Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 16, dez. 2019

Sequência matricial (s_1,s_2,s_3)-Tridovan: aspectos históricos e propriedades

Matrix sequence (s_1,s_2,s_3)-Tridovan: historical aspects and properties

Renata Passos Machado Vieira
Instituto Federal de Educação e Tecnologia do Estado do Ceará
re.passosm@gmail.com

Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação e Tecnologia do Estado do Ceará
fregis@gmx.fr

Paula Maria Machado Cruz Catarino
UTAD - Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
pcatarino23@gmail.com

Resumo

Neste trabalho é introduzida uma nova definição da sequência matricial (s_1,s_2,s_3)-Tridovan. Ao longo do texto é desenvolvido um breve estudo sobre sequências lineares e recursivas, a fim de avançarmos nos estudos deste trabalho, bem como nos assegurarmos na temática discutida com um embasamento teórico consolidado. Os números de Tridovan são apresentados com arrimo para a definição da sequência matricial, acompanhada de algumas propriedades e de outras fórmulas explícitas possibilitando o cálculo dos termos da sequência sem a utilização da recorrência. O aspecto histórico da sequência é apresentado com o viés de explorar a formalização dos conteúdos discutidos. Ao final, concluímos que a sequência de Padovan ou sequência de Cordonnier de quarta ordem (Tridovan), é um caso particular deste caso matricial, atribuindo valores para as variáveis definidas.
Palavras-chave: Fórmula de Binet. Sequência de Cordonnier. Sequência matricial. Sequência de Padovan. Tridovan

Abstract

This work introduces a new matrix sequence definition (s_1,s_2,s_3)-Tridovan. The study along the study is sequential and linear in recursive, in order to advance with the studies of this work, as well as we will keep on the subject discussed with a consolidated theoretical foundation and other explicit formulas enabling the calculation of sequence terms without the use of recurrence. The historical aspect of the sequence is presented with the bias of exploring the formalization of the contents discussed. The numbers of Tridovan are presented with support for the definition of the matrix sequence, accompanied by some properties. In the end, we conclude that the Padovan sequence or Cordonnier sequence of is a particular case of fourth ordem (Tridovan), the matrix, assigning values to the defined variables.
Keywords: Binet´s formula. Cordonnier Sequence. Matrix sequence. Padovan Sequence. Tridovan

Artigo recebido em abr. 2019 e aceito em dez. 2019.

1 Introdução

Antes de mais nada, apresentaremos a Sequência de Padovan (SP) à qual o nome foi atribuído em homenagem ao arquiteto italiano Richard Padovan (1935 - ?), nascido na cidade de Pádua (STEWART, 1996), ela é uma espécie de parente de uma outra mais conhecida, a Sequência de Fibonacci (SF), aritmética, e de números inteiros. Gérard Cordonnier (1907 - 1977) também desenvolveu alguns estudos acerca destes números, mais especificamente sobre o número plástico (número radiante), devido a este fato a sequência também é conhecida como Sequência de Cordonnier.

Nascido em 1935, Richard Padovan estudou arquitetura na Architectural Association, Londres (1952-57). Desde então, ele combina prática com ensino e escrita em arquitetura. Ele acredita, no entanto, que sua verdadeira educação voltada para a arquitetura começou quando encontrou o trabalho e pensamento do arquiteto holandês Dom Hans van der Laan em 1974. Em 1999, ele publicou Proportion: Science, Philosophy, Architecture. Seu último livro, Rumo à Universalidade: Le Corbusier, Mies e De Stijl em 2002, contrasta os grandiosos ideais filosóficos do modernismo europeu.

Gérard Cordonnier, lembrado na Figura **1 -**, nasceu em 7 de abril de 1907 em Bailleul (Norte), e morreu subitamente em Lhez, nos Altos Pirineus, por acidente de estrada, em 12 de julho de 1977. Ex-aluno da École Polytechnique de 1926 a 1928, bacharel em ciências em 1928, aluno da Escola Nacional de Engenharia Marítima de 1928 a 1930, graduou-se no Instituto de Ótica em 1930, ingressou no serviço de fotografia aérea do Ministério do Ar até 1936, depois na Oficina de Óptica e Instrumentos de Navegação em Toulon de 1936 a 1939. Autor de trabalhos originais em eletrônica e matemática aplicada, detentor de mais de vinte patentes de invenções nos mais variados campos.

Contemplativo e geométrico, ele havia desenvolvido um trabalho, que infelizmente permanece inacabado, sobre o número radiante, trabalho este que a sua família e seus amigos tentam reconstituir graças às gravações de seus colegas sobre o assunto. Desenvolveu ainda estudos sobre o número de ouro.

Figura 1 - Gérard Cordonnier
Fonte: Google Imagens

Doravante, temos a SP descrita como: $1,1,1,2,2,3,4,5,7,\ldots$ e a sua fórmula de recorrência definida abaixo.

Definição 1. *A relação de recorrência da sequência com os termos iniciais $P_0 = P_1 = P_2 = 1$ e P_n o n-ésimo termo, é dada por:*

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geqslant 3$$

Com o fim da Segunda Guerra Mundial, enfatizando o processo histórico matemático desta sequência, destaca-se a presença do holandês e arquiteto Hans Van Der Laan (1904 - 1991). Este utilizou a basílica cristã primitiva de abadia como exemplo para treinar arquitetos na reconstrução de igrejas que haviam sido destruídas após a Segunda Guerra Mundial (VOET; SCHOONJANS, 2012). Laan e seu irmão buscavam padrões para a arquitetura através de experimentos com pedras e depois com materiais de construção, e acabaram por descobrir um novo padrão de medidas onde a construção desse se dá através de um número irracional, ideal para se trabalhar em escala geométrica e objetos espaciais (retângulos, trapézios, elipses, e etc), este número é conhecido como número plástico ou número radiante, e foi estudado primeiramente por Gérard Cordonnier. Uma analogia é feita do número plástico em relação à música: na música pode-se tocar acordes, com o número radiante é possível compor paredes, salas e etc.

Definição 2. *O polinômio característico da Sequência de Padovan, é definido como:*

$$x^3 - x - 1 = 0$$

A partir da fórmula de recorrência $P_n = P_{n-2} + P_{n-3} \therefore \frac{P_n}{P_{n-2}} = 1 + \frac{P_{n-3}}{P_{n-2}}$. Utilizando o mesmo raciocínio realizado por Koshy (2001), o comportamento da convergência dos quocientes é conjecturado como sendo do tipo $\frac{P_n}{P_{n-1}} > 0$. Assim, é estabelecido ainda que: $\frac{P_n}{P_{n-2}} = 1 + \frac{P_{n-3}}{P_{n-2}} \therefore \frac{P_n}{P_{n-2}} \frac{P_{n-1}}{P_{n-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{P_{n-2}}{P_{n-3}}}$. Denotando $x_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$, tem-se: $x_{n-1} = \frac{P_{n-1}}{P_{n-2}}$ e $x_{n-2} = \frac{P_{n-2}}{P_{n-3}}$. Determinando a equação $x_{n-1}x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-2}}$, em que passando o limite, tem-se:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_{n-1} \lim_{n\to\infty} x_n &= 1 + \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-2}} \\
xx &= 1 + \frac{1}{x} \\
x^2 &= 1 + \frac{1}{x} \\
x^3 &= x + 1 \\
x^3 - x - 1 &= 0
\end{aligned}$$

Spinadel e Buitrago (2009, p. 163) explicam que Hans van der Laan, arquiteto e membro da ordem beneditina, estudou sobre o número plástico, sendo este a única solução real da equação cúbica característica da SP. Porém as outras duas raízes complexas dessa sequência não fazem parte do número plástico. Voet e Schoonjans (2012, p. 255) comentam que seu número plástico possui o vigor do seu próprio sistema proporcional, sendo testado e usado por arquitetos e matemáticos.

Assim temos resolvendo a equação da Definição 2, constata-se que existem três raízes, sendo duas complexas e conjugadas e uma solução real dada por (AARTS; FOKKINK; KRUIJTZER, 2001): $\psi = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{27}}} \approx 1,324717957244746025960908 5...$

Seja P_n um termo da sequência de Padovan, ψ a raíz real do polinômio característico da sequência, sendo aproximadametne 1,32, e c_n uma subsequência em que $c_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$, será explorada assim a convergência da subsequência c_n, em que: $c_0 = \frac{P_1}{P_0} = \frac{1}{1} = 1, c_1 = \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{1} = 1, c_2 = \frac{P_3}{P_2} = \frac{2}{1} = 2, c_3 = \frac{P_4}{P_3} = \frac{2}{2} = 1$. Logo, de maneira similar como realizado por Almeida (2014) para determinar a convergência da Sequência de Fibonacci, iremos examinar a convergência de $c_n =$

$\frac{P_{n+1}}{P_n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Na tabela abaixo foram realizados os cálculos dos 16 primeiros termos de c_n para $n \geqslant 0$.

Tabela 1 - Valores de c_n.

n	c_n	n	c_n
1	1	11	1,3125
2	2	12	1,3333...
3	1	13	1,3214
4	1,5	14	1,3243
5	1,3333...	15	1,3265
6	1,25	16	1,3230
7	1,4	17	1,3255
8	1,28	18	1,324561
9	1,3333 ...	19	1,3245033
10	1,6	20	1,325

Assim, pode-se perceber que $\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{P_{n+1}}{P_n} \approx 1,32 \approx \psi$ (FERREIRA, 2015).

Com isso, é apresentado que o limite da nova sequência analisada e uma das raízes do polinômio característico resultam no número plástico, ou número radiante.

Na seção seguinte realizaremos um embasamento teórico acerca da forma matricial das sequências lineares e recorrentes, para então, a partir de estudos oriundos dos trabalhos de Alves (2015; 2017), Civciv e Turkmen (2008), Gulec e Taskara (2012) introduzirmos a Sequência matricial (s_1, s_2, s_3)-Tridovan e as suas propriedades. Vale salientar que o seu aspecto histórico foi estudado na introdução deste trabalho, visto que essa sequência é uma extensão da SP.

2 Sequências lineares e recorrentes

Uma sequência linear e recorrente possui seus termos calculados em função de seus antecessores através de uma recorrência linear, chamada de fórmula de recorrência (ZIERLER, 1959). De fato, para obter os termos de uma sequência desse tipo, faz-se necessário conhecer os seus antecessores, porém existem meios em que possibilita a obtenção desses elementos sem haver a necessidade de conhecer os seus termos anteriores, sendo um deles através da matriz geradora. Nessa matriz suas linhas formam uma base para uma transformação linear. Em sua composição são apresentados os termos da sequência, incluindo os operadores e algumas propriedades (ERCOLANO, 1979).

Toda Matriz geradora possui pelo menos duas propriedades, sendo elas: calcular o próximo termo, e guardar informações relativas aos últimos termos da sequência. Para isso, é necessário a utilização de dois operadores: o operador principal, sendo aquele capaz de traduzir a forma como a sequência é calculada; e o operador de deslocamento, responsável por manter, excluir ou incluir novos elementos da sequência na matriz geradora. Com base nisso tomemos como exemplo a seguinte matriz da Sequência de Padovan (SOKHUMA, 2013):

$$\text{Para } Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{tem-se } Q^n = \begin{bmatrix} P_n & P_{n-1} & P_{n-2} \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}.$$

Podemos notar que na primeira coluna são apresentados os coeficientes lineares da fórmula de recorrência da sequência. Este portanto, é chamado de operador principal. A segunda coluna da matriz geradora Q, está representando o operador de deslocamento. Com isso, ao realizarmos o produto da matriz Q^n pela matriz geradora Q, podemos notar que na segunda coluna, apenas o termo a_{13} da matriz Q^n será considerado, uma vez que o primeiro elemento é multiplicado por zero. A primeira linha da matriz representa os termos iniciais da sequência, escritos na forma do mais recente para o mais antigo.

Para efeitos de generalização, considera portanto a sequência S_1, S_2, S_3, S_4,..., S_n, em que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$ e com fórmula de recorrência dada por:

$$S_n = \alpha_1 S_{n-1} + \alpha_2 S_{n-2} + \alpha_3 S_{n-3} + \ldots + \alpha_n S_0.$$

A matriz geradora Q é representada por:

$$Q = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \mathbf{[I]} \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são os coeficientes da recorrência da sequência, **[I]** a matriz de bloco dada pela matriz identidade, **0** o vetor linha, ambos os vetores de tamanho $g-1$, em que g representa a ordem da sequência.

3 Sequência de Tridovan

A sequência de Trivovan é uma extensão da SP de quarta ordem, sendo do tipo recorrente e linear, e descrita com os seguintes termos: $1, 0, 1, 1, 2, 2, 4, 5, 8, 11, 17, \ldots$.

Definição 3. *Os números de Trivovan são definidos neste trabalho como $T_{(n)}$, possuindo a seguinte fórmula de recorrência (VIEIRA; ALVES, 2019):*

$$T_{(n)} = T_{(n-2)} + T_{(n-3)} + T_{(n-4)}, n \geqslant 4.$$

Existe uma abordagem matricial para Tridovan, de maneira semelhante à sequência de Padovan, denominada de τ, podendo também ser gerada através de sua recorrência (ver Definição 3).

Teorema 4. *Seja $n \in \mathbb{N}$, a matriz geradora τ de Tridovan é dada por (VIEIRA; ALVES, 2019):*

$$\textit{Para } \tau = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \textit{ tem-se } \tau^n = \begin{bmatrix} \tau(1,1) & \tau(1,2) & \tau(1,3) & \tau(1,4) \\ \tau(2,1) & \tau(2,2) & \tau(2,3) & \tau(2,4) \\ \tau(3,1) & \tau(3,2) & \tau(3,3) & \tau(3,4) \\ \tau(4,1) & \tau(4,2) & \tau(4,3) & \tau(4,4) \end{bmatrix}, n \geqslant 6.$$

De forma a simplificar a visualização dos termos da matriz anterior, o cálculo de cada um destes é apresentado em cada uma das linhas a seguir:

$\tau(1,1) = T_{(n)}$,
$\tau(1,2) = T_{(n-1)}$,
$\tau(1,3) = T_{(n-2)}$,

$\tau(1,4) = T_{(n-3)}$,
$\tau(2,1) = T_{(n-1)} + T_{(n-2)} + T_{(n-3)}$,
$\tau(2,2) = T_{(n-2)} + T_{(n-3)} + T_{(n-4)}$,
$\tau(2,3) = T_{(n-3)} + T_{(n-4)} + T_{(n-5)}$,
$\tau(2,4) = T_{(n-4)} + T_{(n-5)} + T_{(n-6)}$,
$\tau(3,1) = T_{(n-1)} + T_{(n-2)}$,
$\tau(3,2) = T_{(n-2)} + T_{(n-3)}$,
$\tau(3,3) = T_{(n-3)} + T_{(n-4)}$,
$\tau(3,4) = T_{(n-4)} + T_{(n-5)}$,
$\tau(4,1) = T_{(n-1)}$,
$\tau(4,2) = T_{(n-2)}$,
$\tau(4,3) = T_{(n-3)}$,
$\tau(4,4) = T_{(n-4)}$.

Demonstração. Utilizando o princípio da indução finita para provar o teorema. Tem-se que:
Para $n = 6$, tem-se:

$$\tau^6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^6 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} T_{(6)} & T_{(5)} & T_{(4)} & T_{(3)} \\ T_{(5)} + T_{(4)} + T_{(3)} & T_{(4)} + T_{(3)} + T_{(2)} & T_{(3)} + T_{(2)} + T_{(1)} & T_{(2)} + T_{(1)} + T_{(0)} \\ T_{(5)} + T_{(4)} & T_{(4)} + T_{(3)} & T_{(3)} + T_{(2)} & T_{(2)} + T_{(1)} \\ T_{(5)} & T_{(4)} & T_{(3)} & T_{(2)} \end{bmatrix}.$$

Assim, a igualdade é válida.
Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\tau^k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \tau(1,1) & \tau(1,2) & \tau(1,3) & \tau(1,4) \\ \tau(2,1) & \tau(2,2) & \tau(2,3) & \tau(2,4) \\ \tau(3,1) & \tau(3,2) & \tau(3,3) & \tau(3,4) \\ \tau(4,1) & \tau(4,2) & \tau(4,3) & \tau(4,4) \end{bmatrix}.$$

Sendo:

$\tau(1,1) = T_{(k)}$,
$\tau(1,2) = T_{(k-1)}$,
$\tau(1,3) = T_{(k-2)}$,
$\tau(1,4) = T_{(k-3)}$,
$\tau(2,1) = T_{(k-1)} + T_{(k-2)} + T_{(k-3)}$,
$\tau(2,2) = T_{(k-2)} + T_{(k-3)} + T_{(k-4)}$,
$\tau(2,3) = T_{(k-3)} + T_{(k-4)} + T_{(k-5)}$,
$\tau(2,4) = T_{(k-4)} + T_{(k-5)} + T_{(k-6)}$,
$\tau(3,1) = T_{(k-1)} + T_{(k-2)}$,
$\tau(3,2) = T_{(k-2)} + T_{(k-3)}$,
$\tau(3,3) = T_{(k-3)} + T_{(k-4)}$,
$\tau(3,4) = T_{(k-4)} + T_{(k-5)}$,
$\tau(4,1) = T_{(k-1)}$,

$\tau(4,2) = T_{(k-2)}$,
$\tau(4,3) = T_{(k-3)}$,
$\tau(4,4) = T_{(k-4)}$.

Agora, verificando que seja válido para $n = k+1$, tem-se:

$$\tau^{k+1} = \tau^k \tau$$

$$\tau^{k+1} = \begin{bmatrix} \tau(1,1) & \tau(1,2) & \tau(1,3) & \tau(1,4) \\ \tau(2,1) & \tau(2,2) & \tau(2,3) & \tau(2,4) \\ \tau(3,1) & \tau(3,2) & \tau(3,3) & \tau(3,4) \\ \tau(4,1) & \tau(4,2) & \tau(4,3) & \tau(4,4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \tau'(1,1) & \tau'(1,2) & \tau'(1,3) & \tau'(1,4) \\ \tau'(2,1) & \tau'(2,2) & \tau'(2,3) & \tau'(2,4) \\ \tau'(3,1) & \tau'(3,2) & \tau'(3,3) & \tau'(3,4) \\ \tau'(4,1) & \tau'(4,2) & \tau'(4,3) & \tau'(4,4) \end{bmatrix}.$$

Tem-se que cada elemento dessa matriz é dado por:

$\tau'(1,1) = T_{(k-1)} + T_{(k-2)} + T_{(k-3)} = T_{(k+1)}$,
$\tau'(1,2) = T_{(k)}$,
$\tau'(1,3) = T_{(k-1)}$,
$\tau'(1,4) = T_{(k-2)}$,
$\tau'(2,1) = T_{(k-2)} + T_{(k-3)} + T_{(k-4)} + T_{(k-3)} + T_{(k-4)} + T_{(k-5)} + T_{(k-4)} + T_{(k-5)} + T_{(k-6)} =$
$T_{(k)} + T_{(k-1)} + T_{(k-2)}$,
$\tau'(2,2) = T_{(k-1)} + T_{(k-2)} + T_{(k-3)}$,
$\tau'(2,3) = T_{(k-2)} + T_{(k-3)} + T_{(k-4)}$,
$\tau'(2,4) = T_{(k-3)} + T_{(k-4)} + T_{(k-5)}$,
$\tau'(3,1) = T_{(k-2)} + T_{(k-3)} + T_{(k-3)} + T_{(k-4)} + T_{(k-4)} + T_{(k-5)} = T_{(k)} + T_{(k-1)}$,
$\tau'(3,2) = T_{(k-1)} + T_{(k-2)}$,
$\tau'(3,3) = T_{(k-2)} + T_{(k-3)}$,
$\tau'(3,4) = T_{(k-3)} + T_{(k-4)}$,
$\tau'(4,1) = T_{(k-2)} + T_{(k-3)} + T_{(k-4)} = T_{(k)}$,
$\tau'(4,2) = T_{(k-1)}$,
$\tau'(4,3) = T_{(k-2)}$,
$\tau'(4,4) = T_{(k-3)}$.

□

Baseado no mesmo princípio utilizado para compor a fórmula de recorrência da SP para índices inteiros negativos, pode-se obter a composição da recorrência da Sequência de Tridovan, a partir da fórmula de recorrência $T_{(n+4)} = T_{(n+2)} + T_{(n+1)} + T_{(n)}$ pode-se substituir $n = -n$.

Definição 5. *Considerando os valores iniciais* $T_{(0)} = 1, T_{(1)} = 0, T_{(2)} = T_{(3)} = 1$ *e com* $n \in \mathbb{N}$, *tem-se a fórmula de recorrência da Sequência de Tridovan:*

$$T_{(-n)} = T_{(-n+4)} - T_{(-n+2)} - T_{(-n+1)}, n > 0$$

Assim, é possível calcular os termos do lado esquerdo de Tridovan de acordo com a Tabela **2 -** abaixo:

Tabela 2 - Termos da sequência de Tridovan - lado esquerdo

a_{-10}	a_{-9}	a_{-8}	a_{-7}	a_{-6}	a_{-5}	a_{-4}	a_{-3}	a_{-2}	a_{-1}	a_0
2	-2	0	1	0	-1	1	0	0	0	1

Fonte: Elaborado pelos autores

Teorema 6. *Para o lado esquerdo, ($\mathbb{Z}_-^*$) da Sequência de Tridovan, chamaremos a matriz geradora de τ^{-1}, obtida através do cálculo da matriz inversa de τ (Teorema 4), Assim:*

$$\tau.\tau^{-1} = I$$

$$\textit{Para } \tau^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \textit{ tem-se } \tau^{-n} = \begin{bmatrix} \tau(1,1) & \tau(1,2) & \tau(1,3) & \tau(1,4) \\ \tau(2,1) & \tau(2,2) & \tau(2,3) & \tau(2,4) \\ \tau(3,1) & \tau(3,2) & \tau(3,3) & \tau(3,4) \\ \tau(4,1) & \tau(4,2) & \tau(4,3) & \tau(4,4) \end{bmatrix}, n > 0$$

Simplificando a visualização da matriz, os termos são dispostos em cada linha:

$\tau^{-n}(1,1) = T_{(-n)}$,
$\tau^{-n}(1,2) = T_{(-n-1)}$,
$\tau^{-n}(1,3) = T_{(-n-2)}$,
$\tau^{-n}(1,4) = T_{(-n-3)}$,
$\tau^{-n}(2,1) = T_{(-n-1)} + T_{(-n-2)} + T_{(-n-3)}$,
$\tau^{-n}(2,2) = T_{(-n-2)} + T_{(-n-3)} + T_{(-n-4)}$,
$\tau^{-n}(2,3) = T_{(-n-3)} + T_{(-n-4)} + T_{(-n-5)}$,
$\tau^{-n}(2,4) = T_{(-n-4)} + T_{(-n-5)} + T_{(-n-6)}$,
$\tau^{-n}(3,1) = T_{(-n-1)} + T_{(-n-2)}$,
$\tau^{-n}(3,2) = T_{(-n-2)} + T_{(-n-3)}$,
$\tau^{-n}(3,3) = T_{(-n-3)} + T_{(-n-4)}$,
$\tau^{-n}(3,4) = T_{(-n-4)} + T_{(-n-5)}$,
$\tau^{-n}(4,1) = T_{(-n-1)}$,
$\tau^{-n}(4,2) = T_{(-n-2)}$,
$\tau^{-n}(4,3) = T_{(-n-3)}$,
$\tau^{-n}(4,4) = T_{(-n-4)}$.

Demonstração. A demonstração pode ser realizada utilizando o princípio da indução finita conforme feito na demonstração do Teorema 4. □

4 Sequência matricial (s_1,s_2)-Padovan e (s_1,s_2,s_3)-Tridovan

A sequência matricial (s_1, s_2)-Padovan foi definida baseada em trabalhos de Civciv e Turkmen (2008) e, Gulec e Taskara (2012), onde esta representa uma maneira de desenvolvermos uma matriz geradora da SP com a generalização dos coeficientes existentes na fórmula de recorrência da sequência.

Os termos $s_1, s_2, s_3, \ldots$ variam de acordo com a ordem da extensão da sequência, no caso dos números de Padovan (ordem 3), existem apenas s_1 e o s_2. Entretanto para a sequência matricial (s_1, s_2, s_3)-Tridovan (ordem 4), existirão três termos (s_1, s_2, s_3). Doravante, serão definidas as Sequências Matriciais (s_1, s_2, s_3)-Tridovan e algumas propriedades.

Definição 7. *Para $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$, a sequência (s_1, s_2)-Padovan, representada por $P_n(s_1, s_2)$ com $n \geqslant 0$ e $n \in \mathbb{N}$, é definida pela fórmula de recorrência:*

$$P_{n+3(s_1,s_2)} = s_1 P_{n+1(s_1,s_2)} + s_2 P_{n(s_1,s_2)},$$

com valores iniciais atrasados em relação à SP original: $P_{0(s_1,s_2)} = 0$, $P_{1(s_1,s_2)} = 1$ e $P_{2(s_1,s_2)} = 0$. E para efeito de notação usaremos $P_n(s_1, s_2) = P_n$.

Definição 8. *Para $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$, a sequência matricial (s_1, s_2)-Padovan, chamada de $Q_n(s_1, s_2)$ com $n \geqslant 0$ é definida por:*

$$Q_{n+3(s_1,s_2)} = s_1 Q_{n+1(s_1,s_2)} + s_2 Q_{n(s_1,s_2)},$$

com: $Q_{0(s_1,s_2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Q_{1(s_1,s_2)} = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & s_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $Q_{2(s_1,s_2)} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & 0 \\ 0 & s_1 & s_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Teorema 9. *A matriz geradora da sequência (s_1, s_2)-Padovan, para $n \geqslant 0$, é dada por:* $Q_{(s_1,s_2)} = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & s_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $Q^n_{(s_1,s_2)} = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_{n+2} & s_2 P_n \\ P_n & P_{n+1} & s_2 P_{n-1} \\ P_{n-1} & P_n & s_2 P_{n-2} \end{bmatrix}$

Demonstração. Utilizando o segundo princípio da indução finita e a Definição 8, tem-se que:

$$Q^{(n+1)}_{(s_1,s_2)} = s_1 Q^{(n-1)}_{(s_1,s_2)} + s_2 Q^{(n-2)}_{(s_1,s_2)}$$

$$Q^{(n+1)}_{(s_1,s_2)} = s_1 \begin{bmatrix} P_n & P_{n+1} & s_2 P_{n-1} \\ P_{n-1} & P_n & s_2 P_{n-2} \\ P_{n-2} & P_{n-1} & s_2 P_{n-3} \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} P_{n-1} & P_n & s_2 P_{n-2} \\ P_{n-2} & P_{n-1} & s_2 P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-2} & s_2 P_{n-4} \end{bmatrix}$$

$$Q^{(n+1)}_{(s_1,s_2)} = \begin{bmatrix} P_{n+2} & P_{n+3} & s_2 P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+2} & s_2 P_n \\ P_n & P_{n+1} & s_2 P_{n-1} \end{bmatrix}$$

□

A sequência matricial (s_1, s_2, s_3)-Tridovan é introduzida com arrimo em Alves (2017), sendo então definida de acordo com a conjectura apresentada abaixo.

Definição 10. *Para $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{Z}$, a Sequência (s_1, s_2, s_3)-Tridovan, representada por $T_{(n)}(s_1, s_2, s_3)$ com $n \geqslant 0$ e $n \in \mathbb{N}$, tem a seguinte fórmula de recorrência:*

$$T_{(n+3)(s_1,s_2,s_3)} = s_1 T_{(n+1)(s_1,s_2,s_3)} + s_2 T_{(n)(s_1,s_2,s_3)} + s_3 T_{(n-1)(s_1,s_2,s_3)},$$

com valores inicias atrasados em relação à sequência de Tridovan: $T_{(0)(s_1,s_2,s_3)} = 0$, $T_{(1)(s_1,s_2,s_3)} = 1$, $T_{(2)(s_1,s_2,s_3)} = 0$, $T_{(3)(s_1,s_2,s_3)} = s_1$ e para efeito de notação, utiliza-se $T_{(n)(s_1,s_2,s_3)} = T_{(n)}$.

Definição 11. *Para $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{Z}$, a sequência matricial (s_1, s_2, s_3)-Tridovan, chamada de $\tau_{(n)}(s_1, s_2, s_3)$ com $n \geqslant 0$, é definida como:*

$$\tau_{(n+3)(s_1,s_2,s_3)} = s_1 \tau_{(n+1)(s_1,s_2,s_3)} + s_2 \tau_{(n)(s_1,s_2,s_3)} + s_3 \tau_{(n-1)(s_1,s_2,s_3)},$$

com: $\tau_{(s_1,s_2,s_3)0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\tau_{(s_1,s_2,s_3)1} = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\tau_{(s_1,s_2,s_3)2} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & 0 \\ 0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e

$\tau_{(s_1,s_2,s_3)3} = \begin{bmatrix} s_2 & (s_1)^2 + s_3 & s_1.s_2 & s_1.s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & 0 \\ 0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Teorema 12. *A matriz geradora de (s_1,s_2,s_3)-Tridovan, chamada de $\tau_{(s_1,s_2,s_3)}$ para $n \geqslant 0$, é expressa por:*

Para $\tau_{(s_1,s_2,s_3)} = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *tem-se* $\tau^n_{(s_1,s_2,s_3)} = \begin{bmatrix} T_{(n+1)} & T_{(n+2)} & s_2T_{(n)} + s_3T_{(n-1)} & s_3T_{(n)} \\ T_{(n)} & T_{(n+1)} & s_2T_{(n-1)} + s_3T_{(n-2)} & s_3T_{(n-1)} \\ T_{(n-1)} & T_{(n)} & s_2T_{(n-2)} + s_3T_{(n-3)} & s_3T_{(n-2)} \\ T_{(n-2)} & T_{(n-1)} & s_2T_{(n-3)} + s_3T_{(n-4)} & s_3T_{(n-3)} \end{bmatrix}$.

Demonstração. Utilizando a Definição 11 e o segundo princípio da indução finita, tem-se que:

$$\tau^{(n+1)}_{(s_1,s_2,s_3)} = s_1\tau^{(n-1)}_{(s_1,s_2,s_3)} + s_2\tau^{(n-2)}_{(s_1,s_2,s_3)} + s_3\tau^{(n-3)}_{(s_1,s_2,s_3)}$$

$$\begin{aligned} \tau^{(n+1)}_{(s_1,s_2,s_3)} = s_1 & \begin{bmatrix} T_{(n)} & T_{(n+1)} & s_2T_{(n-1)} + s_3T_{(n-2)} & s_3T_{(n-1)} \\ T_{(n-1)} & T_{(n)} & s_2T_{(n-2)} + s_3T_{(n-3)} & s_3T_{(n-2)} \\ T_{(n-2)} & T_{(n-1)} & s_2T_{(n-3)} + s_3T_{(n-4)} & s_3T_{(n-3)} \\ T_{(n-3)} & T_{(n-2)} & s_2T_{(n-4)} + s_3T_{(n-5)} & s_3T_{(n-4)} \end{bmatrix} \\ + s_2 & \begin{bmatrix} T_{(n-1)} & T_{(n)} & s_2T_{(n-2)} + s_3T_{(n-3)} & s_3T_{(n-2)} \\ T_{(n-2)} & T_{(n-1)} & s_2T_{(n-3)} + s_3T_{(n-4)} & s_3T_{(n-3)} \\ T_{(n-3)} & T_{(n-2)} & s_2T_{(n-4)} + s_3T_{(n-5)} & s_3T_{(n-4)} \\ T_{(n-4)} & T_{(n-3)} & s_2T_{(n-5)} + s_3T_{(n-6)} & s_3T_{(n-5)} \end{bmatrix} \\ + s_3 & \begin{bmatrix} T_{(n-2)} & T_{(n-1)} & s_2T_{(n-3)} + s_3T_{(n-4)} & s_3T_{(n-3)} \\ T_{(n-3)} & T_{(n-2)} & s_2T_{(n-4)} + s_3T_{(n-5)} & s_3T_{(n-4)} \\ T_{(n-4)} & T_{(n-3)} & s_2T_{(n-5)} + s_3T_{(n-6)} & s_3T_{(n-5)} \\ T_{(n-5)} & T_{(n-4)} & s_2T_{(n-6)} + s_3T_{(n-7)} & s_3T_{(n-6)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\tau^{(n+1)}_{(s_1,s_2,s_3)} = \begin{bmatrix} T_{(n+2)} & T_{(n+3)} & s_2T_{(n+1)} + s_3T_{(n)} & s_3T_{(n+1)} \\ T_{(n+1)} & T_{(n+2)} & s_2T_{(n)} + s_3T_{(n-1)} & s_3T_{(n)} \\ T_{(n)} & T_{(n+1)} & s_2T_{(n-3)} + s_3T_{(n-2)} & s_3T_{(n-1)} \\ T_{(n-1)} & T_{(n)} & s_2T_{(n-2)} + s_3T_{(n-3)} & s_3T_{(n-2)} \end{bmatrix}$$

□

5 A fórmula de Binet da sequência matricial (s_1,s_2)-Padovan e (s_1,s_2,s_3)-Tridovan

A fórmula de Binet é uma alternativa para encontrar os temos da sequência sem depender da recorrência. Esta fórmula é referenciada em Lima (2016), apenas para equações do 2º grau, sendo a sequência matricial (s_1, s_2)-Padovan do 3º grau e (s_1, s_2, s_3)-Tridovan do 4º grau, é necessário conhecermos primeiramente as suas respectivas equações características.

Definição 13. *Seja r_1,r_2 as raízes da equação $r^2 + pr + q = 0$, com $p,q \in \mathbb{Z}$, $r_1 \neq r_2$. Assim, a solução do polinômio na forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são expressos: $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$, sendo C_1, C_2 os coeficientes (LIMA, 2016).*

Definição 14. *A equação característica da sequência matricial (s_1, s_2)-Padovan é definida a partir da recorrência 7 como:*

$$x^3 = s_1.x - s_2 \Longrightarrow x^3 - s_1.x - s_3 = 0$$

Resultando em uma raíz real e duas complexas conjugadas e r_1, r_2, r_3 as raízes dessa equação. Onde:
$r_1 = A + B$;
$r_2 = -\frac{1}{2}(A+B) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(A-B)$;
$r_3 = -\frac{1}{2}(A+B) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(A-B)$
E:
$A = (\frac{1}{2} + \sqrt{\Delta})^{(\frac{1}{3})}$,
$B = (\frac{1}{2} - \sqrt{\Delta})^{(\frac{1}{3})}$,
$\Delta = (\frac{t}{2})^2 - (\frac{s}{3})^3$

De posse dessa definição e do Teorema 13, podemos chegar facilmente para a fórmula de Binet da Sequência matricial (s_1,s_2)-Padovan.

Teorema 15. *Para $n \in \mathbb{N}$, tem-se que a fórmula de Binet da Sequência (s_1,s_2)-Padovan é expressa por:*

$$Q_{(s_1,s_2)}^{(n)} = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n + C_3 r_3^n,$$

onde C_1, C_2, C_2 são os coeficientes, r_1, r_2, r_3 as raízes da equação característica e $27s_2^2 - 4s_1^3 \neq 0$.

O discriminante $\Delta = \frac{(-s_2)2}{4} + \frac{(-s_1)^3}{27}$, referente à equação de 3º grau, determina como serão as raízes da equação. Logo, como $\Delta \neq 0$ para que as raízes não sejam iguais, podemos chegar facilmente a conclusão da condição de que $27s_2^2 - 4s_1^3 \neq 0$. De fato, caso a condição não exista, não haverão os coeficientes enunciadas acima pelo fato das raízes serem iguais, logo não existirá a fórmula de Binet. Note ainda que $r_1.r_2.r_3 = s_2$ e que $r_1 + r_2 + r_3 = 0$, isso implica que se o valor de s_2 for zero, existirá uma raiz também zero, logo não haverá a fórmula de Binet para este caso.

Adiante, exploraremos a equação característica e a fórmula de Binet da Sequência matricial (s_1,s_2,s_3)-Tridovan, baseados em estudos acerca da Sequência matricial (s_1,s_2)-Padovan.

Definição 16. *A equação característica da Sequência (s_1,s_2,s_3)-Tridovan é definida baseada na recorrência (ver Definição 10), resultando em:*

$$x^4 = s_1x^2 + s_2x + s_3 \Longrightarrow x^4 - s_1x^2 - s_2x - s_3 = 0,$$

onde r_1, r_2, r_3, r_4 são as raízes, e:
$r_1 = -S + \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}}$

$r_2 = -S - \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p + \frac{q}{S}}$
$r_3 = S + \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}}$
$r_4 = S - \frac{1}{2}\sqrt{-4S^2 - 2p - \frac{q}{S}}$
$p = -8s_1,\ q = -s_2$
$S = \frac{1}{2}\sqrt{-\frac{2}{3}p + \frac{1}{3}(Q + \frac{\Delta_0}{Q})}$
$Q = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + (\sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3})}{2}}$
$\Delta_0 = s_1^2 - 12s_3$
$\Delta_1 = -2s_1^3 + 27s_2^2 - 72s_1s_3$

Teorema 17. *Para $n \in \mathbb{N}$, tem-se que a fórmula de Binet da sequência (s_1,s_2,s_3)-Tridovan é dada por:*

$$\Gamma^{(n)}_{(s_1,s_2,s_3)} = C_1r_1^n + C_2r_2^n + C_3r_3^n + C_4r_4^n,$$

em que C_1, C_2, C_3, C_4 são os coeficientes, r_1, r_2, r_3, r_4 as raízes da equação característica. Assim: $s_3 \neq 0$ e $\Delta < 0$ ou ($\Delta > 0$ e $P < 0$ e $D < 0$) onde $\Delta = s_2^2.(4s_1^3 - 27s_2^2) - 16s_3(16s_3^2 + 8s_1^2s_3 + 9s_1s_2^2 + s_1^4)$, $P = -8s_1$ e $D = -64s_3 - 16s_1$.

Essa condição é obtida a partir do princípio de que nenhuma das raízes não podem ser iguais, implicando na condição de que $\Delta \neq 0$. Partindo da forma geral da equação de 4º grau representada por $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, em que a, b, c, d, e são os coeficientes desta equação, tem-se que o discriminante Δ é obtido através da fórmula (REES, 1922):

$$\begin{aligned}\Delta = {} & 256a^3e^3 - 192a^2bd^2 - 128a^2c^2e^2 + 144a^2cd^2e - 27a^2d^4 + 144ab^2ce^2 \\ & - 6ab^2d^2e - 80abc^2de + 18abcd^3 + 16ac^4e - 4ac^3d^2 - 27b^4e^2 + 18b^3cde \\ & - 4b^3d^3 - 4b^2c^3e + b^2c^2d^2.\end{aligned}$$

Portanto:

$$\Delta = s_2^2(4s_1^3 - 27s_2^2) - 16s_3(16s_3^2 + 8s_1^2s_3 + 9s_1s_2^2 + s_1^4).$$

Os parâmetros P e D são obtidos pela fórmula:

$$\begin{aligned}P &= 8ac - 3b^2 = -8s_1, \\ D &= 64a^3e - 16a^2c^2 + 16ab^2c - 16a^2bd - 3b^4 = -64s_3 - 16s_1.\end{aligned}$$

Assim: $-8s_1 > 0$ e $-64s_3 - 16s_1 > 0$

O produto das raízes $r_1r_2r_3r_4 = s_3$ e a soma das raízes $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$, implicam que o termo $s_3 \neq 0$, para que a existência da fórmula de Binet seja possível.

6 A função geradora da sequência matricial (s_1,s_2)-Padovan e (s_1,s_2,s_3)-Tridovan

Uma função geradora permite a resolução de recorrências lineares com coeficientes constantes (KOSHY, 2001). Este procedimento demonstrou uma forma de calcular os números de uma sequência recorrente e linear, sem ser necessário conhecer os temos antecessores.

Sendo uma série de potência formal, a função geradora gera, em seus coeficientes, informações sobre uma sucessão a_n com n pertencendo aos números naturais, e sendo uma função $G(a_n, x)$ definida pela série:

$$G(a_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots$$

De fato, essa função é uma expressão fechada e a convergência não é analisada e nem considerada, além de não estabelecerem relações entre dois conjuntos. Portanto, essa função gera um somatório infinito em que os seus coeficientes formam os temos da sequência estudada.

Teorema 18. *A Função Geradora da Sequência (s_1,s_2)-Padovan para $n \in \mathbb{N}$ é dada por:*

$$G(P_{(n)}, x) = \frac{x}{1 - s_1 x^2 - s_2 x^3}$$

Demonstração. Para os números Padovan essa função é multiplicada por $s_1 x^2, s_2 x^3$ nas equações abaixo devido a sua relação de recorrência.

Assim, para sequência (s_1,s_2)-Padovan, considerando $P_0 = 0, P_1 = 1, P_2 = 0$, e utilizando $P_{(n)(s_1,s_2)} = P_{(n)}$ para melhor visualização, tem-se que:

$$G(P_{(n)(s_1,s_2)}, x) = P_0 + P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + P_4 x^4 + \ldots \quad (1)$$

$$s_1 x^2 G(P_{(n)(s_1,s_2)}, x) = s_1 P_0 x^2 + s_1 P_1 x^3 + s_1 P_2 x^4 + s_1 P_3 x^5 + s_1 P_4 x^6 + \ldots \quad (2)$$

$$s_2 x^3 G(P_{(n)(s_1,s_2)}, x) = s_2 P_0 x^3 + s_2 P_1 x^4 + s_2 P_2 x^5 + s_2 P_3 x^6 + s_2 P_4 x^7 + \ldots \quad (3)$$

Baseada na Equação 1 - (2+3), temos que:

$$G(P_{(n)(s_1,s_2)}, x)(1 - s_1 x^2 - s_2 x^3) = P_0 + P_1 x + (P_2 - P_0) x^2$$

$$G(P_{(n)(s_1,s_2)}, x)(1 - s_1 x^2 - s_2 x^3) = x$$

$$G(P_{(n)(s_1,s_2)}, x) = \frac{x}{1 - s_1 x^2 - s_2 x^3}$$

□

A seguir, na Figura **2 -**, apresentamos uma caracterização (HUNTLEY, 1985), em que diz que ao determinarmos os primeiros coeficientes do desenvolvimento de através de divisão direta, forma a série de Fibonacci, assim da mesma forma ocorre para a série da Sequência matricial estudada neste trabalho. Este procedimento foi realizado utilizando o software Vmáxima.

```
(%i2)   (x/1-s_1x^2-s_2.x^3);
        taylor(x/(-s_2.x^3-s_1.x^2+1),x,0,20);
```

(%o1) $x - s_2 \,.\, x^3 - s_{1x}^{\;2}$

(%o2)/T/ $x + s_1 x^3 + s_2 x^4 + s_1^2 x^5 + 2 s_2 s_1 x^6 + (s_1^3 + s_2^2) x^7 + 3 s_2 s_1^2 x^8 + (s_1^4 + 3 s_2^2 s_1) x^9 + (4 s_2 s_1^3 + s_2^3) x^{10} + (s_1^5 + 6 s_2^2 s_1^2) x^{11} + (5 s_2 s_1^4 + 4 s_2^3 s_1) x^{12} + (s_1^6 + 10 s_2^2 s_1^3 + s_2^4) x^{13} + (6 s_2 s_1^5 + 10 s_2^3 s_1^2) x^{14} + (s_1^7 + 15 s_2^2 s_1^4 + 5 s_2^4 s_1) x^{15} + (7 s_2 s_1^6 + 20 s_2^3 s_1^3 + s_2^5) x^{16} + (s_1^8 + 21 s_2^2 s_1^5 + 15 s_2^4 s_1^2) x^{17} + (8 s_2 s_1^7 + 35 s_2^3 s_1^4 + 6 s_2^5 s_1) x^{18} + (s_1^9 + 28 s_2^2 s_1^6 + 35 s_2^4 s_1^3 + s_2^6) x^{19} + (9 s_2 s_1^8 + 56 s_2^3 s_1^5 + 21 s_2^5 s_1^2) x^{20} + \ldots$

Figura 2 - Desenvolvimento da função geradora da sequência (s_1,s_2)-Padovan
Fonte: Elaborado pelos autores

Teorema 19. *A Função geradora da sequência matricial (s_1,s_2)-Padovan para $n \in \mathbb{N}$ é dada por:*

$$G(Q_{(n)},x) = \frac{x}{1 - s_1x^2 - s_2x^3}$$

Demonstração. Para esses números a função é multiplicada por s_1x^2, s_2x^3 nas equações abaixo devido a sua relação de recorrência 8.

Assim, para sequência matricial (s_1,s_2)-Padovan, considerando: $Q_{0(s_1,s_2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Q_{1(s_1,s_2)} = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & s_2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $Q_{2(s_1,s_2)} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & 0 \\ 0 & s_1 & s_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se que:

$$G(Q_{(n)(s_1,s_2)},x) = Q_0 + Q_1x + Q_2x^2 + Q_3x^3 + Q_4x^4 + \ldots \quad (4)$$
$$s_1x^2G(Q_{(n)(s_1,s_2)},x) = s_1Q_0x^2 + s_1Q_1x^3 + s_1Q_2x^4 + s_1Q_3x^5 + s_1Q_4x^6 + \ldots \quad (5)$$
$$s_2x^3G(Q_{(n)(s_1,s_2)},x) = s_2Q_0x^3 + s_2Q_1x^4 + s_2Q_2x^5 + s_2Q_3x^6 + s_2Q_4x^7 + \ldots \quad (6)$$

Baseada na Equação 4 - (5+6), temos que:

$$G(Q_{(n)(s_1,s_2)},x)(1 - s_1x^2 - s_2x^3) = Q_0 + Q_1x + (Q_2 - Q_0)x^2$$
$$G(Q_{(n)(s_1,s_2)},x)(1 - s_1x^2 - s_2x^3) = Q_0 + Q_1x + (Q_2 - Q_0)x^2$$
$$G(Q_{(n)(s_1,s_2)},x) = \frac{Q_0 + Q_1x + (Q_2 - Q_0)x^2}{1 - s_1x^2 - s_2x^3}$$

□

De maneira semelhante, podemos investigar um outro teorema, a ser utilizado para a sequência (s_1,s_2,s_3)-Tridovan

Teorema 20. *A Função geradora da sequência (s_1,s_2,s_3)-Tridovan para $n \in \mathbb{N}$ é dada por:*

$$G(T_{(n)},x) = \frac{x}{1 - s_1x^2 - s_2x^3 - s_3x^4}$$

Demonstração. A função $G(T_{(n)},x)$ é multiplicada por s_1x^2,s_2x^3 e s_3x^4, de acordo com a fórmula de recorrência (Definição 10). Considerando $T_{(0)} = 0, T_{(1)} = 1, T_{(2)} = 0, T_{(3)} = s_1$, e utilizando $T_{(n)(s_1,s_2,s_3)} = T_{(n)}$ para melhor visualização, tem-se que:

$$G(T_{(n)(s_1,s_2)},x) = T_{(0)} + T_{(1)}x + T_{(2)}x^2 + T_{(3)}x^3 + T_{(4)}x^4 + \dots \tag{7}$$
$$s_1x^2G(T_{(n)(s_1,s_2)},x) = s_1T_{(0)}x^2 + s_1T_{(1)}x^3 + s_1T_{(2)}x^4 + s_1T_{(3)}x^5 + s_1T_{(4)}x^6 + \dots \tag{8}$$
$$s_2x^3G(T_{(n)(s_1,s_2)},x) = s_2T_{(0)}x^3 + s_2T_{(1)}x^4 + s_2T_{(2)}x^5 + s_2T_{(3)}x^6 + s_2T_{(4)}x^7 + \dots \tag{9}$$
$$s_3x^4G(T_{(n)(s_1,s_2)},x) = s_3T_{(0)}x^3 + s_3T_{(1)}x^4 + s_3T_{(2)}x^5 + s_3T_{(3)}x^6 + s_3T_{(4)}x^7 + \dots \tag{10}$$

De acordo com a Equação 7 - (8+9+10), temos que:

$$G(T_{(n)(s_1,s_2,s_3)},x)(1 - s_1x^2 - s_2x^3 - s_3x^4) = -T_{(0)}x - T_{(1)}x^2 - T_{(0)} - T_{(1)}x - T_{(2)}x^2$$
$$G(T_{(n)(s_1,s_2,s_3)},x)(1 - s_1x^2 - s_2x^3 - s_3x^4) = x$$
$$G(T_{(n)(s_1,s_2,s_3)},x) = \frac{x}{1 - s_1x^2 - s_2x^3 - s_3x^4}$$

□

Logo abaixo, na Figura **3 -**, é mostrada uma exploração da função geradora da sequência (s_1,s_2,s_3)-Tridovan utilizando o software Vmáxima.

```
(%i2)   (x/1−s_1x^2−s_2.x^3−s_3.x^4);
        taylor(x/(−s_3.x^4−s_2.x^3−s_1.x^2+1),x,0,20);
```

(%o1) $x - s_3\,.\,x^4 - s_2\,.\,x^3 - s_{1x}{}^2$

(%o2)/T/ $x + s_1 x^3 + s_2 x^4 + (s_1^2 + s_3) x^5 + 2 s_2 s_1 x^6 + (s_1^3 + 2 s_3 s_1 + s_2^2) x^7 + (3 s_2 s_1^2 + 2 s_3 s_2) x^8 +$
$(s_1^4 + 3 s_3 s_1^2 + 3 s_2^2 s_1 + s_3^2) x^9 + (4 s_2 s_1^3 + 6 s_3 s_2 s_1 + s_2^3) x^{10} +$
$(s_1^5 + 4 s_3 s_1^3 + 6 s_2^2 s_1^2 + 3 s_3^2 s_1 + 3 s_3 s_2^2) x^{11} + (5 s_2 s_1^4 + 12 s_3 s_2 s_1^2 + 4 s_2^3 s_1 + 3 s_3^2 s_2) x^{12} +$
$(s_1^6 + 5 s_3 s_1^4 + 10 s_2^2 s_1^3 + 6 s_3^2 s_1^2 + 12 s_3 s_2^2 s_1 + s_2^4 + s_3^3) x^{13} +$
$(6 s_2 s_1^5 + 20 s_3 s_2 s_1^3 + 10 s_2^3 s_1^2 + 12 s_3^2 s_2 s_1 + 4 s_3 s_2^3) x^{14} +$
$(s_1^7 + 6 s_3 s_1^5 + 15 s_2^2 s_1^4 + 10 s_3^2 s_1^3 + 30 s_3 s_2^2 s_1^2 + (5 s_2^4 + 4 s_3^3) s_1 + 6 s_3^2 s_2^2) x^{15} +$
$(7 s_2 s_1^6 + 30 s_3 s_2 s_1^4 + 20 s_2^3 s_1^3 + 30 s_3^2 s_2 s_1^2 + 20 s_3 s_2^3 s_1 + s_2^5 + 4 s_3^3 s_2) x^{16} +$
$(s_1^8 + 7 s_3 s_1^6 + 21 s_2^2 s_1^5 + 15 s_3^2 s_1^4 + 60 s_3 s_2^2 s_1^3 + (15 s_2^4 + 10 s_3^3) s_1^2 + 30 s_3^2 s_2^2 s_1 + 5 s_3 s_2^4 + s_3^4)$
$x^{17} + (8 s_2 s_1^7 + 42 s_3 s_2 s_1^5 + 35 s_2^3 s_1^4 + 60 s_3^2 s_2 s_1^3 + 60 s_3 s_2^3 s_1^2 + (6 s_2^5 + 20 s_3^3 s_2) s_1 + 10 s_3^2 s_2^3)$
$x^{18} + (s_1^9 + 8 s_3 s_1^7 + 28 s_2^2 s_1^6 + 21 s_3^2 s_1^5 + 105 s_3 s_2^2 s_1^4 + (35 s_2^4 + 20 s_3^3) s_1^3 + 90 s_3^2 s_2^2 s_1^2 +$
$(30 s_3 s_2^4 + 5 s_3^4) s_1 + s_2^6 + 10 s_3^3 s_2^2) x^{19} + (9 s_2 s_1^8 + 56 s_3 s_2 s_1^6 + 56 s_2^3 s_1^5 + 105 s_3^2 s_2 s_1^4 + 140 s_3 s_2^3$
$s_1^3 + (21 s_2^5 + 60 s_3^3 s_2) s_1^2 + 60 s_3^2 s_2^3 s_1 + 6 s_3 s_2^5 + 5 s_3^4 s_2) x^{20} + \dots$

Figura 3 - Desenvolvimento da função geradora da sequência (s_1,s_2,s_3)-Tridovan
Fonte: Elaborado pelos autores

Teorema 21. *A Função geradora da sequência matricial* (s_1,s_2,s_3)*-Tridovan para* $n \in \mathbb{N}$ *é dada por:*

$$G(\tau_{(n)},x) = \frac{x}{1 - s_1x^2 - s_2x^3 - s_3x^4}$$

Demonstração. A função $G(\tau_{(n)},x)$ é multiplicada por s_1x^2,s_2x^3 e s_3x^4, de acordo com a fórmula de recorrência (Definição 11).

Considerando:

$$\tau_{(s_1,s_2,s_3)0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tau_{(s_1,s_2,s_3)1} = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau_{(s_1,s_2,s_3)2} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 & 0 \\ 0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tau_{(s_1,s_2,s_3)3} = \begin{bmatrix} s_2 & (s_1)^2+s_3 & s_1.s_2 & s_1.s_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 & 0 \\ 0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{tem-se que:}$$

$$G(\tau_{(n)(s_1,s_2)},x) = \tau_{(0)} + \tau_{(1)}x + \tau_{(2)}x^2 + \tau_{(3)}x^3 + \tau_{(4)}x^4 + \dots \tag{11}$$

$$s_1x^2G(\tau_{(n)(s_1,s_2)},x) = s_1\tau_{(0)}x^2 + s_1\tau_{(1)}x^3 + s_1\tau_{(2)}x^4 + s_1\tau_{(3)}x^5 + s_1\tau_{(4)}x^6 + \dots \tag{12}$$

$$s_2x^3G(\tau_{(n)(s_1,s_2)},x) = s_2\tau_{(0)}x^3 + s_2\tau_{(1)}x^4 + s_2\tau_{(2)}x^5 + s_2\tau_{(3)}x^6 + s_2\tau_{(4)}x^7 + \dots \tag{13}$$

$$s_3x^4G(\tau_{(n)(s_1,s_2)},x) = s_3\tau_{(0)}x^3 + s_3\tau_{(1)}x^4 + s_3\tau_{(2)}x^5 + s_3\tau_{(3)}x^6 + s_3\tau_{(4)}x^7 + \dots \tag{14}$$

De acordo com a Equação 11 - (12+13+14), temos que:

$$G(\tau_{(n)(s_1,s_2,s_3)},x)(1-s_1x^2-s_2x^3-s_3x^4) = \tau_{(0)}x - \tau_{(1)}x^2 - \tau_{(0)} - \tau_{(1)}x - \tau_{(2)}x^2$$

$$G(\tau_{(n)(s_1,s_2,s_3)},x)(1-s_1x^2-s_2x^3-s_3x^4) = \tau_{(0)}x - \tau_{(1)}x^2 - \tau_{(0)} - \tau_{(1)}x - \tau_{(2)}x^2$$

$$G(\tau_{(n)(s_1,s_2,s_3)},x) = \frac{\tau_{(0)}x - \tau_{(1)}x^2 - \tau_{(0)} - \tau_{(1)}x - \tau_{(2)}x^2}{1-s_1x^2-s_2x^3-s_3x^4}$$

□

7 Comportamento da sequência matricial (s_1,s_2,s_3)-Tridovan para os números inteiros

Nesta seção, iremos explorar, com os devidos cuidados, a sequência matricial (s_1,s_2,s_3)-Tridovan para os seus termos negativos.

A extensão para os números inteiros parte da recorrência inicial:

$$T_{(n+3)}(s_1,s_2,s_3) = s_1T_{(n+1)}(s_1,s_2,s_3) + s_2T_{(n)}(s_1,s_2,s_3) + s_3T_{(n-1)}(s_1,s_2,s_3)$$

Assim, escrevendo:

$$T_{(3)}(s_1,s_2,s_3) = s_1T_{(1)}(s_1,s_2,s_3) + s_2T_{(0)}(s_1,s_2,s_3) + s_3T_{(-1)}(s_1,s_2,s_3)$$

Resultando em:

$$T_{(-1)}(s_1,s_2,s_3) = \frac{1}{s_3}(T_{(3)}(s_1,s_2,s_3) - s_1T_{(1)}(s_1,s_2,s_3) - s_2T_{(0)}(s_1,s_2,s_3))$$

Seguindo com esse raciocínio, podemos obter:

$$T_{(-1)}(s_1,s_2,s_3)=\frac{1}{s_3}(T_{(3)}(s_1,s_2,s_3)-s_1T_{(1)}(s_1,s_2,s_3)-s_2T_{(0)}(s_1,s_2,s_3))=0$$
$$T_{(-2)}(s_1,s_2,s_3)=\frac{1}{s_3}(T_{(2)}(s_1,s_2,s_3)-s_1T_{(0)}(s_1,s_2,s_3)-s_2T_{(-1)}(s_1,s_2,s_3))=0$$
$$T_{(-3)}(s_1,s_2,s_3)=\frac{1}{s_3}(T_{(1)}(s_1,s_2,s_3)-s_1T_{(-1)}(s_1,s_2,s_3)-s_2T_{(-2)}(s_1,s_2,s_3))=\frac{1}{s_3}$$
$$T_{(-4)}(s_1,s_2,s_3)=\frac{1}{s_3}(T_{(0)}(s_1,s_2,s_3)-s_1T_{(-2)}(s_1,s_2,s_3)-s_2T_{(-3)}(s_1,s_2,s_3))=-\frac{s_2}{(s_3)^2}$$
$$T_{(-5)}(s_1,s_2,s_3)=\frac{1}{s_3}(T_{(-1)}(s_1,s_2,s_3)-s_1T_{(-3)}(s_1,s_2,s_3)-s_2T_{(-4)}(s_1,s_2,s_3))=\frac{(s_2^2-s_1.s_3)}{(s_3)^3}$$
$$T_{(-6)}(s_1,s_2,s_3)=\frac{1}{s_3}(T_{(-2)}(s_1,s_2,s_3)-s_1T_{(-4)}(s_1,s_2,s_3)-s_2T_{(-5)}(s_1,s_2,s_3))=\frac{-s_2^3+2s_1s_2s_3}{(s_3)^4}$$

Percebe-se que ao realizar a substituição do termo $T_{(n)}$ por $T_{(-n)}$, obtemos:

$$T_{(-n+3)}(s_1,s_2,s_3)=s_1T_{(-n+1)}+s_2T_{(-n)}+s_3T_{(-n-1)}$$
$$T_{(-n-1)(s_1,s_2,s_3)}=(\frac{1}{s_3})(T_{(-n+3)(s_1,s_2,s_3)}-s_1T_{(-n+1)(s_1,s_2,s_3)}-s_2T_{(-n)(s_1,s_2,s_3)})$$

Definição 22. *Para $s_1,s_2,s_3\in\mathbb{Z}$, a sequência (s_1,s_2,s_3)-Tridovan para o lado esquerdo, chamada de $T_{(-n)}(s_1,s_2,s_3)$ com $n\geqslant 0$ e $n\in\mathbb{N}$, a sua fórmula de recorrência é definida como:*

$$T_{(-n-1)(s_1,s_2,s_3)}=(\frac{1}{s_3})(T_{(-n+3)(s_1,s_2,s_3)}-s_1T_{(-n+1)(s_1,s_2,s_3)}-s_2T_{(-n)(s_1,s_2,s_3)}),$$

com $T_{(-n)}(s_1,s_2,s_3)=T_{(-n)}$ e os mesmos valores iniciais atribuídos anteriormente na Definição 10.

Definição 23. *Para $s_1,s_2,s_3\in\mathbb{Z}$, a sequência matricial (s_1,s_2,s_3)-Tridovan para o lado esquerdo, chamada de $\Gamma_{(-n)}(s_1,s_2,s_3)$ com $n\geqslant 0$ e $n\in\mathbb{N}$, é definida como:*

$$\Gamma_{(-n-1)(s_1,s_2,s_3)}=(\frac{1}{s_3})(\Gamma_{(-n+3)(s_1,s_2,s_3)}-s_1\Gamma_{(-n+1)(s_1,s_2,s_3)}-s_2\Gamma_{(-n)(s_1,s_2,s_3)})$$

Utilizando os mesmos valores iniciais da Definição 11.

A matriz geradora de (s_1,s_2,s_3)-Tridovan para os termos negativos da sequência matricial, é obtida através do cálculo da matriz inversa de matriz geradora (s_1,s_2,s_3)-Tridovan, sendo denominada de $\Gamma_{(s_1,s_2,s_3)}$, e resultando no teorema descrito abaixo.

Teorema 24. *A matriz geradora de (s_1,s_2,s_3)-Tridovan para o lado negativo, para $n\geqslant 0$ e $n\in\mathbb{N}$, é dada por:*

$$\text{Para } \Gamma_{(s_1,s_2,s_3)}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1/s_3&0&-s_1/s_3&-s_2/s_3\end{bmatrix}, \text{tem-se}$$

$$\Gamma^{(-n)}_{(s_1,s_2,s_3)}=\begin{bmatrix}T_{(-n+1)}&T_{(-n+2)}&s_2T_{(-n)}+s_3T_{(-n-1)}&s_3T_{(-n)}\\T_{(-n)}&T_{(-n+1)}&s_2T_{(-n-1)}+s_3T_{(-n-2)}&s_3T_{(-n-1)}\\T_{(-n-1)}&T_{(-n)}&s_2T_{(-n-2)}+s_3T_{(-n-3)}&s_3T_{(-n-2)}\\T_{(-n-2)}&T_{(-n-1)}&s_2T_{(-n-3)}+s_3T_{(-n-4)}&s_3T_{(-n-3)}\end{bmatrix}$$

Demonstração. Partindo da Definição 23 e do segundo princípio da indução finita, tem-se que:

$$\Gamma_{(-n+1)(s_1,s_2,s_3)} = (\frac{1}{s_3})(\Gamma^{(-n+5)}_{(s_1,s_2,s_3)} - s_1\Gamma^{(-n+3)}_{(s_1,s_2,s_3)} - s_2\Gamma^{(-n+2)}_{(s_1,s_2,s_3)})$$

$$\Gamma^{(-n+1)}_{(s_1,s_2,s_3)} = (\frac{1}{s_3})(\begin{bmatrix} T_{(-n+6)} & T_{(-n+7)} & s_2T_{(-n+5)}+s_3T_{(-n+4)} & s_3T_{(-n+5)} \\ T_{(-n+5)} & T_{(-n+6)} & s_2T_{(-n+4)}+s_3T_{(-n+3)} & s_3T_{(-n+4)} \\ T_{(-n+4)} & T_{(-n+5)} & s_2T_{(-n+3)}+s_3T_{(-n+2)} & s_3T_{(-n+3)} \\ T_{(-n+3)} & T_{(-n+4)} & s_2T_{(-n+2)}+s_3T_{(-n+1)} & s_3T_{(-n+2)} \end{bmatrix}$$

$$- s_1 \begin{bmatrix} T_{(-n+4)} & T_{(-n+5)} & s_2T_{(-n+3)}+s_3T_{(-n+2)} & s_3T_{(-n+3)} \\ T_{(-n+3)} & T_{(-n+4)} & s_2T_{(-n+2)}+s_3T_{(-n+1)} & s_3T_{(-n+2)} \\ T_{(-n+2)} & T_{(-n+3)} & s_2T_{(-n+1)}+s_3T_{(-n)} & s_3T_{(-n+1)} \\ T_{(-n+1)} & T_{(-n+2)} & s_2T_{(-n)}+s_3T_{(-n-1)} & s_3T_{(-n)} \end{bmatrix}$$

$$- s_2 \begin{bmatrix} T_{(-n+3)} & T_{(-n+4)} & s_2T_{(-n+2)}+s_3T_{(-n+1)} & s_3T_{(-n+2)} \\ T_{(-n+2)} & T_{(-n+3)} & s_2T_{(-n+1)}+s_3T_{(-n)} & s_3T_{(-n+1)} \\ T_{(-n+1)} & T_{(-n+2)} & s_2T_{(-n)}+s_3T_{(-n-1)} & s_3T_{(-n)} \\ T_{(-n)} & T_{(-n+1)} & s_2T_{(-n-1)}+s_3T_{(-n-2)} & s_3T_{(-n-1)} \end{bmatrix})$$

$$\Gamma^{(-n+1)}_{(s_1,s_2,s_3)} = \begin{bmatrix} T_{(-n+2)} & T_{(-n+3)} & s_2T_{(-n+1)}+s_3T_{(-n)} & s_3T_{(-n+1)} \\ T_{(-n+1)} & T_{(-n+2)} & s_2T_{(-n)}+s_3T_{(-n-1)} & s_3T_{(-n)} \\ T_{(-n)} & T_{(-n+1)} & s_2T_{(-n-3)}+s_3T_{(-n-2)} & s_3T_{(-n-1)} \\ T_{(-n-1)} & T_{(-n)} & s_2T_{(-n-2)}+s_3T_{(-n-3)} & s_3T_{(-n-2)} \end{bmatrix}$$

□

8 Algumas propriedades da sequência (s_1,s_2,s_3)-Tridovan e da sequência matricial

Nesta seção serão discutidas algumas propriedades básicas da sequência matricial (s_1,s_2,s_3)-Tridovan embasadas nas definições e nos teoremas apresentados anteriormente.

De posse da Definição11, podemos transpor a matriz, resultando em uma nova matriz válida desta sequência, sendo alterado apenas os valores iniciais, para:

$$\tau_{(s_1,s_2,s_3)0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tau_{(s_1,s_2,s_3)1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & 1 \\ s_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tau_{(s_1,s_2,s_3)2} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 1 & 0 \\ s_2 & s_1 & 0 & 1 \\ s_3 & s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tau_{(s_1,s_2,s_3)3} = \begin{bmatrix} s_2 & s_1 & 0 & 1 \\ (s_1)^2+s_3 & s_2 & s_1 & 0 \\ s_1.s_2 & s_3 & s_2 & 0 \\ s_1.s_3 & 0 & s_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, podemos chegar ao seguinte teorema:

Teorema 25. *Outra matriz geradora de* (s_1, s_2, s_3)*-Tridovan,* $\tau_{(s_1,s_2,s_3)}$ *para* $n \geqslant 0$*, expressa por:*

Para $\tau_{(s_1,s_2,s_3)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ s_1 & 0 & 1 & 0 \\ s_2 & 0 & 0 & 1 \\ s_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$*, tem-se*

$$\tau^n_{(s_1,s_2,s_3)} = \begin{bmatrix} T_{(n+1)} & T_{(n)} & T_{(n-1)} & T_{(n-2)} \\ T_{(n+2)} & T_{(n+1)} & T_{(n)} & T_{(n-1)} \\ s_2T_{(n)} + s_3T_{(n-1)} & s_2T_{(n-1)} + s_3T_{(n-2)} & s_2T_{(n-2)} + s_3T_{(n-3)} & s_2T_{(n-3)} + s_3T_{(n-4)} \\ s_3T_{(n)} & s_3T_{(n-1)} & s_3T_{(n-2)} & s_3T_{(n-3)} \end{bmatrix}$$

Demonstração. Para realizar a demonstração será utilizada a Definição 11 e o segundo princípio da indução finita, resultando:

$$\tau^{(n+1)}_{(s_1,s_2,s_3)} = s_1\tau^{(n-1)}_{(s_1,s_2,s_3)} + s_2\tau^{(n-2)}_{(s_1,s_2,s_3)} + s_3\tau^{(n-3)}_{(s_1,s_2,s_3)}$$

$$\tau^{(n+1)}_{(s_1,s_2,s_3)} = s_1 \begin{bmatrix} T_{(n)} & T_{(n-1)} & T_{(n-2)} & T_{(n-3)} \\ T_{(n+1)} & T_{(n)} & T_{(n-1)} & T_{(n-2)} \\ s_2T_{(n-1)} + s_3T_{(n-2)} & s_2T_{(n-2)} + s_3T_{(n-3)} & s_2T_{(n-3)} + s_3T_{(n-4)} & s_2T_{(n-4)} + s_3T_{(n-5)} \\ s_3T_{(n-1)} & s_3T_{(n)} & s_3T_{(n-3)} & s_3T_{(n-4)} \end{bmatrix} +$$

$$s_2 \begin{bmatrix} T_{(n-1)} & T_{(n-2)} & T_{(n-3)} & T_{(n-4)} \\ T_{(n)} & T_{(n-1)} & T_{(n-2)} & T_{(n-3)} \\ s_2T_{(n-2)} + s_3T_{(n-3)} & s_2T_{(n-3)} + s_3T_{(n-4)} & s_2T_{(n-4)} + s_3T_{(n-5)} & s_2T_{(n-5)} + s_3T_{(n-6)} \\ s_3T_{(n-2)} & s_3T_{(n-1)} & s_3T_{(n-4)} & s_3T_{(n-5)} \end{bmatrix}$$

$$+s_3 \begin{bmatrix} T_{(n-2)} & T_{(n-3)} & T_{(n-4)} & T_{(n-5)} \\ T_{(n-1)} & T_{(n-2)} & T_{(n-3)} & T_{(n-4)} \\ s_2T_{(n-3)} + s_3T_{(n-4)} & s_2T_{(n-4)} + s_3T_{(n-5)} & s_2T_{(n-5)} + s_3T_{(n-6)} & s_2T_{(n-6)} + s_3T_{(n-7)} \\ s_3T_{(n-3)} & s_3T_{(n-2)} & s_3T_{(n-5)} & s_3T_{(n-6)} \end{bmatrix}$$

$$\tau^{(n+1)}_{(s_1,s_2,s_3)} = \begin{bmatrix} T_{(n+2)} & T_{(n+1)} & T_{(n)} & T_{(n-1)} \\ T_{(n+3)} & T_{(n+2)} & T_{(n+1)} & T_{(n)} \\ s_2T_{(n+1)} + s_3T_{(n)} & s_2T_{(n)} + s_3T_{(n-1)} & s_2T_{(n-1)} + s_3T_{(n-2)} & s_2T_{(n-2)} + s_3T_{(n-3)} \\ s_3T_{(n+1)} & s_3T_{(n)} & s_3T_{(n-1)} & s_3T_{(n-2)} \end{bmatrix}$$

□

O teorema a seguir oferece mais algumas propriedades interessantes:

Teorema 26. *Dado* $T_{(n)} n \in \mathbb{Z}$*, são válidas as identidades a seguir:*
(i): $T_{(n+m)} = T_{(n+1)}T_{(m)} + T_{(n)}T_{(m+1)} + T_{(n-1)}(s_2T_{(m-1)} + T_{(m-2)}) + s_3T_{(n-2)}T_{(m-1)}$;
(ii): $(-1)^m(T_{(n)}T_{(m-1)} - T_{(n+1)}T_{(m)} + s_2T_{(n-1)}T_{(m+1)} + s_2T_{(n-1)}T_{(m+2)} + s_3T_{(n-2)}T_{(m+1)})$.

Para todo $n \in \mathbb{Z}$, tem-se:

Demonstração. (i): Baseado no Teorema 25 e utilizando propriedades fundamentais da aritmética matricial, obtemos:

$$\tau_{(n+m)} = \tau_{(n)}\tau_{(m)}$$

$$\tau_{(n+m)} = \begin{bmatrix} T_{(n+1)} & T_{(n)} & T_{(n-1)} & T_{(n-2)} \\ T_{(n+2)} & T_{(n+1)} & T_{(n)} & T_{(n-1)} \\ s_2T_{(n)}+s_3T_{(n-1)} & s_2T_{(n-1)}+s_3T_{(n-2)} & s_2T_{(n-2)}+s_3T_{(n-3)} & s_2T_{(n-3)}+s_3T_{(n-4)} \\ s_3T_{(n)} & s_3T_{(n-1)} & s_3T_{(n-2)} & s_3T_{(n-3)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} T_{(m+1)} & T_{(m)} & T_{(m-1)} & T_{(m-2)} \\ T_{(m+2)} & T_{(m+1)} & T_{(m)} & T_{(m-1)} \\ s_2T_{(m)}+s_3T_{(m-1)} & s_2T_{(m-1)}+s_3T_{(m-2)} & s_2T_{(m-2)}+s_3T_{(m-3)} & s_2T_{(m-3)}+s_3T_{(m-4)} \\ s_3T_{(m)} & s_3T_{(m-1)} & s_3T_{(m-2)} & s_3T_{(m-3)} \end{bmatrix}$$

Fornecendo imediatamente $T_{(n+m)} = T_{(n+1)}T_{(m)} + T_{(n)}T_{(m+1)} + T_{(n-1)}(s_2T_{(m-1)} + T_{(m-2)}) + s_3T_{(n-2)}T_{(m-1)}$.

(ii): Tomando (i) e substituindo $T_{(m)} = T_{(-m)}$, obtemos:

$$\begin{aligned} T_{(n+(-m))} &= T_{(n+1)}T_{(m)} + T_{(n)}T_{(-m+1)} + T_{(n-1)}(s_2T_{(-m-1)} + s_3T_{(-m-2)}) + s_3T_{(n-2)}T_{(-m-1)} \\ T_{(n+(-m))} &= T_{(n+1)}T_{(m)} + T_{(n)}T_{(-(m-1))} + T_{(n-1)}(s_2T_{(-(m+1))} + s_3T_{(-(m+2))}) + s_3T_{(n-2)}T_{(-(m+1))} \\ T_{(n-m)} &= (-1)^{m+1}T_{(n+1)}T_{(m)} + (-1)^{m}T_{(n)}T_{(m-1)} \\ &\quad + (-1)^{m}T_{(n-1)}(s_2T_{(m+1)} + s_3T_{(m+2)}) + (-1)^{m}s_3T_{(n-2)}T_{(m+1)} \\ T_{(n-m)} &= (-1)^{m}(T_{(n)}T_{(m-1)} - T_{(n+1)}T_{(m)} + s_2T_{(n-1)}T_{(m+1)} + s_3T_{(n-1)}T_{(m+2)} + s_3T_{(n-2)}T_{(m+1)} \end{aligned}$$

□

9 Conclusão

Neste artigo apresentamos a Sequência de Padovan ou Cordonnier, realizando um aprofundamento histórico visando ressaltar o campo epistemológico do conteúdo trabalhado. Contudo, foi possível perceber a semelhança desta sequência com a de Fibonacci, considerando as suas diferenças, ora que a primeira é representada como sendo de terceira ordem, e a segunda como sendo de segunda ordem. Foi estudada ainda a relação de convergência e o polinômio característico, que resultam no número plástico.

Uma breve abordagem sobre sequências lineares e recursivas em torno das matrizes geradoras foi efetivado, utilizando-o, a posteriori, como base teórica para a realização dos estudos relacionados à sequência matricial discutidos.

Com arrimo nos argumentos e definições anteriores, conjecturamos a existência da sequência matricial (s_1,s_2,s_3)-Tridovan oriunda do aumento da quantidade de termos antecedentes, com $(T_{(n)(s_1,s_2,s_3)(n\in\mathbb{N})})$ e $(\tau_{(n)(s_1,s_2,s_3)(n\in\mathbb{N})})$. Foram apresentadas duas maneiras de realizar o cálculo dos termos de uma sequência linear e recursiva, sem que seja necessário conhecer os temos antecessores, sendo essas a fórmula de Binet e a função geradora.

Contudo, pode-se concluir ainda que essa sequência matricial (s_1,s_2,s_3)-Tridovan representa um caso particular da Sequência de Tridovan, onde atribuindo valores iguais a 1, às variáveis definidas como s_1,s_2,s_3, retornamos aos números de Tridovan introduzidos inicialmente.

10 Referências bibliográficas

AARTS, J.; FOKKINK, R.; KRUIJTZER, G. Morphic numbers. **Nieuw Archief voor Wiskunde**, v. 5, n. 2, p. 56-58, 2001.

ALVES, F. R. V. Sequência generalizada de Fibonacci e relações com o número áureo. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática-BOCEHM**, v. 2, n. 6, p. 30-36, 2015.

ALMEIDA, E. G. S. **Propriedades e generalizações dos números de Fibonacci**. 2014. 51 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014.

ALVES, F. R. V. Engenharia didática sobre a s-Sequência Generalizada de Jacobsthal e a (s,t)-Sequência Generalizada de Jacobsthal: análises preliminares e a priori. **Union Revista Iberoamericana de Matemática**, n. 51, p. 83-106, 2017.

CIVCIV, H.; TURKMEN, R. On the (s,t)-Fibonacci and Fibonacci matrix sequences. **Ars Combinatoria**, v. 87, p. 161-173, 2008.

ERCOLANO, J. Matrix generators of Pell sequences. **The Fibonacci Quarterly**, v. 17, n. 1, p. 71-77, Feb. 1979.

FERREIRA, R. de C. **Números Mórfico**s. 2015. 82 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015.

GULEC, H. H.; TASKARA, N. On the (s,t)-Pell and (s,t)-Pell-Lucas sequences and their matrix representations. **Applied Mathematics Letters**, v. 25, n. 10, p. 1554-1559, 2012.

HUNTLEY, H. E. **A divina proporção**. Tradução Luís Carlos Ascêncio Nunes. Brasília: Ed. da UnB, 1985.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas numbers with applications**. New York: Wiley-Interscience, 2001. *E-book*.

LIMA, E. L. *et al*. **A matemática do ensino médio**. 7. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

REES, E. L. Graphical discussion of the roots of a quartic equation. **The American Mathematical Monthly**, v. 29, n. 2, p. 51-55, 1922.

SOKHUMA, K. Padovan Q-matrix and the generalized relations. **Applied Mathematical Sciences**, v. 7, n.56, p. 2777-2780, Jan. 2013.

SPINADEL, V. W.; BUITRAGO, R. Towards van der Laan's plastic number in the plane. **Journal for Geometry and Graphics**, v. 3, n. 2, p. 163-175, 2009.

STEWART, I. Tales of a neglected number. **Scientific American**, v. 274, n. 6, p. 102-103, 1996.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Propriedades das extensões da Sequência de Padovan.

C.Q.D.- Revista Eletrônica Paulista de Matemática, v. 15, p. 24-40, jul. 2019. Edição Iniciação Científica.

VOET, C; SCHOONJANS, Y. Benidictine thought as a catalyst for 20th century liturgical space: the motivations behind Dom Hans Van der Laan´s aescetic church architecture. INTERNATIONAL CONFERENCE OF THE EUROPEAN ARCHITETURAL HISTORY OF NETWORK, 2, 2012. Brussels. **Proceedings [...].** Brussels: KVAB, 2012. p. 255-261.

ZIERLER, N. Linear recurring sequences. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 7, n. 1, p. 31-48, Mar. 1959.