited by a non-ideal Motor. In: CONFERENCE ON DYNAMICAL SYSTEMS - THEORY AND APPLICATIONS, 11., 2011. Lodz, **Proceedings...** Lodz, Poland: [s.n], 2011, p. 391-396.

KONG, L. B. et al. **Waste energy harvesting**. Berlin: Springer, 2014.

LIMA, E. L. A equação do terceiro grau. **Revista Matemática Universitária**, n. 5, p. 9-23, 1987.

PORCEL, D. Z.; BALBO, A. R.; REIS, C. A. Análise de solução de um sistema de colheita de energia através do método de Cardano-Tartaglia. In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 5., 2018, Bauru. **Caderno de trabalhos completos e resumos…** Bauru: Unesp, Faculdade de Ciências, 2018. p. 51-57. Disponível em: <https://drive.google.com/file/d/1-8SZZnioKApdmQG6BaOTltJARzfwAB9P/view>. Acesso em: 13 fev. 2019.

REIS, C. A. et al. Análise das deflexões grandes de uma viga com rigidez não linear utilizando a linearização exata a realimentação. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL (CNMAC), 35., 2014, Natal. **Proceedings...** Natal: [s.n], 2014c.

REIS, C. A. et al. Análise das vibrações forçadas de um oscilador de duffing via linearização Exata. In: CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA, 8., 2014, Uberlândia. **Anais ...** Uberlândia: ABCM/UFU, 2014b.
REIS, C. A. et al. Análise de um modelo populacional do mosquito transmissor da dengue via linearização exata. In: SAUSEN, A.; SAUSEN, A; SAWICKI, S. (Org.). **Pesquisas aplicadas em modelagem matemática.** Ijuí: Unijuí, 2015a. v. 4, p. 304.

REIS, C. A. et al. Analysis of phase plan of the Duffing oscillator and the internal dynamics associated with the feedback linearization. In: INTERNATIONAL CONGRESSO OF MECHANICAL ENGINEERING, 23., 2015. Rio de Janeiro. **Proceedings…** Rio de Janeiro: ABCM, 2015b.

REIS, C. A. et al. Asymptotic stabilization and internal dynamics of a simplified model of a Maglev system. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 22., 2013, Ribeirão Preto. **Proceedings**… Ribeirão Preto: [s.n], 2013.

REIS, C. A. et al. Feedback linearization of a population dynamics of the mosquito dengue transmitter. In: INTERNATIONAL CONGRESSO OF MECHANICAL ENGINEERING, 23., 2015. **Proceedings...** Rio de Janeiro: ABCM, 2015c.

REIS, C. A. et al. O comportamento de sistemas mecatrônicos usando ferramentas da dinâmica zero. In: SAUSEN, A.; SAUSEN, P.; SAWICKI, S. (Org.). **Pesquisas aplicadas em modelagem matemática.** Ijuí: Unijuí, 2014a. v.3, p. 169-194.

REIS, C. A.; BALTHAZAR, J. M.; BARBANTI, L. The input-state linearization of a maglev vehicle type. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL, 22., 2013. Ribeirão Preto. **Proceedings**… Ribeirão Preto: [s.n], 2013.

REIS, C. A.; VASCONCELLOS, L. A. S.; OLIVEIRA NETO, L. Um estudo da dinâmica interna para um problema com rigidez não linear. In: CONFERÊNCIA BRASILEIRA DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES, 2015, Natal. **Proceedings...** Natal: [s.n], 2015.

SHAFIEE, S.; TOPAL, E. An econometrics view of worldwide fossil fuel consumption and the role of US. **Energy Policy**, v. 36, n. 2, p. 775–786, 2008.

SHAFIEE, S.; TOPAL, E. When will fossil fuel reserves be diminished? **Energy Policy,** v. 37, n. 1, p. 181–189, 2009.

SILVA, G. V. M. **Controlo não linear**. Setúbal: Escola Superior de Tecnologia, 2003.

SLOTINE, J. –J. E.; LI, W. **Applied nonlinear control.** New Jersey: Prentice Hall, 1991.

WILLIAMS, C. B.; YATES, R. B. Analysis of a micro-electric generator for microsystems. **Sensors and Actuators A**, v. 52, n. 1-3, p. 8-11, 1996.