Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 16, dez. 2019

Tiago Augusto dos Santos Boza
UFSC - Universidade Federal de Santa Catarina
boza.tiago@ufsc.br

Hércules de Araujo Feitosa
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
hercules.feitosa@unesp.br

Pseudo-topologia, lógica do plausível e modelo relacional

Pseudo-topology, logic of plausible and relational model

Resumo

Esse trabalho tem como objetivo apresentar uma semântica de vizinhança para uma particular lógica modal, a lógica proposicional do plausível. A lógica do plausível foi introduzida no contexto das lógicas moduladas, para tratar de um quantificador não clássico, o qual tem seus modelos vinculados com uma variação do conceito de espaço topológico. Esta estrutura matemática de espaço pseudo-topológico pode ser destacada do ambiente das lógicas moduladas e se transformar num modelo para uma lógica proposicional, em que os seus operadores interpretam os operadores lógicos usuais e também um operador de caráter modal. Assim, por ser uma lógica modal não normal, a lógica proposicional do plausível não admite uma usual semântica de Kripke, mas com algum contorno assente em semântica de vizinhança, uma semântica relacional.

Palavras-chave: Lógica modal. Lógica proposicional do plausível. Semânticas de vizinhanças.

Abstract

This paper has as objective to present a neighbourhood semantics for modal logic that is the theme of the paper, the propositional logic of plausible. The logic of plausible was introduced in the context of modulated logics, to formalize a non-classical quantifier, whose models are connected with a variation of concept of topological space. This mathematical structure of pseudo-topological space can be detached from the ambient of modulated logics and be transformed in model for a propositional logic, which has its Boolean operators interpreted in the usual way and the new modal operator receive particular attention. As this is a modal logic of character non-normal, it does not admit a Kripke semantics. So in the paper, it is a neighbourhood semantics that is a relational semantics for the propositional logic of the plausible.

Keywords: Modal logic. Propositional logic of plausible. Neighbourhood semantics.

Artigo recebido em jul. 2019 e aceito em nov. 2019.

Introdução

De um modo geral, as chamadas lógicas modais inserem um novo operador não definido a partir dos operadores clássicos e, assim, estendem as lógicas clássicas.

Há também extensões modais de lógicas distintas da lógica clássica, mas o sistema aqui considerado está de acordo com este modo geral.

As usuais lógicas modais normais têm como semânticas essenciais os modelos de Kripke, ou semântica dos mundos possíveis, que resgatam boas intuições das lógicas modais normais.

Também tratamos com modelos de mundos possíveis, mas com pequenas adequações.

Iniciamos com uma breve apresentação da lógica modulada do plausível, introduzida em Carnielli e Grácio (2008) e Grácio (1999).

Grácio (1999) procurou formalizar quantificadores não lógicos que, de alguma maneira, contemplassem aspectos do processo de generalização desenvolvidos nos raciocínios indutivos. Estes quantificadores tinham a motivação de expressar proposições gerais, mas distintas do universal.

Para tanto, ela precisou de estruturas matemáticas que pudessem interpretar estes novos quantificadores com alguma sensatez intuitiva e interação com os demais aspectos da lógica.

A estrutura que nos interessa neste artigo é a dos espaços pseudo-topológicos, que é uma variação do usual conceito de espaço topológico. Esta estrutura foi idealizada como espaço de interpretação do quantificador *para uma boa parte*, chamado inicialmente de quantificador do plausível (GRÁCIO, 1999) e que neste artigo é também chamado de quantificador da ubiquidade, como em Carnielli e Grácio (2008).

Então, damos uma versão proposicional associada ao conceito de pseudo-topologia. Na sequência, definimos as álgebras correspondentes aos espaços pseudo-topológicos. Certamente, estas álgebras são modelos da lógica do plausível, na sua versão proposicional.

Como esta lógica proposicional do plausível recebeu originalmente uma semântica algébrica, passamos então a buscar por modelos relacionais para ela.

O elemento original deste trabalho é a arquitetura de uma semântica relacional para a lógica proposicional do plausível, que vem na última seção.

1 Lógica do Plausível

Uma lógica modulada é uma extensão conservativa da lógica clássica de primeira ordem, dada pela inclusão de um novo quantificador, não definível a partir dos usuais quantificadores: universal $\forall$ e existencial $\exists$.

Para a lógica tratada neste artigo, inclui-se um novo quantificador na linguagem da lógica clássica de primeira ordem, denotado por P, chamado de quantificador do *plausível* ou quantificador da *ubiquidade*.

Grácio (1999) denominou esta de *lógica do plausível* e a denotou por $\mathcal{L}(P)$.

Este novo quantificador tem a motivação intuitiva de capturar proposições da linguagem natural da forma *uma boa parte*.

A interpretação deste quantificador é dada na estrutura matemática chamada de *espaço quase-topológico*, a qual será em breve detalhada.

Assim, uma sentença quantificada do tipo $Px\ \varphi(x)$ significa que 'uma boa parte dos elementos x do domínio, satisfaz a propriedade φ', ou também, que 'há suficientes x tais que $\varphi(x)$'.

Deste modo, a formalização lógica quantificacional dos espaços pseudo-topológicos surgiu como um caso de lógica modulada, uma extensão da lógica clássica de primeira ordem com igualdade $\mathcal{L}$.

Para detalhes sobre $\mathcal{L}$ ver Ebbinghaus, Flum e Thomas (1984) ou Feitosa e Paulovich (2005).

A lógica estendida $\mathcal{L}(P)$ é determinada pelos seguintes acréscimos:

- a linguagem L de $\mathcal{L}(P)$ conta com um novo símbolo de quantificador P e sentenças do tipo $Px\ \varphi(x)$ são bem formadas em $\mathcal{L}(P)$.

- axiomas específicos do quantificador P:

(A_1) $Px\ \varphi(x) \wedge Px\ \psi(x) \to Px(\varphi(x) \wedge \psi(x))$

(A_2) $Px\ \varphi(x) \wedge Px\ \psi(x) \to Px(\varphi(x) \vee \psi(x))$

(A_3) $\forall x\ \varphi(x) \to Px\ \varphi(x)$

(A_4) $Px\ \varphi(x) \to \exists x\ \varphi(x)$

(A_5) $\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (Px\ \varphi(x) \to Px\ \psi(x))$

(A_6) $Px\ \varphi(x) \to Py\ \varphi(y)$, se y é livre para x em $\varphi(x)$.

- regras de dedução:

(MP) *Modus Ponens*: $\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$

(Gen) Generalização: $\varphi \vdash \forall x \varphi(x)$.

Os demais conceitos sintáticos são como os usuais.

Apresentaremos alguns resultados de $\mathcal{L}(P)$, cujas demonstrações podem ser encontradas em Carnielli e Grácio (2008).

Proposição 1.1 *As seguintes fórmulas são teoremas de $\mathcal{L}(P)$:*

(i) $Px\ (\varphi(x) \vee \neg\varphi(x))$

(ii) $(Px\ \varphi(x) \wedge Px\ \psi(x)) \to \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$

(iii) $Px\ \varphi(x) \to \neg\ Px\ \neg\varphi(x)$.

Teorema 1.2 *O cálculo de predicados $\mathcal{L}(P)$ é consistente.*

Teorema 1.3 *(Teorema da Dedução) Seja $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ um subconjunto de fórmulas de $\mathcal{L}(P)$. Se $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$, e x é uma variável livre de φ tal que na demonstração de ψ a partir de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ a regra (Gen) não é aplicada em nenhuma fórmula φ_i que depende de φ, então $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.*

Proposição 1.4 *Um subconjunto de fórmulas Γ de $\mathcal{L}(P)$ é consistente se, e somente se, todo subconjunto finito Γ_0 de Γ é consistente.*

Proposição 1.5 *Sejam Γ um conjunto de fórmulas e φ uma sentença de $\mathcal{L}(P)$. Então $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é inconsistente se, e somente se, $\Gamma \vdash \neg\varphi$.*

Proposição 1.6 *Se Γ é um subconjunto de fórmulas de $\mathcal{L}(P)$ consistente maximal e φ, ψ são sentenças de $\mathcal{L}(P)$, então:*

(i) $\Gamma \vdash \varphi$ *see* $\varphi \in \Gamma$

(ii) $\varphi \notin \Gamma$ *see* $\neg\varphi \in \Gamma$

(iii) $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ *see* $\varphi, \psi \in \Gamma$.

Teorema 1.7 *(Lindenbaum) Todo conjunto consistente de sentenças de $\mathcal{L}(P)$ está contido em um conjunto consistente maximal.*

Agora, os conceitos semânticos.

Definição 1.8 *Um espaço pseudo-topológico é um par* (E,Ω)*, em que E é um conjunto não-vazio e* Ω *um subconjunto de* $\mathcal{P}(E)$*. Cada membro de* Ω *é denominado um aberto de* (E,Ω)*, de maneira que:*

(i) *se* $A,B\in\Omega$*, então* $A\cap B\in\Omega$*;*
(ii) *se* $A,B\in\Omega$*, então* $A\cup B\in\Omega$*;*
(iii) $E\in\Omega$*;*
(iv) $\emptyset\notin\Omega$.

Definição 1.9 *Um subconjunto F de E é fechado em* (E,Ω) *quando seu complementar* F^C *é um aberto em* (E,Ω).

Cada topologia caracteriza uma operação de interior, mas não tratamos com definição de topologia, mas de pseudo-topologia. Temos, então, uma particular definição de interior.

Definição 1.10 *Seja* (E,Ω) *um espaço pseudo-topológico. O interior de* $A\subseteq\Omega$ *é denotado por* $\mathring{A}$ *e definido por:*

$\mathring{A}$ *é o maior* $D\in\Omega$ *tal que* $D\subseteq A$*, se há tal* $D\in\Omega$*;*
$\mathring{A}=\emptyset$*, se não há* $D\in\Omega$ *tal que* $D\subseteq A$.

Segue desta definição que $\mathring{A}\subseteq A$, para todo $A\in\mathcal{P}(E)$. E cada subconjunto não vazio $A\subseteq E$ é aberto em (E,Ω) se $A\subseteq\mathring{A}$.

Logo, se A é aberto então $\mathring{A}=A$, mas para $A\neq\emptyset$. Além disso, o interior de um conjunto é um conjunto aberto ou é o conjunto vazio.

As estruturas adequadas para $\mathcal{L}(P)$, estruturas do plausível, são extensões das estruturas de primeira ordem $\mathcal{A}$.

Assim dada uma estrutura $\mathcal{A}$, consideremos que o seu domínio é denotado por A. Uma estrutura do plausível, denotada por $\mathcal{A}^\Omega$, é determinada a partir de $\mathcal{A}$ pelo acréscimo de um espaço pseudo-topológico Ω sobre o universo A.

A interpretação dos símbolos de relação, função e constante é a mesma de $\mathcal{L}$ com relação à $\mathcal{A}$.

Definição 1.11 *A satisfação de uma sentença do tipo* $Px\ \varphi(x)$ *em* $\mathcal{A}^\Omega$ *é definida indutivamente por:*

- se φ *é uma fórmula cujas variáveis livres estão em* $\{x\}\cup\{y_1,...,y_n\}$ *e* $\overline{a}=(a_1,...,a_n)$ *é uma sequência de elementos de A, então:*

$$\mathcal{A}^\Omega\vDash Px\ \varphi[x,\overline{a}]\Leftrightarrow\{b\in A:\mathcal{A}^\Omega\vDash[b,\overline{a}]\}\in\Omega.$$

Para a sentença $Px\ \varphi(x)$, tem-se $\mathcal{A}^\Omega\vDash Px\ \varphi(x)\Leftrightarrow\{a\in A:\mathcal{A}^\Omega\vDash\varphi(a)\}\in\Omega$.

As outras noções semânticas são como as usuais.

Grácio (1999) demonstrou que as estruturas do plausível são modelos corretos e completos para $\mathcal{L}(P)$.

2 Lógica Proposicional do Plausível

Com ênfase apenas nos espaços pseudo-topológicos apresentamos uma versão proposicional da lógica do plausível, adaptada de Feitosa, Nascimento e Grácio (2009).

Denotamos a *lógica proposicional do plausível* por $\mathbb{L}(\nabla)$. Ela estende a lógica proposicional clássica (**LPC**) na linguagem $L = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ com o acréscimo do operador unário ∇, donde obtemos a linguagem proposicional $L = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \nabla\}$.

A lógica fica determinada pelo seguinte:

- Axiomas:
(Ax_0) tautologias da **LPC**
(Ax_1) $(\nabla\varphi \wedge \nabla\psi) \rightarrow \nabla(\varphi \wedge \psi)$
(Ax_2) $\nabla(\varphi \vee \neg\varphi)$
(Ax_3) $\neg\nabla\bot$.

- Regras de dedução:
(MP) *Modus Ponens*
$(R\nabla)$ $\vdash \varphi \rightarrow \psi \,/ \vdash \nabla\varphi \rightarrow \nabla\psi$.

Diante disso, φ e ψ são plausíveis se, e somente se, $\varphi \wedge \psi$ é plausível. Toda tautologia é plausível, nenhuma contradição é plausível. A regra (MP) diz que se $\varphi \rightarrow \psi$ e φ são plausíveis, então também ψ é plausível.

Podem ser demonstrados os seguintes resultados.

Proposição 2.1 (i) $\vdash \nabla\bot \rightarrow \bot$
(ii) $\vdash \nabla\varphi \rightarrow \nabla(\varphi \vee \psi)$
(iii) $\vdash \varphi \Rightarrow \vdash \nabla\varphi$.

Demonstração: *(i)* $\nabla\bot \rightarrow \bot \Leftrightarrow \neg\nabla\bot$, (Ax_3);
(ii) Segue imediatamente de $\varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ *pela regra* $(R\nabla)$;
(iii) Do axioma (Ax_2), *temos que* $\vdash \nabla\top$. *Agora, se* $\vdash \varphi$, *então* $\varphi \Leftrightarrow \top$ *e, então, pela regra* $(R\nabla)$ *temos* $\nabla\top \rightarrow \nabla\varphi$ *e, daí, por (MP), temos* $\vdash \nabla\varphi$. ■

Proposição 2.2 $\nabla\varphi \rightarrow \nabla(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\nabla\varphi \vee \nabla\psi) \rightarrow \nabla(\varphi \vee \psi)$.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ *Da Proposição 2.1 (ii), temos* $\nabla\varphi \rightarrow \nabla(\varphi \vee \psi)$ *e* $\nabla\psi \rightarrow \nabla(\varphi \vee \psi)$. *Logo, vale* $(\nabla\varphi \vee \nabla\psi) \rightarrow \nabla(\varphi \vee \psi)$.
$(\Leftarrow)$ *Se* $(\nabla\varphi \vee \nabla\psi) \rightarrow \nabla(\varphi \vee \psi)$, *da lógica proposicional clássica, temos* $\nabla\varphi \rightarrow (\nabla\varphi \vee \nabla\psi)$. *Logo, por transitividade, vale* $\nabla\varphi \rightarrow \nabla(\varphi \vee \psi)$. ■

3 Álgebras dos espaços pseudo-topológicos

Agora, apresentamos a álgebra do plausível, que corresponde à versão algébrica da lógica da seção anterior, também adaptada de Feitosa, Nascimento e Grácio (2009).

Definição 3.1 *Álgebra do Plausível é uma estrutura* $\mathbb{P} = (P, 0, 1, \wedge, \vee, \sim, \sharp)$, *de maneira que* $(P, 0, 1, \wedge, \vee, \sim)$ *é uma álgebra de Boole e* $\sharp$ *é o operador do plausível, sujeito a:*

(a_1) $\sharp a \wedge \sharp b \leq \sharp(a \wedge b)$
(a_2) $\sharp a \leq \sharp(a \vee b)$
(a_3) $\sharp 0 = 0$
(a_4) $\sharp 1 = 1$.

Proposição 3.2 *Se $\mathbb{P} = (P, 0, 1, \wedge, \vee, \sim, \sharp)$ é uma álgebra do plausível e $a, b \in P$, então:*
(i) $a \leq b \Rightarrow \sharp a \leq \sharp b$
(ii) $\sharp a \wedge \sharp b = \sharp(a \wedge b)$
(iii) $\sharp a \vee \sharp b \leq \sharp(a \vee b)$.
Demonstração: *(i) Se $a \leq b$, então $a \vee b = b$ e, então, $\sharp(a \vee b) = \sharp b$. Como por (a_2), $\sharp a \leq \sharp(a \vee b)$, então $\sharp a \leq \sharp b$;*
(ii) Por (a_1), $\sharp a \wedge \sharp b \leq \sharp(a \wedge b)$. Agora, como $a \wedge b \leq a, b$, por (i), temos que $\sharp(a \wedge b) \leq \sharp a \wedge \sharp b$;
(iii) Segue do fato que $a, b \leq (a \vee b)$ e do item (i). ■

A demonstração da proposição abaixo pode ser encontrada em Feitosa, Nascimento e Grácio (2009).

Proposição 3.3 *Para cada álgebra do plausível $\mathbb{P} = (P, 0, 1, \wedge, \vee, \sim, \sharp)$ existe um monomorfismo h de P num espaço pseudo-topológico de conjuntos definidos em $\mathcal{P}(\mathcal{P}(P))$.*
Demonstração: *Consideremos que $h : \mathbb{P} \to \mathcal{B}$ é um isomorfismo de Stone da álgebra de Boole $(P, 0, 1, \wedge, \vee, \sim)$ numa álgebra de conjuntos $\mathcal{B}$. Basta estendermos o isomorfismo de Stone para $h : \mathbb{P} = (P, 0, 1, \wedge, \vee, \sim, \sharp) \to (\mathcal{B}, \sharp)$ de modo que $h(\sharp a) = \sharp h(a)$.* ■

Definição 3.4 *A interpretação de $\mathbb{L}(\nabla)$ numa pseudo-topologia (E, Ω) é uma função v com as seguintes características:*

$$v(\bot) = \emptyset$$
$$v(\top) = E$$
$$v(\varphi \wedge \psi) = A \cap B$$
$$v(\varphi \vee \psi) = A \cup B$$
$$v(\neg\varphi) = A^C$$
$$v(\nabla\varphi) = \begin{cases} \mathring{A} & se\ \mathring{A} \in \Omega \\ \emptyset & no\ outro\ caso. \end{cases}$$

$\mathring{A}$ é o interior de A, que é o maior aberto contido em A, caso ele esteja Ω, ou é o conjunto vazio $\emptyset$, em caso contrário.

Proposição 3.5 *Para a interpretação v acima, temos que: $\vdash \varphi \to \psi \Leftrightarrow v(\varphi) \subseteq v(\psi)$.*
Demonstração: $\vdash \varphi \to \psi$ *see* $v(\varphi \to \psi) = E$ *see* $v(\varphi)^C \cup\ v(\psi) = E$ *see* $v(\varphi) \subseteq v(\psi)$. ■

4 Semântica Relacional para $\mathbb{L}(\nabla)$

Tendo em conta os sistemas de lógicas modais apresentados, por exemplo, em Bull e Segerberg (1984), Chellas (1999) e Priest (2001) e que a lógica proposicional do plausível é uma lógica modal não normal, então uma interpretação por modelos de Kripke não se aplica a $\mathbb{L}(\nabla)$. Contudo, introduziremos uma semântica que é uma variação dos modelos *a la* Kripke.

Apresentamos uma semântica relacional de vizinhança para a lógica proposicional do plausível e, então, a adequação entre este modelo relacional e a axiomática introduzida anteriormente.

Definição 4.1 *Um modelo relacional $\mathcal{M}$ para a lógica proposicional do plausível é uma terna $\mathcal{M} = \langle W, S, V \rangle$, em que:*

- W é um conjunto não-vazio de mundos possíveis;

- S uma função que associa cada $x \in W$ um conjunto de subconjuntos de W, isto é, $S(x) \subseteq \mathcal{P}(W)$, de tal modo que satisfaz as seguintes condições:

(i) *se $X \in S(x)$ e $Y \in S(x)$, então $X \cap Y \in S(x)$;*

(ii) *se $X \in S(x)$, então $X \cup Y \in S(x)$;*

(iii) $\emptyset \notin S(x)$*;*

(iv) $W \in S(x)$*;*

- V é uma valoração em W, isto é, uma função do conjunto das fórmulas atômicas de $\mathbb{L}(\nabla)$ em $\mathcal{P}(W)$.

Agora, temos de definir condições para que as fórmulas sejam válidas nesta nova estrutura.

Definição 4.2 *O conjunto verdade de φ em $\mathcal{M}$ é denotado por $\| \varphi \|^{\mathcal{M}}$ e é definido por $\| \varphi \|^{\mathcal{M}} = \{x \in W : \models_x^{\mathcal{M}} \varphi\}$.*

Esta definição diz que no modelo $\mathcal{M}$, ao tomarmos o mundo x, temos que a fórmula φ é verdadeira.

Definição 4.3 *Sejam $\mathcal{M}$ um modelo e $x \in W$. Uma fórmula φ é verdadeira no mundo x, o que é denotado por $\models_x^{\mathcal{M}} \varphi$, se:*

(i) $\models_x^{\mathcal{M}} p_i \Leftrightarrow x \in V(p_i)$*, quando p_i é uma variável proposicional;*

(ii) *as condições para os operadores Booleanos seguem como usualmente;*

(iii) $\models_x^{\mathcal{M}} \nabla\varphi \Leftrightarrow \| \varphi \|^{\mathcal{M}} \in S(x)$.

Em geral, denotamos o conjunto verdade φ apenas por $\| \varphi \|$.

Definição 4.4 *Uma fórmula φ é válida num modelo $\mathcal{M}$, quando é verdadeira para todo $x \in W$.*

Neste caso, a fórmula é verdadeira em qualquer mundo x de $\mathcal{M}$ e, portanto, ela não depende do mundo considerado.

Definição 4.5 *A fórmula φ é válida quando é verdadeira em todo modelo $\mathcal{M}$.*

Uma fórmula válida independe do modelo considerado. Neste contexto, ela deve ser universalmente aceita.

Denotamos que uma fórmula φ é válida num modelo $\mathcal{M}$, ou que o modelo $\mathcal{M}$ satisfaz a fórmula φ, por $\models^{\mathcal{M}} \varphi$. Se a fórmula φ é válida, então escrevemos apenas $\models \varphi$.

Definição 4.6 *Se Γ é um conjunto de fórmulas e $\mathcal{M}$ é um modelo, então o modelo $\mathcal{M}$ satisfaz o conjunto Γ, o que é denotado por $\models^{\mathcal{M}} \Gamma$, se $\models^{\mathcal{M}} \varphi$, para cada $\varphi \in \Gamma$.*

Definição 4.7 *Seja $\Gamma \cup \{\varphi\}$ um conjunto de fórmulas. O conjunto Γ implica a fórmula φ, ou φ é uma consequência semântica de Γ, se para todo modelo $\mathcal{M}$, sempre que $\models^{\mathcal{M}} \Gamma$, também $\models^{\mathcal{M}} \varphi$.*

Denotamos a consequência semântica por $\Gamma \models \varphi$.

Proposição 4.8 *Se $\mathcal{M}$ é um $\mathbb{L}(\nabla)$-modelo e φ, ψ são fórmulas quaisquer, então:*
(i) $\| \neg\varphi \| = - \| \varphi \|$;
(ii) $\| \varphi \wedge \psi \| = \| \varphi \| \cap \| \psi \|$;
(iii) $\| \varphi \vee \psi \| = \| \varphi \| \cup \| \psi \|$;
(iv) $\| \varphi \to \psi \| = - \| \varphi \| \cup \| \psi \|$;
(v) $\| \varphi \leftrightarrow \psi \| = (- \| \varphi \| \cup \| \psi \|) \cap (- \| \psi \| \cup \| \varphi \|)$;
(vi) $\| \nabla\varphi \| = \{x \in W : \| \varphi \| \in S(x)\}$.

Demonstração: *O conjunto $- \| \varphi \|$ coincide com $W - \| \varphi \|$, o complemento de $\| \varphi \|$ relativo à W.*

As condições de (i) a (v) seguem imediatamente do caráter Booleano da lógica clássica e da teoria dos conjuntos.

Resta mostrarmos a condição (vi). Por definição, $x \models \nabla\varphi$ see $x \in \| \nabla\varphi \|$. E isto significa, portanto, que $\{x \in W : \| \varphi \| \in S(x)\} = \| \nabla\varphi \|$. ■

Proposição 4.9 (Correção) $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$.

Demonstração: *Seja $\mathcal{M}$ um modelo para $\mathbb{L}(\nabla)$. Fazemos a prova por indução sobre o comprimento da dedução $\Gamma \vdash \varphi$.*

Quando $n = 1$, tem-se que φ pertence à Γ ou φ é um axioma. Desse modo, façamos em duas partes:

*- se $\varphi \in \Gamma$ ou φ é um axioma da **LPC**, nada temos a demonstrar;*

- se φ é um dos axiomas modais, então:

(Ax_1) Se $x \in W$ e $\models_x^{\mathcal{M}} \nabla\varphi \wedge \nabla\psi$, por ser um modelo Booleano, $\models_x^{\mathcal{M}} \nabla\varphi$ e $\models_x^{\mathcal{M}} \nabla\psi$ e, assim, $\| \varphi \| \in S(x)$ e $\| \psi \| \in S(x)$. Pela condição (i) da Definição 4.1, temos $\| \varphi \| \cap \| \psi \| \in S(x)$ e, por definição, $\| \varphi \wedge \psi \| \in S(x)$. Desse modo, $\models_x^{\mathcal{M}} \nabla(\varphi \wedge \psi)$.

(Ax_2) Para todo $x \in W$, temos que $\models_x^{\mathcal{M}} \nabla\top$, pois $\| \top \| \in S(x)$, para todo $x \in W$. Logo, para todo $x \in W$, temos que $\models_x^{\mathcal{M}} \nabla\top$ ou $\models_x^{\mathcal{M}} \nabla(\varphi \vee \neg\varphi)$.

(Ax_3) Nenhum $x \in W$ é tal que $\models_x^{\mathcal{M}} \nabla\bot$, pois do contrário $\| \bot \| \in S(x)$ para algum $x \in W$. Logo, por ser Booleana, para todo $x \in W$, temos que $\models_x^{\mathcal{M}} \neg\nabla\bot$.

Quando $n \leq k$, temos como hipótese de indução que: $\Gamma \vdash \varphi_n \Rightarrow \Gamma \models \varphi_n$.

Assim, há três possibilidades para o passo seguinte, $k+1$, da indução: (i) φ_{k+1} é uma premissa; (ii) φ_{k+1} é um esquema de axiomas; (iii) φ_{k+1} é deduzida a partir das regras MP ou $(R\nabla)$.

Para os itens (i) e (ii), a justificativa é como na base da indução.

*Para a regra MP, sabemos da **LPC** que ela preserva a validade. Desse modo, falta-nos analisar a regra $(R\nabla)$.*

$(R\nabla)$ Sejam $x \in W$, tal que $\models_x^{\mathcal{M}} \varphi \to \psi$. Por ser um modelo Booleano e $\vdash \varphi \to \psi$, temos que $\| \varphi \| \subseteq \| \psi \|$. Daí, para todo $x \in W$, se $\| \varphi \| \in S(x)$, então $\| \psi \| \in S(x)$. Assim, ou $\not\models_x^{\mathcal{M}} \nabla\varphi$ ou $\models_x^{\mathcal{M}} \nabla\psi$ e, por definição, temos $\models_x^{\mathcal{M}} \nabla\varphi \to \nabla\psi$. ■

Agora, daremos algumas definições e mostraremos alguns resultados para, por fim, demonstrarmos a completude de nosso sistema, relativo à semântica $\mathcal{M}$.

Definição 4.10 *Um conjunto de fórmulas Δ é maximalmente consistente quando Δ é consistente e nenhuma extensão conservativa de Δ é consistente.*

A demonstração do resultado abaixo pode ser encontrado em Chellas (1999).

Proposição 4.11 (Lindenbaum) *Todo conjunto consistente* Γ *pode ser estendido a um conjunto maximalmente consistente* Δ*.*

A seguir, tratamos com modelos canônicos. Consideremos, o conjunto de todos os conjuntos de fórmulas de $\mathbb{L}(\nabla)$ que são maximalmente consistentes. Denotamos este conjunto por χ.

Definição 4.12 *O conjunto de demonstrações de* φ *é o conjunto* $|\varphi| = \{\Gamma \in \chi : \varphi \in \Gamma\}$.

O conjunto das demonstrações de φ é o conjunto $|\varphi|$ que contém todas as teorias consistentes que contém φ. Teorias consistentes coincidem com subconjuntos maximalmente consistente de fórmulas de $\mathbb{L}(\nabla)$.

Como não há condições adicionais para a definição de demonstração, então o conjunto de demonstrações de $\mathbb{L}(\nabla)$ é similar ao caso clássico, variando apenas pela inclusão das fórmulas modais dedutíveis.

Proposição 4.13 *Se* φ *e* ψ *são fórmulas quaisquer* $\mathbb{L}(\nabla)$*, então:*

(i) $|\neg\varphi| = -|\varphi|$;

(ii) $|\varphi \wedge \psi| = |\varphi| \cap |\psi|$;

(iii) $|\varphi \vee \psi| = |\varphi| \cup |\psi|$;

(iv) $|\varphi \to \psi| = -|\varphi| \cup |\psi|$;

(v) $|\varphi \leftrightarrow \psi| = (-|\varphi| \cup |\psi|) \cap (-|\psi| \cup |\varphi|)$;

(vi) $|\varphi| \subseteq |\psi| \Leftrightarrow \vdash \varphi \to \psi$;

(vii) $|\varphi| = |\psi| \Leftrightarrow \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

Demonstração: *Como todos estes itens contemplam apenas aspectos Booleanos, as suas justificativas são exatamente as mesmas da* ***LPC****.* ■

Definição 4.14 *A estrutura* $\mathcal{M} = \langle W, S, V \rangle$ *é um modelo canônico para* $\mathbb{L}(\nabla)$*, se satisfaz as seguintes condições:*

(i) $W = \chi$;

(ii) $|\varphi| \in S(\Gamma) \Leftrightarrow \nabla\varphi \in \Gamma$, *para todo* $\Gamma \in W$;

(iii) $V(p_i) = |p_i|$, *para toda variável proposicional* p_i.

Proposição 4.15 *Se* $\mathcal{M}$ *é um modelo canônico, então, para toda fórmula* φ *e todo* $\Gamma \in W$, *tem-se que* $\Gamma \models^{\mathcal{M}} \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Gamma$.

Demonstração: *Faremos por indução sobre a complexidade da fórmula* φ*, para o conjunto de operadores* $\{\neg, \wedge, \nabla\}$.

(i) Para $\varphi \equiv p_i$*, com* $i \in \mathbb{N}$*: temos que* $\Gamma \models^{\mathcal{M}} p_i$ *see* $\Gamma \in V(p_i)$ *see* $\Gamma \in |p_i|$*. Por construção de* $|p_i|$, Γ *é um conjunto em* $|p_i|$ *see* $p_i \in \Gamma$.

(ii) Para $\varphi \equiv \neg\psi$*:* $\Gamma \models^{\mathcal{M}} \neg\psi$ *see* $\Gamma \not\models^{\mathcal{M}} \psi$*. Pela hipótese de indução, temos que* $\psi \notin \Gamma$*, e como* Γ *é maximalmente consistente, segue que* $\neg\psi \in \Gamma$ *e, portanto,* $\varphi \in \Gamma$.

(iii) Para $\varphi \equiv \psi \wedge \sigma$*:* $\Gamma \models^{\mathcal{M}} \psi \wedge \sigma$ *see* $\Gamma \models^{\mathcal{M}} \psi$ *e* $\Gamma \models^{\mathcal{M}} \sigma$*. Assim, por hipótese de indução,* $\psi, \sigma \in \Gamma$*. Pela* ***LPC****,* $\psi \wedge \sigma \in \Gamma$ *e, portanto,* $\varphi \in \Gamma$.

(iv) Para $\varphi \equiv \nabla\psi$*:* $\Gamma \models^{\mathcal{M}} \nabla\psi$ *see* $\| \psi \| \in S(\Gamma)$*. Desse modo, pela hipótese de indução, para todo* $\Phi \in \chi$*, temos que* $\Phi \models^{\mathcal{M}} \psi$ *see* $\psi \in \Phi$*, isto é,* $\| \psi \| = |\psi|$*. Assim,* $\| \psi \| \in S(\Gamma)$ *see* $|\psi| \in S(\Gamma)$*. Agora, por definição de* $S(\Gamma)$*,* $|\psi| \in S(\Gamma)$ *see* $\nabla\psi \in \Gamma$ *e, assim,* $\varphi \in \Gamma$. ■

Mais algumas definições.

Definição 4.16 *A estrutura $\mathcal{M}$ é o menor modelo canônico quando o conjunto $S(\Gamma)$ contém apenas conjuntos de demonstrações.*

Definição 4.17 *A suplementação de $\mathcal{M}$ é o modelo $\mathcal{M}^+ = \langle W, S^+, V\rangle$, com a seguinte condição adicional para S^+. Para todo $\Gamma \in W$ e todo $X \subseteq W$:*
$X \in S^+(\Gamma) \Leftrightarrow$ existe $Y \in S^+(\Gamma)$ tal que $Y \subseteq X$.

O conjunto $S^+(\Gamma)$, descrito acima, pode ser facilmente reescrito da seguinte maneira $S^+(\Gamma)$ = $\{X \subseteq W : |\varphi| \subseteq X$, para algum $\nabla\varphi \in \Gamma\}$. Assim, claramente, $S(\Gamma) \subseteq S^+(\Gamma)$.

Agora, falta-nos mostrar que esta suplementação é um modelo canônico para $\mathbb{L}(\nabla)$.

Proposição 4.18 *$\mathcal{M}^+$ é um modelo canônico para $\mathbb{L}(\nabla)$.*
Demonstração: *Seja $\mathcal{M}$ o menor modelo canônico de $\mathbb{L}(\nabla)$.*

Para mostrarmos o que queremos, basta que verifiquemos a seguinte equivalência: para toda fórmula φ e todo $\Gamma \in W$, então $|\varphi| \in S^+(\Gamma) \Leftrightarrow \nabla\varphi \in \Gamma$.

($\Rightarrow$) *Se $|\varphi| \in S^+(\Gamma)$, então, para algum $Y \in S(\Gamma)$, temos que $Y \subseteq |\varphi|$. Como $\mathcal{M}$ é o menor modelo canônico, então $Y = |\psi|$, para alguma fórmula ψ, $|\psi| \subseteq |\varphi|$ e $\nabla\psi \in \Gamma$. Assim, pelos resultados anteriores, segue que $\vdash \psi \to \varphi$ e, agora, por $(R\nabla)$ temos que, $\vdash \nabla\psi \to \nabla\varphi$. Portanto, $\nabla\varphi \in \Gamma$.*

($\Leftarrow$) *Se $\nabla\varphi \in \Gamma$, então $|\varphi| \in S(\Gamma)$ e como $S(\Gamma) \subseteq S^+(\Gamma)$, então $|\varphi| \in S^+(\Gamma)$.* ∎

Proposição 4.19 *Se $\mathcal{M}$ é o menor modelo canônico para $\mathbb{L}(\nabla)$ e $\mathcal{M}^+$ é sua suplementação, então as condições (i), (ii), (iii) e (iv) como na Definição 4.1 são válidas em $\mathcal{M}^+$.*
Demonstração: *Pelo resultado anterior, segue que $\mathcal{M}^+$ é um modelo canônico para $\mathbb{L}(\nabla)$. Assim, basta verificarmos as condições (i), (ii), (iii) e (iv) da Definição 4.1.*

(i) *Sejam $\Gamma \in W$ e $X, Y \subseteq W$ tais que $X \in S^+(\Gamma)$ e $Y \in S^+(\Gamma)$. Pela definição de $S^+(\Gamma)$, existe $Z \subseteq X$ tal que $Z \in S(\Gamma)$ e também que existe $U \subseteq Y$ tal que $U \in S(\Gamma)$. Pela condição (i) para S, segue que $Z \cap U \in S(\Gamma)$ e, portanto, $X \cap Y \in S^+(\Gamma)$.*

(ii) *Sejam $\Gamma \in W$ e $X \subseteq W$ tal que $X \in S^+(\Gamma)$. Pela definição de $S^+(\Gamma)$, existe $Z \subseteq X$ tal que $Z \in S(\Gamma)$. Agora, para qualquer $U \subseteq W$, por (ii) para S, temos que $Z \cup U \in S(\Gamma)$ e, assim, $X \cup U \in S^+(\Gamma)$.*

(iii) *Devemos mostrar que $\emptyset \notin S^+(\Gamma)$. Como $\mathcal{M} = \langle W, S, V\rangle$ é um modelo canônico para $\mathbb{L}(\nabla)$, então $\emptyset \notin S(\Gamma)$. Logo, não existe $Y \subseteq \emptyset$ tal que $Y \in S(\Gamma)$ e, então, $\emptyset \notin S^+(\Gamma)$.*

(iv) *Devemos mostrar que $W \in S^+(\Gamma)$. Para $\Gamma \in W$, o conjunto $S^+(\Gamma) \neq \emptyset$. Se $X \in S^+(\Gamma)$, então $X \subseteq W$ e, pela condição (ii), $W \in S^+(\Gamma)$.* ∎

Agora, mais uma definição e mostraremos o que queremos.

Definição 4.20 *Seja $\mathcal{M}$ o menor modelo canônico e $\mathcal{M}^+$ sua suplementação. O modelo $\mathcal{M}^+_\Gamma = \langle W_\Gamma, S_\Gamma, V_\Gamma\rangle$ será denominado suplementado para Γ quando as seguintes condições são válidas na estrutura:*

(i) *$W_\Gamma = \{\Sigma \in \chi : \Gamma \subseteq \Sigma\}$;*

(ii) *Para todo $\Sigma \in W_\Gamma$ e todo $X \subseteq W_\Gamma, X \in S_\Gamma \Leftrightarrow$ para algum $Y \in S^+(\Sigma)$, $X = Y \cap W_\Gamma$;*

(iii) *$V_\Gamma(p_i) = \{\Sigma \in \chi : p_i \in \Sigma$ e $\Gamma \in \Sigma\}$, para toda variável proposicional p_i.*

Intuitivamente, a estrutura acima é obtida excluindo de $\mathcal{M}^+$ todos os conjuntos maximalmente consistentes que não contém Γ.

Dessa forma, $\mathcal{M}_\Gamma^+$ é um modelo canônico e, portanto, as condições (i), (ii), (iii) e (iv) da Definição 4.1 continuam válidas nesta estrutura. E mais, construído dessa forma, para todo $\Sigma \in W_\Gamma, \Gamma \subseteq \Sigma$, segue que $\Sigma \models^{\mathcal{K}} \Gamma$, com $\mathcal{K} = \mathcal{M}_\Gamma^+$ e, portanto, $\models^{\mathcal{K}} \Gamma$.

Agora, finalmente, mostraremos com o auxílio destas estruturas a completude.

Proposição 4.21 (Completude) *Se $\Gamma \models \varphi$, então $\Gamma \vdash \varphi$.*

Demonstração: *Pela recíproca da contrária.*

Se $\Gamma \nvdash \varphi$, então $\Gamma \nvdash \neg\neg\varphi$ e, daí, que $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ é consistente.

Pelo Teorema de Lindenbaum, existe um conjunto maximalmente consistente Δ, que estende $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, isto é, $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \subseteq \Delta$, com $\neg\varphi \in \Delta$ e $\varphi \notin \Delta$.

Como Δ é um conjunto maximalmente consistente em $\mathbb{L}(\nabla)$ e $\Gamma \subseteq \Delta$, então todo modelo de Δ também é modelo de Γ.

Considerando a estrutura $\mathcal{M}_\Gamma^+$, temos para o modelo $\mathcal{K} = \mathcal{M}_\Gamma^+$ vale $\Delta \models^{\mathcal{K}} \Gamma$ e $\Delta \not\models^{\mathcal{K}} \varphi$. Deste modo, temos $\Gamma \not\models \varphi$. ■

Com isto, temos uma semântica de vizinhança que é completa e fortemente adequada à versão axiomática da lógica proposicional do plausível $\mathbb{L}(\nabla)$.

Considerações finais

O presente trabalho mostra uma semântica relacional para a lógica proposicional do plausível.

Iniciamos procurando alguma semântica de Kripke. No entanto, as semânticas de Kripke usuais são aplicadas em lógicas modais normais. Dado que a lógica proposicional do plausível não é normal, precisamos de um outro para uma semântica de caráter relacional.

Chegamos nas semânticas relacionais ou de vizinhança. Elas tratam dos mundos possíveis e, no nosso caso, de algumas relações especiais impostas nas definições dos modelos que investigamos.

Para as relações impostas, olhamos para os axiomas e obtivemos algumas relações que de algum modo os espelhassem. Ao apresentarmos tais relações, mostramos a correção do sistema lógico com esta nova semântica.

Para a completude tivemos que seguir um caminho encontrado na literatura, com os conjuntos maximalmente consistentes, apoiados no Teorema de Lindenbaum.

A nova semântica para a lógica proposicional do plausível foi alcançada.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio da FAPESP, do CA da UFSC, Florianópolis, e da UNESP, Bauru.

Referências:

BELL, J. L.; MACHOVER, M. **A course in mathematical logic**. Amsterdam: North-Holland, 1977.

BLACKBURN, P.; RIJKE, M.; VENEMA, Y. **Modal logic**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

BULL, R.; SEGERBERG, K. Basic modal logic. *In*: GABBAY, D.; GUENTHNER, F. (ed.) **Handbook of philosophical logic**. Dordrecht: D. Reidel, 1984. v. 2, p. 1-88.

CARNIELLI, W.; GRÁCIO M. C. C. Modulated logics and flexible reasoning. **Logic and Logical Philosophy**, v. 17, n. 3, p. 211-249, 2008.

CARNIELLI, W. A.; PIZZI, C. **Modalità e multimodalità**. Milano: Franco Angeli, 2001.

CHAGROV, A.; ZAKHARYASCHEV, M. **Modal logic**. Oxford: Clarendon Press, 1997.

CHELLAS, B. F. **Modal logic:** an introduction. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.

DUNN, J. M.; HARDEGREE, G. M. **Algebraic methods in philosophical logic**. Oxford: Oxford University Press, 2001.

EBBINGHAUS, H. -D.; FLUM, J.; THOMAS, W. **Mathematical logic**. New York: Springer-Verlag, 1984.

EPSTEIN, R. L. **The semantic foundations of logic:** propositional logics. New York: Oxford University Press, 1995. v. 1.

FEITOSA, H. A.; NASCIMENTO, M. C.; GRÁCIO, M. C. C. A propositional version of the logic of the plausible. *In*: SIMPÓSIO INTERNACIONAL PRINCIPIA, 5., 2009, Florianópolis. **Anais** [...]. Florianópolis: NEL/UFSC, 2009. p. 184-195.

FEITOSA, H. A.; PAULOVICH, L. **Um prelúdio à lógica**. São Paulo: Editora Unesp, 2005.

FITTING, M.; MENDELSOHN, R. L. **First-order modal logic**. Dordrecht: Kluwer, 1998.

GRÁCIO, M. C. C. **Lógicas moduladas e raciocínio sob incerteza**. 1999. 194f. Tese (Doutorado em Filosofia) - Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

MORTARI, C. A. **Introdução à lógica**. São Paulo: Editora UNESP, 2001.

PRIEST, G. **An introduction to non-classical logic**. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

SILVA, F. S. C.; FINGER, M.; MELO, A. C. V. **Lógica para computação**. São Paulo: Cengage Learning, 2006.