

Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664

Volume 16, dez. 2019

Jean-Paul Brasselet

I2M, CNRS

Aix-Marseille Université

jean-paul.brasselet@univ-amu.fr

Nguyen Thi Bich Thuy

UNESP - Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”,

São José do Rio Preto

bich.thuy@unesp.br

Teorema de Poincaré-Hopf

Poincaré-Hopf Theorem

Resumo

O Teorema de Poincaré-Hopf é uma ferramenta utilizada não somente na área de matemática, mas também em outras áreas da ciência (física, química, biologia e mesmo economia, psicologia, etc.). O Teorema de Poincaré-Hopf relaciona a característica de Euler-Poincaré com objetos da geometria diferencial, a saber índices de campos de vetores. Uma das mais conhecidas provas do Teorema, devido a Milnor, usa campos vetoriais com zeros não-degenerados. Usando a técnica da extensão radial de M.-H. Schwartz, mostramos o Teorema para qualquer campo vetorial com singularidades isoladas de qualquer índice.

Este artigo é uma versão estendida de um curso ministrado pelos autores durante a XXVIII SEMAT, 2016 no IBILCE - Câmpus de São José do Rio Preto da UNESP. O primeiro autor teve auxílio financeiro da FAPESP (processo UNESP-FAPESP).

Palavras-chave: Teorema de Poincaré-Hopf. Índices de campos de vetores, Característica de Euler-Poincaré

Abstract

The Poincaré-Hopf Theorem is one of the mathematical results which are the most used not only in mathematics but also in other fields of sciences (Physics, Chemistry, Biology and even Economy, Psychology, etc.). The Poincaré-Hopf Theorem connects a combinatoric invariant: the Euler-Poincaré characteristic with objects of differential geometry, namely indices of vector fields. There are many proofs of the Theorem, one of the most well-known due to Milnor uses vectorfields with non-degenerate isolated singularities. In this paper, using the radial extension technique of Marie-Hélène Schwartz, we show that the Milnor proof can be used for any vectorfield with isolated singularities of any index.

Keywords: Poincaré-Hopf Theorem. Indices of vector fields. Euler-Poincaré characteristic.



1 Introdução

O Teorema de Poincaré-Hopf é bem conhecido, mas sua demonstração nem tanto. O objetivo deste trabalho é apresentar a prova, ou ao menos, uma ideia da prova do Teorema de Poincaré-Hopf no caso de superfícies, assim como destacar algumas consequências.

Após recordar o clássico Teorema de Poincaré-Hopf, introduzimos a característica de Euler-Poincaré e o índice de um campo de vetores em uma singularidade isolada, que são os principais conceitos necessários para o estudo do teorema.

Nas seções seguintes, lembramos a noção de fibrado tangente a uma curva \mathcal{C} suave e fechada em \mathbb{R}^2 (5.1), assim como de fibrado tangente a uma superfície suave (5.2).

Lembramos também as noções de valores regulares, valores críticos, pontos regulares e pontos críticos assim como a noção de grau primeiramente no caso de uma aplicação suave f de \mathcal{C} em \mathbb{S}^1 , onde \mathbb{S}^1 é a circunferência unitária, e posteriormente no caso de uma aplicação suave f de \mathcal{S} em \mathbb{S}^2 (5.2.2).

Isso nos permite estudar as singularidades de campos de vetores tangente a uma superfície suave. O índice de um campo v de vetores tangente a uma superfície, em um ponto singular isolado, define-se na seção 6.1 como o grau de uma aplicação suave $\gamma_v : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ definido na seção 5.1.2. Apresentamos vários exemplos (assim como desenhos correspondentes).

Em dimensão 3, o índice de um campo de vetores v em \mathbb{R}^3 em um ponto singular isolado define-se como sendo o grau de uma aplicação suave $\gamma_v : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$. Mostramos neste ponto um resultado técnico que será usado na prova do Teorema de Poincaré-Hopf (Lema 13).

Na seção seguinte enunciamos o Teorema de Poincaré-Hopf e, antes de realizarmos a prova, enunciamos vários exemplos abordando os casos orientado e não orientado. Por fim, apresentamos a prova do teorema no caso orientado que consiste em duas etapas. A primeira etapa é bem geométrica, na qual descrevemos a construção de um campo de vetores particular, chamado de campo de Hopf, satisfazendo o Teorema de Poincaré-Hopf. A segunda etapa é um pouco mais técnica e há várias maneiras de trabalhar e será mostrado que em uma superfície compacta orientada, a soma dos índices de um campo de vetores tangente à superfície não depende do campo escolhido. O método de prolongamento radial apareceu pela primeira vez, independentemente e ao mesmo tempo, no livro de John Milnor (MILNOR, 1965), “*Topology from the differential viewpoint*”, e na construção de classes características de variedades singulares de Marie-Hélène Schwartz (SCHWARTZ, 1965). Milnor providenciou a construção no caso de campos de vetores com singularidades não degeneradas, isto é, de índice $+1$ ou -1 , sobre variedades suaves. Sendo um campo de vetores com uma singularidade isolada de índice I , Milnor teve que perturbar o campo de vetores ao fim de ter um campo de vetores com $|I|$ singularidades isoladas de índice $+1$ ou -1 , seguido que I seja positivo ou negativo. Neste artigo, mostramos que se usamos a construção de *prolongamento radial*, devido à Marie-Hélène Schwartz, não precisamos de perturbar o campo de vetores. Esta construção vale para campos de vetores com singularidades isoladas de qualquer índice, e mesmo no caso de variedades singulares, o que é muito mais geral e mais delicada. Esse argumento finaliza a prova no caso orientado. Concluímos o artigo dando a prova do Teorema de Poincaré-Hopf no caso não orientado.

Este artigo é uma versão estendida de um curso ministrado pelos autores durante a XXVIII SEMAT Semana de Matemática, 17 a 21 de Outubro de 2016 no Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (IBILCE) - Câmpus de São José do Rio Preto da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP).

O primeiro autor teve auxílio financeiro da FAPESP através do processo UNESP-FAPESP no. 2015/06697-9.

2 Enunciado do Teorema de Poincaré-Hopf

O Teorema de Poincaré-Hopf foi provado por Poincaré no ano 1885 para o caso de superfícies, depois por Hopf, no ano 1927, para o caso de variedades suaves de dimensão maior.

Teorema 1 *Seja \mathcal{S} uma superfície compacta, suave, sem bordo, não necessariamente orientada e considere um campo de vetores v com singularidades isoladas, tangente à superfície. Então a característica de Euler-Poincaré vale*

$$\chi(\mathcal{S}) = \sum_{a_i} I(v, a_i),$$

no qual os pontos a_i são os pontos singulares isolados de v e $I(v, a_i)$ é o índice do campo v no ponto a_i .

Nas duas primeiras seções, lembraremos a definição da característica de Euler-Poincaré e do índice de um campo de vetores em uma singularidade isolada. Nas seções seguintes daremos definições equivalentes para o caso diferenciável, o que permite finalizar a prova do Teorema de Poincaré-Hopf.

3 Característica de Euler-Poincaré

Historicamente, a “característica de Euler-Poincaré” de uma superfície foi definida usando triangulações. Exemplos de triangulações da esfera \mathbb{S}^2 são dados na Figura 1.

Uma triangulação de uma superfície \mathcal{S} é o dado de um poliedro (triangulado) $K \subset \mathbb{R}^n$ e um homeomorfismo $h: |K| \rightarrow \mathcal{S}$, no qual $|K|$ é um subespaço topológico compacto do \mathbb{R}^n , formado pela coleção de todas as uniões de simplexes do poliedro K .

Seja K uma triangulação de uma superfície compacta \mathcal{S} , com número de vértices n_0 , com número de segmentos n_1 e com número de triângulos n_2 . Então a característica de Euler-Poincaré de K é definida por

$$\chi(K) = n_0 - n_1 + n_2. \quad (3.1)$$

Teorema 2 (Teorema de Euler-Poincaré) *Seja \mathcal{S} uma superfície compacta, suave, sem bordo, não necessariamente orientada, a característica de Euler-Poincaré não depende da triangulação escolhida.*

Então podemos definir $\chi(\mathcal{S})$ como sendo $\chi(K)$ para qualquer triangulação da superfície. No caso da esfera \mathbb{S}^2 e na Figura 1, utilizando a triangulação do cubo, temos

$$n_0 - n_1 + n_2 = 8 - 18 + 12 = 2.$$

Considerando a triangulação do tetraedro, temos

$$n_0 - n_1 + n_2 = 4 - 6 + 4 = 2.$$

O Teorema 2 foi provado por Poincaré (1893). No caso da esfera, há várias demonstrações, a primeira (indireta) por Descartes (1639), depois (incorreta) por Euler (1758), Legendre (1794) e por Cauchy (1811). Para este resultado, veja os artigos de Elon Lima (Lima, 1985, No 1 e 2), também (Brasselet e Thuy, 2019), e o site web (veja Eppstein). Assim podemos denotar por $\chi(\mathbb{S}^2)$ a quantidade $\chi(K)$ para qualquer triangulação da esfera, chamada de *característica de Euler-Poincaré* da esfera. Consequentemente, temos

$$\chi(\mathbb{S}^2) = n_0 - n_1 + n_2 = 2,$$

para qualquer que seja a triangulação da esfera.

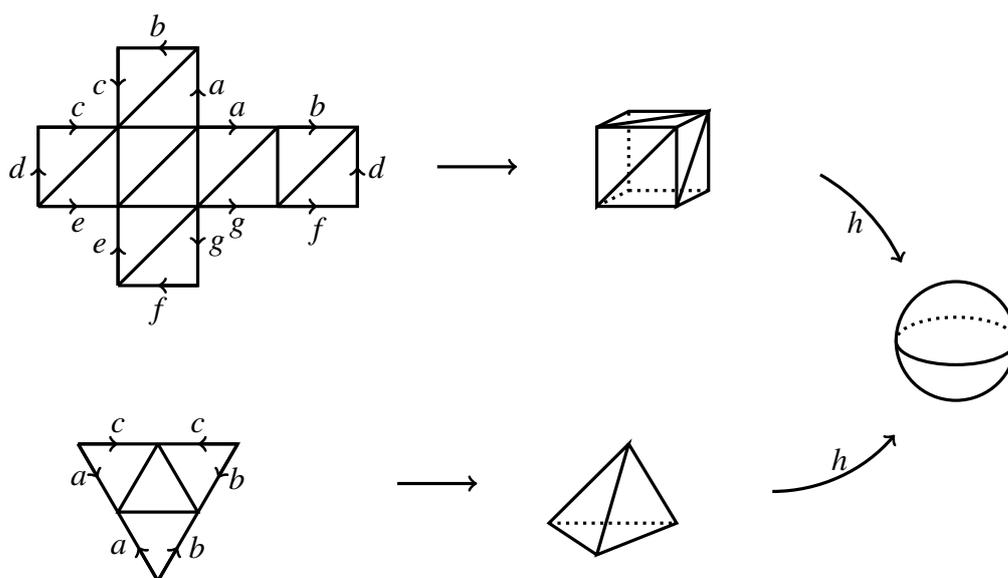


Figura 1: Triangulações da esfera. Nas representações planares identificam-se os segmentos de mesmo nome com a mesma orientação.

A característica de Euler-Poincaré do toro vale 0. Em geral, a característica de Euler-Poincaré de uma superfície compacta, sem bordo e orientável é $2 - 2g$, sendo g o gênero da superfície. Lembremos que o *gênero* g de uma superfície (orientável ou não) é o número máximo de circunferências disjuntas que se pode remover da superfície sem desconectá-la. Por exemplo, o gênero de uma esfera é 0, pois qualquer circunferência removida da esfera a desconecta. O gênero de um toro é 1, uma vez que é possível remover uma circunferência do toro sem desconectá-lo, mas se tirarmos uma segunda

circunferência qualquer, disjunta com a primeira, o toro será desconectado (Figura 2).

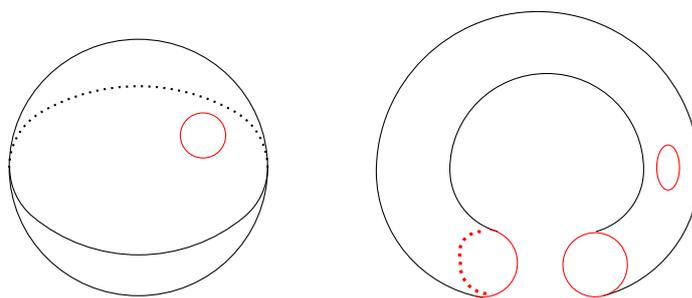


Figura 2: Gênero da esfera e do toro.

O plano projetivo \mathbb{P}^2 é o conjunto de todas as retas do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 passando pela origem. Uma maneira fácil para representar o espaço projetivo é considerar em \mathbb{R}^3 a esfera \mathbb{S}^2 centrada na origem e de raio 1. Consideramos três partes na esfera \mathbb{S}^2 : as semiesferas (abertas) norte e sul e o equador (veja Figura 3).

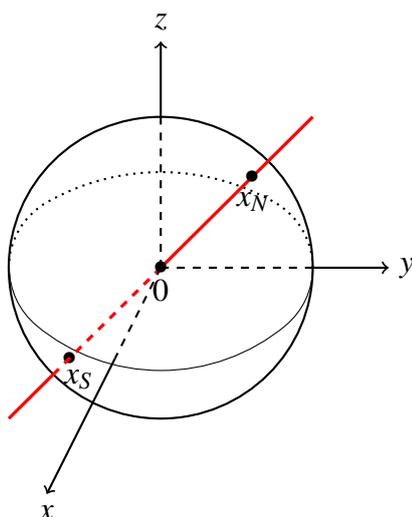


Figura 3: Representação do espaço projetivo \mathbb{P}^2 .

Cada reta de \mathbb{R}^3 passando pela origem e não contida no plano $(0xy)$ encontra a semiesfera norte em um ponto x_N e a semiesfera sul em um ponto x_S . O ponto x_N pode ser considerado como um representante da reta. As retas contidas no plano $(0xy)$ encontram o equador em dois pontos diametralmente opostos, que identificamos para ter um representante só. Assim, obtemos uma representação do plano projetivo \mathbb{P}^2 , como sendo a semiesfera norte (ou seja, um disco) com identificação de pontos diametralmente opostos em seu bordo.

A característica de Euler-Poincaré do plano projetivo vale $+1$, da garrafa de Klein vale 0 . Em geral, a característica de Euler-Poincaré de uma superfície compacta e sem borda, não orientável, de gênero g , vale $2 - g$.

Lembramos também que uma superfície compacta e sem borda pode ser mergulhada em \mathbb{R}^3 se, e

somente se, ela é orientável.

4 Índice de um campo de vetores no plano

4.1 Índice de uma curva plana fechada

Seja Γ uma curva plana fechada e orientada no plano orientado \mathbb{R}^2 . Seja α um ponto não pertencente à curva Γ . Consideramos uma pequena circunferência C_α de centro α tal que $\Gamma \cap C_\alpha = \emptyset$, com orientação induzida por \mathbb{R}^2 .

Seja y um ponto na curva Γ e $\alpha(y)$ o ponto interseção $\alpha(y) = [\alpha, y] \cap C_\alpha$ (veja a Figura 4). Quando y caminha sobre a curva Γ e descreve toda a curva no sentido da orientação dada sobre a curva, o ponto $\alpha(y)$ faz algumas voltas sobre C_α . Sejam p_α o número das voltas no sentido da orientação da curva e q_α o número das voltas no sentido oposto da orientação da curva.

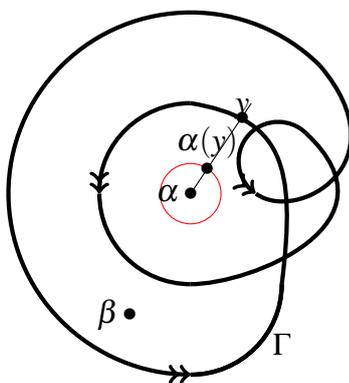


Figura 4: $I(\Gamma, \alpha) = +2$; $I(\Gamma, \beta) = +1$

Definição 3 O índice $I(\Gamma, \alpha)$ da curva Γ relativamente ao ponto α é a diferença

$$I(\Gamma, \alpha) = p_\alpha - q_\alpha.$$

O número $p_\alpha - q_\alpha$ não depende do ponto de partida y sobre a curva Γ . Este número também não depende do ponto α situado na mesma componente conexa aberta de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Porém, em uma outra componente conexa aberta de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, o índice $I(\Gamma, \beta)$ em um ponto β pertencente a esta componente pode ser diferente de $I(\Gamma, \alpha)$.

4.2 Índice de um campo de vetores planar em um ponto singular isolado.

Consideramos agora uma circunferência \mathbb{S}_a^1 de centro a em \mathbb{R}^2 e um campo contínuo de vetores $v(x)$ definido sobre o disco fechado $D_a \subset \mathbb{R}^2$ cujo bordo é \mathbb{S}_a^1 . Suponhamos que a única singularidade de v no disco D_a ocorra no ponto a . Isto é, a é o único ponto do disco D_a tal que $v(a) = 0$.

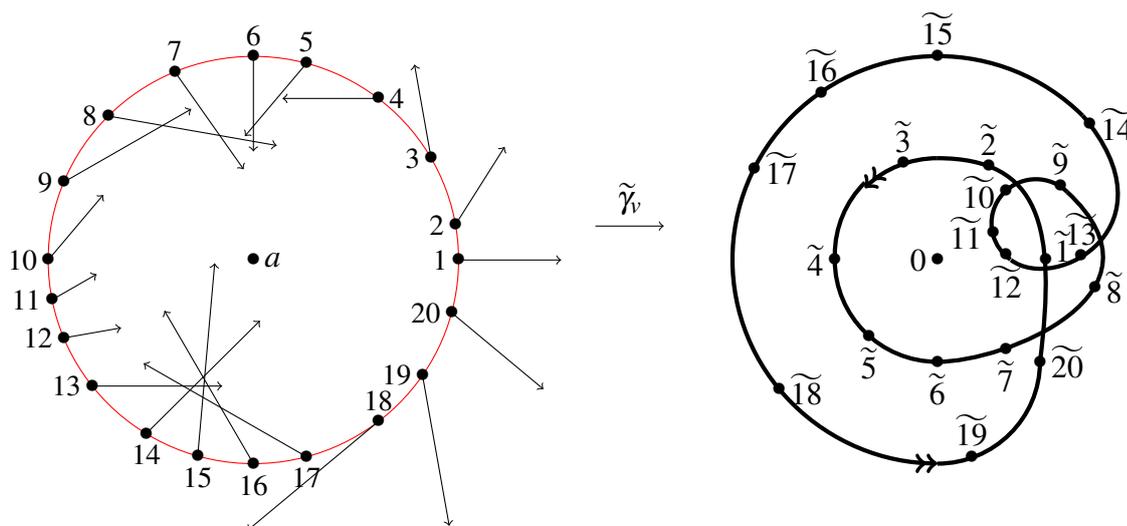


Figura 5: O campo de vetores v e a imagem de \mathbb{S}_a^1 por $\tilde{\gamma}_v$. Temos $I(v, 0) = +2$. Para todo ponto i de \mathbb{S}_a^1 , o ponto $\tilde{\gamma}_v(i)$ é denotado por \tilde{i} . O vetor $0\tilde{i}$ é paralelo ao vetor $v(i)$, e de mesmo tamanho.

Podemos definir uma aplicação $\tilde{\gamma}_v$ de \mathbb{S}_a^1 em uma outra cópia de \mathbb{R}^2 , denotado por $\tilde{\mathbb{R}}^2$, tal que para cada $x \in \mathbb{S}_a^1$, o ponto $\tilde{\gamma}_v(x)$ seja a meta do vetor $\tilde{w}(x) = v(x)$, cuja origem é a origem do plano $\tilde{\mathbb{R}}^2$.

A imagem de \mathbb{S}_a^1 por $\tilde{\gamma}_v$ é uma curva $\tilde{\Gamma} = \tilde{\gamma}_v(\mathbb{S}_a^1)$. Observamos que, como v não se anula sobre \mathbb{S}_a^1 , a curva $\tilde{\Gamma}$ não contém a origem 0 de $\tilde{\mathbb{R}}^2$.

Definição 4 O índice $I(v, a)$ é definido como sendo o índice da curva $\tilde{\Gamma} = \tilde{\gamma}_v(\mathbb{S}_a^1)$ relativamente ao ponto 0 , isto é, $I(v, a) = I(\tilde{\Gamma}, 0)$.

5 Grau de uma aplicação suave

5.1 Caso de curvas

5.1.1 Fibrado tangente a uma curva suave e fechada

Seja \mathcal{C} uma curva suave, fechada e orientada em \mathbb{R}^2 . Em cada ponto x de \mathcal{C} , temos a reta tangente à \mathcal{C} no ponto x , que denotamos por $T_x\mathcal{C}$. Vemos que $T_x\mathcal{C}$ é um espaço vetorial de dimensão 1 sobre \mathbb{R} .

Um vetor tangente à curva suave \mathcal{C} no ponto x é um elemento $v(x)$ de $T_x\mathcal{C}$. Podemos definir um vetor tangente à curva \mathcal{C} no ponto x como sendo a classe de equivalência de curvas diferenciáveis $c :]-1, +1[\rightarrow \mathcal{C}$ desenhadas sobre \mathcal{C} tais que $c(0) = x$. Denotamos por $v(x) = c'(0)$.

Denotamos $T\mathcal{C} = \bigcup_{x \in \mathcal{C}} T_x\mathcal{C}$ e chamamos $T\mathcal{C}$ de *espaço fibrado tangente* à \mathcal{C} , ou simplesmente, *fibrado* $T\mathcal{C}$. Cada $T_x\mathcal{C}$ corresponde a uma fibra de $T\mathcal{C}$ no ponto x e é homeomorfa a \mathbb{R} . Chamamos \mathbb{R} de “fibra tipo”.

O fibrado $T\mathcal{C}$ é localmente trivial, isso significa que para todo ponto x de \mathcal{C} , existe uma vizinhança U_x de x em \mathcal{C} tal que

$$T\mathcal{C}|_{U_x} \cong U_x \times \mathbb{R},$$

no qual $T\mathcal{C}|_{U_x}$ é a restrição de $T\mathcal{C}$ a U_x . Além disso, o fibrado tangente a uma curva suave, fechada \mathcal{C} é globalmente trivial, isto é, $T\mathcal{C} \cong \mathcal{C} \times \mathbb{R}$. Porém, esta propriedade não é verdadeira para qualquer variedade em geral. Por exemplo, o fibrado tangente à esfera \mathbb{S}^2 não é globalmente trivial (veja a Seção (5.2)).

O fibrado $T\mathcal{C}$ tem uma visualização natural no plano \mathbb{R}^2 , mas esta visualização não é conveniente para trabalharmos. Uma maneira mais conveniente é olhar o plano \mathbb{R}^2 como plano horizontal em \mathbb{R}^3 e girar todas as retas tangentes em $+90^\circ$, verticalmente em relação ao plano \mathbb{R}^2 (veja Figura 6).

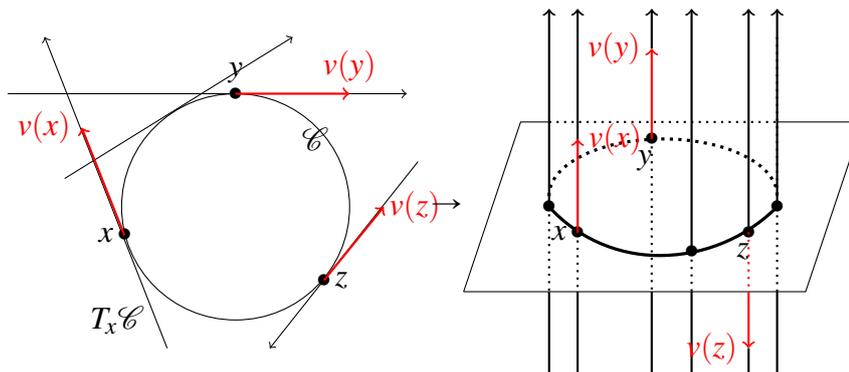


Figura 6: O fibrado $T\mathcal{C}$, aqui tomamos para \mathcal{C} a circunferência \mathbb{S}^1 .

Obtemos uma representação de $T\mathcal{C}$ como um cilindro de base \mathcal{C} . A direção positiva de $T_x\mathcal{C}$ é para acima e a direção negativa é para abaixo. Assim, é possível representar o vetor $v(x)$ como sendo positivo, negativo ou nulo.

Seja U um aberto de \mathcal{C} , um campo v de vetores tangente à \mathcal{C} ao longo de U é uma aplicação contínua $v : U \rightarrow T\mathcal{C}|_U$ tal que $v(x)$ pertence à $T_x\mathcal{C}$, para cada $x \in U$.

Uma singularidade do campo v de vetores tangente à \mathcal{C} é um ponto a tal que $v(a) = 0$. Uma singularidade a será chamada de *singularidade isolada* se existir uma vizinhança $V_a \subset \mathcal{C}$ do ponto a tal que $v(a) = 0$ e $v(x) \neq 0$, para $x \in V_a \setminus \{a\}$.

5.1.2 Pontos e valores críticos, grau

Seja $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{S}^1$ uma aplicação suave. Damos à curva fechada \mathcal{C} a orientação induzida pela orientação de \mathbb{R}^2 . Consideramos a mesma orientação para $\tilde{\mathbb{R}}^2$, assim temos para \mathbb{S}^1 a orientação induzida pela orientação de $\tilde{\mathbb{R}}^2$.

A derivada da aplicação suave $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{S}^1$ em um ponto x da curva \mathcal{C} , chamada de *aplicação linear tangente*, é denotada por

$$df_x : T_x\mathcal{C} \rightarrow T_{f(x)}\mathbb{S}^1, \quad \text{ou seja,} \quad df_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (5.1)$$

e é definida por

$$df_x(v) = df_x(c'(0)) = (f \circ c)'(0) \quad (5.2)$$

para toda curva $c :]-1, +1[\rightarrow \mathcal{C}$ tal que $c(0) = x$ e $v(x) = c'(0)$. De fato, $f \circ c$ é uma curva sobre \mathbb{S}^1 tal que $(f \circ c)(0) = f(x)$. Neste caso, $(f \circ c)'(0)$ é um vetor tangente à \mathbb{S}^1 no ponto $f(x)$.

Vamos considerar agora a noção de valores críticos de uma aplicação suave $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{S}^1$. Um ponto $a \in \mathcal{C}$ tal que $df_a : T_a\mathcal{C} \rightarrow T_{f(a)}\mathbb{S}^1$ tem o posto 0 é chamado de *ponto crítico* de f .

Por definição, um ponto regular da aplicação f é um ponto $x \in \mathcal{C}$ que não é crítico. Em um ponto regular, $df_x : T_x\mathcal{C} \rightarrow T_{f(x)}\mathbb{S}^1$ é um isomorfismo de espaços vetoriais orientados e definimos o *sinal* de df_x como sendo $+1$ ou -1 se df_x preserva ou não a orientação, respectivamente.

As imagens de pontos críticos são chamadas de *valores críticos* e os demais pontos são chamados *valores regulares* da aplicação. Então, um ponto $y \in \mathbb{S}^1$ é um valor regular de f se $f^{-1}(y) = \emptyset$ ou todos os pontos $x \in f^{-1}(y)$ são pontos regulares de f . Em um valor regular y de f tal que $f^{-1}(y) \neq \emptyset$, podemos considerar o número inteiro

$$\text{grau}(f; y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign } df_x,$$

com $\text{sign } df_x$ é o sinal de df_x no ponto $x \in f^{-1}(y)$.

Observamos que, por causa da compacidade de \mathcal{C} , então $f^{-1}(y)$ consiste em um número finito de pontos.

Uma propriedade fundamental que vamos mostrar (Proposição 8) é que $\text{grau}(f; y)$ não depende do valor regular de f . Neste caso, $\text{grau}(f; y)$ será chamado de *grau de f* e denotado por $\text{grau}(f)$.

Exemplo 5 Consideremos o exemplo da aplicação $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada pelo grafo da Figura 7.

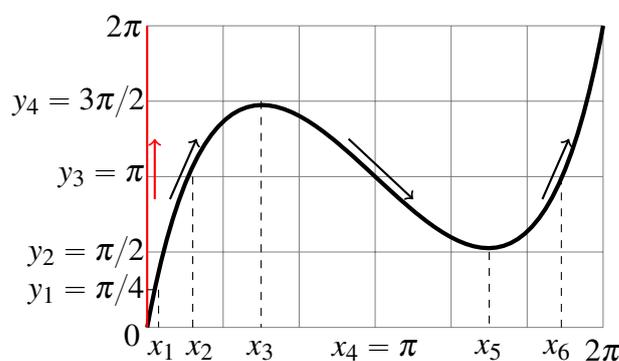


Figura 7: Representação gráfica da aplicação f na esfera.

Os pontos $x_3 = \pi/2$ e $x_5 = 3\pi/2$ são pontos críticos com derivada nula. O ponto $y_3 = \pi$ é um valor regular tal que $f^{-1}(y_3) = \{x_2, x_4, x_6\}$. Nos pontos x_2 e x_6 a aplicação df preserva a orientação, mas no ponto x_4 , a derivada df é negativa e df inverte a orientação. Então temos:

$$\text{grau}(f; y_3) = \sum_{x \in f^{-1}(y_3)} \text{sign } df_x = \text{sign } df_{x_2} + \text{sign } df_{x_4} + \text{sign } df_{x_6} = +1 - 1 + 1 = +1. \quad (5.3)$$

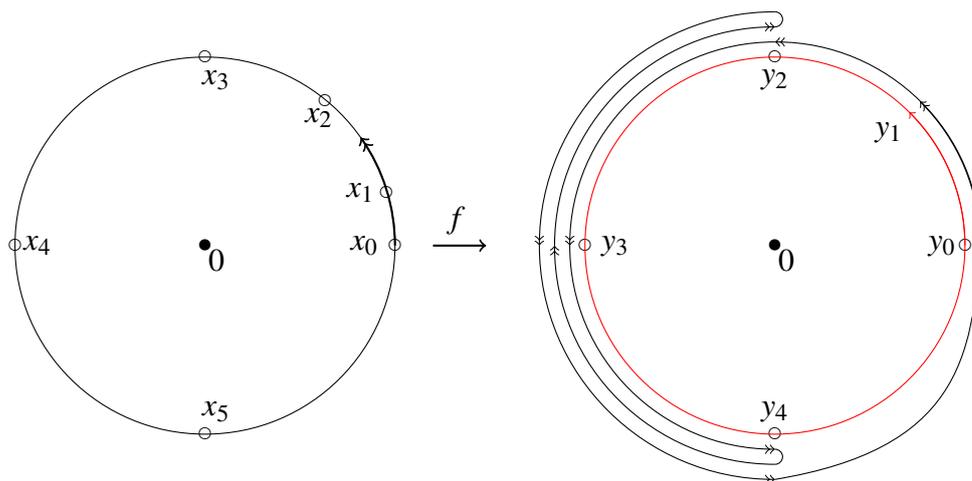


Figura 8: O grau da aplicação f : A “caminhada” do ponto $f(x)$ está em preto: O ponto $y_1 = \pi/4$ é um valor regular tal que $f^{-1}(y_1) = \{x_1\}$. Neste ponto, temos a mesma orientação da circunferência de base (vermelho), então a aplicação df preserva a orientação e temos $\text{grau}(f; y_1) = +1$. No ponto y_3 temos duas vezes a orientação da circunferência de base (positiva) e uma vez a orientação oposta (negativa). Temos $\text{grau}(f; y_3) = +1$ (veja 5.3).

Note que os pontos críticos não são necessariamente pontos isolados. De fato, se um ponto crítico y_i não for isolado, então existirá um intervalo (“horizontal” no grafo) $[a, b]$ tal que $f([a, b]) = y_i$. É fácil de ver que podemos substituir f por uma pequena perturbação \tilde{f} de f (por exemplo uma pequena sinuosidade) com pontos críticos isolados e tal que o grau não depende da perturbação.

Quando o ponto x faz um turno completo da curva fechada \mathcal{C} , o ponto $f(x)$ faz uma caminhada sobre a circunferência \mathbb{S}^1 . Quando x chegar ao fim de seu turno, $f(x)$ voltará no ponto de partida.

O ponto $f(x)$ pode às vezes fazer uma volta (um retorno), às vezes ficar no mesmo lugar, às vezes fazer duas “sub-caminhadas” com orientações opostas, onde cada sub-caminhada não é necessariamente um retorno completo. Chamamos de *valores de volta* (ou de *retorno*) os pontos $y \in \mathbb{S}^1$ tais que existir uma vizinhança suficientemente pequena de $x \in f^{-1}(y)$, a caminhada de y mudará a orientação (veja na Figura 8 os pontos y_2 e y_4).

Lema 6 *Os valores de volta são valores críticos.*

Prova. Suponha que y seja um valor de volta. Então existem $x \in \mathcal{C}$ e ε um número positivo suficientemente pequeno tal que quando \tilde{x} caminha de $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, a caminhada $f(\tilde{x})$ muda orientação quando \tilde{x} passa de x . Isso significa que o sinal da derivada $df_{\tilde{x}}$ no ponto \tilde{x} muda quando \tilde{x} passa de x . Então a derivada é nula em x , o que significa y é um valor crítico.

Observação 7 *Um valor crítico pode não ser um valor de volta. De fato, a imagem de um ponto de inflexão x do grafo de uma função f é um valor crítico mas o sinal de df_x não muda neste ponto.*

Escolhamos como ponto de partida um ponto x_0 de \mathcal{C} tal que $y_0 = f(x_0)$ não seja valor crítico

(então não seja valor de volta). Quando o ponto x fizer um turno no sentido positivo, o ponto $y = f(x)$ poderá passar no ponto y_0 um certo número de vezes p_0 no sentido positivo e um número de vezes q_0 no sentido negativo. É preciso não esquecer a passagem inicial, que também é a passagem final e que pode ser positivo ou negativo.

Proposição 8 *O grau não depende do valor regular.*

Prova. Seja y_0 um valor regular. Quando y varia continuamente em uma vizinhança do ponto regular y_0 , claramente o número $p_0 - q_0$ não muda. Então, o grau é constante quando y descreve uma vizinhança de valores regulares na circunferência \mathbb{S}^1 . Agora, o que acontece quando esta vizinhança encontra um valor crítico?

- Se o valor crítico não for um ponto de volta, o sentido do deslocamento não mudará, então o número $p_0 - q_0$ não muda e o grau não varia.

- Se o valor crítico $y_i = f(\tilde{x})$ for um ponto de volta (por exemplo o ponto y_2 na Figura 8), então pelo Lema 6, y_i é um valor crítico. O deslocamento ocorrerá de um lado de y_i e depois volta no mesmo lado. Antes do ponto y_i (por exemplo o ponto y_1 na Figura 8), o deslocamento ocorre p vezes no sentido positivo e q vezes no sentido negativo. Depois do ponto y_i (por exemplo o ponto y_3 na Figura 8), o deslocamento ocorre $p + 1$ vezes no sentido positivo e $q + 1$ vezes no sentido negativo. A diferença $p - q$, isto é o grau, não muda.

5.2 Caso de superfícies

Nesta seção, superfícies suaves compactas, sem bordas e orientadas, como a esfera \mathbb{S}^2 e o toro \mathbb{T} serão estudados.

Recorde que uma superfície \mathcal{S} é suave se existe um recobrimento localmente finito de abertos $\{U_i\}$ de \mathcal{S} e, para cada i , existe um homeomorfismo $\varphi_i : U_i \rightarrow B_i$, onde B_i é um disco aberto de dimensão dois em \mathbb{R}^2 , tais que, cada vez que $U_i \cap U_j$ não é vazia, a aplicação

$$h_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

é um difeomorfismo (veja Figura 9). Na sequência, vamos identificar os abertos U_i com bolas abertas B_i .

5.2.1 Fibrado tangente a uma superfície suave

Da mesma maneira como foi definido o fibrado tangente à uma curva suave, consideramos para cada ponto x de uma superfície \mathcal{S} o espaço vetorial tangente a \mathcal{S} , de dimensão 2, sobre o corpo \mathbb{R} , denotado por $T_x\mathcal{S}$.

¹Localmente finito significa que para cada ponto x de \mathcal{S} , existe uma vizinhança U_x de x em \mathcal{S} que encontra um número finito de U_i .

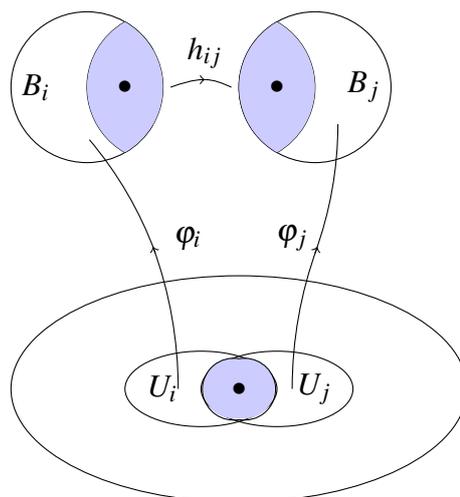


Figura 9: Superfície suave.

Por exemplo, o fibrado tangente à esfera \mathbb{S}^2 é $T\mathbb{S}^2 = \bigcup_x T_x\mathbb{S}^2$. Todas as fibras $T_x\mathbb{S}^2$ são homeomorfas a \mathbb{R}^2 . Chamamos \mathbb{R}^2 de *fibra tipo*. O fibrado $T\mathbb{S}^2$ é localmente trivial, assim como o fibrado tangente a qualquer superfície \mathcal{S} . Isso significa que cada ponto a da superfície \mathcal{S} admite uma vizinhança U_a tal que $T\mathcal{S}|_{U_a}$ é isomorfismo a $U_a \times \mathbb{R}^2$:

$$T\mathcal{S}|_{U_a} \cong U_a \times \mathbb{R}^2 \tag{5.4}$$

(veja Figura 10). Então, $T\mathcal{S}|_{U_a}$ pode ser visto como uma coleção de espaços vetoriais reais \mathbb{R}^2 .

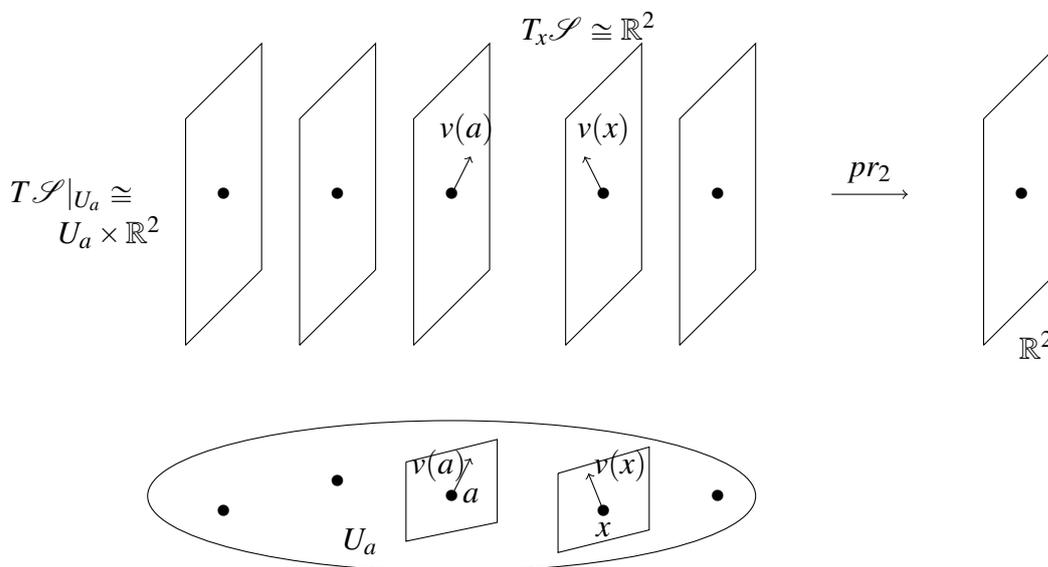


Figura 10: O fibrado $T\mathcal{S}$ é localmente trivial.

Uma superfície suave orientada é uma superfície suave \mathcal{S} com uma escolha de orientação para cada espaço tangente $T_a\mathcal{S}$, tal que para cada $x \in U_a$, a orientação de $T_x\mathcal{S}$ corresponde a orientação de $\{x\} \times \mathbb{R}^2$ pelo isomorfismo (ver 5.4).

O fibrado tangente $T\mathbb{S}^2$ não é globalmente trivial, isto é, não há homeomorfismo global

$$T\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Isso é uma das consequências do Teorema de Poincaré-Hopf do qual veremos a prova (veja Corolário 16). Mas, por exemplo, o fibrado tangente ao toro \mathbb{T} é globalmente trivial. Do mesmo modo do que no caso de curvas, um vetor tangente à superfície suave \mathcal{S} no ponto x é um elemento $v(x)$ de $T_x\mathcal{S}$. Podemos definir um vetor tangente como sendo a classe de equivalência de curvas diferenciáveis $c :]-1, +1[\rightarrow \mathcal{S}$ desenhadas sobre a superfície \mathcal{S} e tais que $c(0) = x$. Assim sendo, temos $v(x) = c'(0)$.

5.2.2 Pontos e valores críticos, grau

Seja $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma aplicação suave de uma superfície suave \mathcal{S} em \mathbb{S}^2 , do mesmo modo que no caso de curvas, a *derivada* da aplicação suave $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$, em um ponto x de \mathcal{S} , chamada de *aplicação linear tangente*, será denotada por

$$df_x : T_x\mathcal{S} \rightarrow T_{f(x)}\mathbb{S}^2, \quad \text{ou seja} \quad df_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (5.5)$$

é definida por

$$df_x(v) = df_x(c'(0)) = (f \circ c)'(0) \quad (5.6)$$

para toda curva $c :]-1, +1[\rightarrow \mathcal{S}$ tal que $c(0) = x$ e $v(x) = c'(0)$. Observe que $f \circ c$ é uma curva sobre \mathbb{S}^2 tal que $(f \circ c)(0) = f(x)$. Neste caso, $(f \circ c)'(0)$ é um vetor tangente à \mathbb{S}^2 no ponto $f(x)$.

Seja $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$ uma aplicação suave de uma superfície suave \mathcal{S} em \mathbb{S}^2 , um ponto $a \in \mathcal{S}$ tal que a aplicação derivada

$$df_a : T_a\mathcal{S} \rightarrow T_{f(a)}\mathbb{S}^2$$

tem o posto menor do que 2 é chamado de *ponto crítico* de f .

Um ponto a da superfície \mathcal{S} é um ponto regular da aplicação f se ele não é crítico. As imagens de pontos críticos são chamadas de *valores críticos* e os demais pontos são chamados de *valores regulares* da aplicação.

Como no caso de dimensão 1, um ponto $y \in \mathbb{S}^2$ é um valor regular de f se $f^{-1}(y) = \emptyset$ ou todos os pontos $x \in f^{-1}(y)$ são pontos regulares. Em um valor regular y de f , podemos considerar o número inteiro

$$\text{grau}(f; y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign } df_x.$$

Assim, podemos ver que o grau($f; y$) não depende do valor regular de f . Portanto, podemos denotá-lo simplesmente por grau(f) e chamaremos de *grau de f* .

6 Singularidades de campos de vetores tangentes – Índice em um ponto singular

6.1 Singularidades de campos de vetores tangentes a uma superfície suave

Sejam \mathcal{S} uma superfície suave e U_a uma vizinhança de um ponto $a \in \mathcal{S}$. Um campo de vetores sobre U_a , tangente a \mathcal{S} é uma aplicação contínua:

$$v : U_a \rightarrow T\mathcal{S}|_{U_a}$$

tal que, para cada $x \in U_a$, $v(x) \in T_x\mathcal{S} \cong \mathbb{R}^2$.

Uma *singularidade* de um campo de vetores v é um ponto a tal que $v(a) = 0$.

A singularidade a é isolada se existir uma vizinhança V_a de a tal que para cada ponto x de V_a diferente de a , teremos $v(x) \neq 0$.

Mostraremos que, a uma singularidade isolada de v , podemos associar um número inteiro que chamaremos de *índice do campo de vetores v no ponto a* e denotaremos por $I(v, a)$. O índice de um campo de vetores pode ser definido de muitas maneiras equivalentes em vários contextos: usando grupos de homologia, usando integrais de formas diferenciais, etc. Aqui, vamos usar a definição que utiliza aplicação de Gauss e de grau (LIMA, 1985a, 1985b).

Seja \mathcal{S} uma superfície orientada e considere uma vizinhança V_a de a homeomorfa a um aberto de \mathbb{R}^2 e tal que a seja a única singularidade de v dentro de V_a . Isto é, a é uma singularidade isolada de v (veja Figura 11). Podemos considerar uma segunda cópia de \mathbb{R}^2 , denotado por $\tilde{\mathbb{R}}^2$, com a mesma orientação.

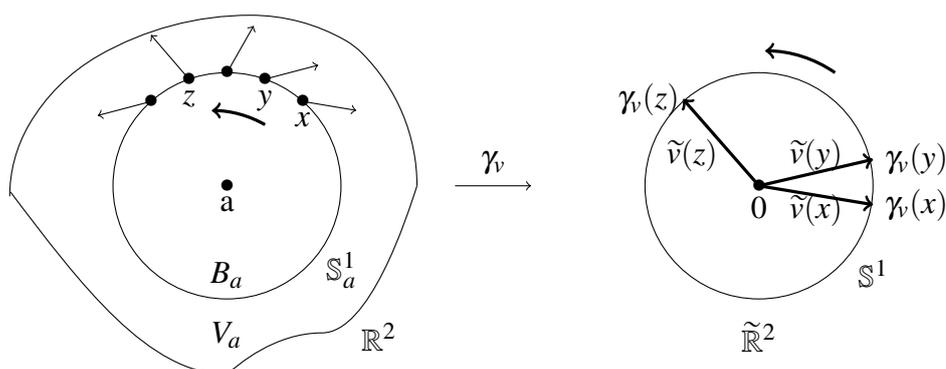


Figura 11: A aplicação de Gauss.

Seja B_a uma pequena bola de centro a dentro de V_a . Ao longo da esfera \mathbb{S}_a^1 , que é o bordo de B_a , o campo de vetores v não tem singularidades.

Para cada ponto x de \mathbb{S}_a^1 , consideramos o vetor

$$\tilde{v}(x) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$$

em $\tilde{\mathbb{R}}^2$, sendo $\|v(x)\|$ a norma euclidiana de $v(x)$.

O vetor $\tilde{v}(x)$ tem tamanho 1 e a sua extremidade, $\tilde{\gamma}_v(x)$, pertence à esfera \mathbb{S}^1 de raio 1 e centro na origem de $\tilde{\mathbb{R}}^2$.

A aplicação $\gamma_v : \mathbb{S}_a^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ é chamada de *aplicação de Gauss*.

Quando o ponto x fizer um turno no sentido positivo de \mathbb{S}_a^1 , o ponto $\gamma_v(x)$ fará certos “caminhos” (pedaços de turno) da esfera \mathbb{S}^1 no sentido positivo ou negativo.

Observação 9 A orientação positiva ou negativa do pedaço de caminho do ponto $\gamma_v(x)$ determina respectivamente a orientação positiva ou negativa de $\tilde{\mathbb{R}}^2$.

Seja α um ponto de \mathbb{S}^1 , um caminho passando por α no sentido positivo vale +1 e um caminho passando por α no sentido negativo vale -1.

A soma destes valores é, por definição, o índice $I(v; \alpha)$ do campo de vetores v no ponto a . É fácil de ver que o índice $I(v, a)$ é igual ao grau de γ_v (veja §5.1.2).

Observação 10 Observamos que a aplicação de Gauss γ_v é uma composição de duas funções

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{S}_a^1 & \longrightarrow & T\mathcal{S}|_{\mathbb{S}_a^1} \cong \mathbb{S}_a^1 \times \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{pr_2} & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & v(x) & \mapsto & \gamma_v(x) \end{array}$$

(veja Definição 4). Esta propriedade é a base da teoria de obstrução, uma das teorias que permite de introduzir a teoria de classes características.

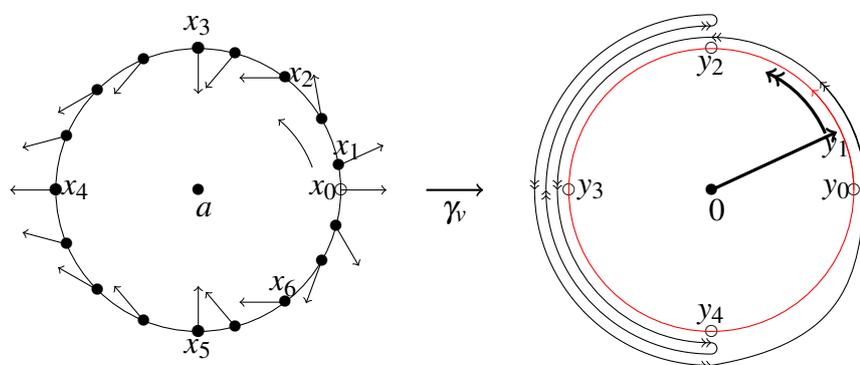


Figura 12: Aplicação de Gauss. Aqui: $y_0 = \gamma_v(x_0)$, $y_1 = \gamma_v(x_1)$, $y_2 = \gamma_v(x_5)$, $y_3 = \gamma_v(x_2) = \gamma_v(x_4) = \gamma_v(x_6)$ e $y_4 = \gamma_v(x_3)$.

Exemplo 11 Considerando o campo de vetores v na Figura 12 e a aplicação de Gauss estudada no exemplo 5 temos $I(v, 0) = +1$.

As figuras 13, 14, 15 e 16 são alguns exemplos de índices.

Observação 12 Observamos que se um campo de vetores v definido sobre o bordo \mathbb{S}_a^1 de B_a se estende sem singularidades dentro de B_a , então o seu índice $I(v, a)$ vale 0. Esta observação será útil para o que se segue.

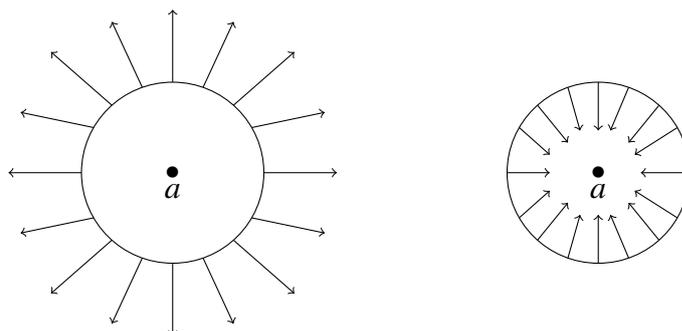


Figura 13: Campo radial saindo e campo radial entrando: $I(v, a) = +1$.

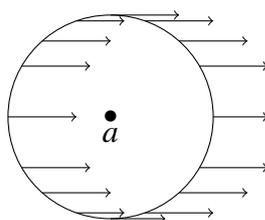


Figura 14: Campo de índice nulo.

6.2 Singularidades de campos de vetores definidos em \mathbb{R}^3

Na segunda etapa da prova do Teorema de Poincaré-Hopf, vamos utilizar uma propriedade particular do índice de campos de vetores do \mathbb{R}^3 . O índice de um campo de vetores em \mathbb{R}^3 define-se da mesma maneira do que o índice de um campo de vetores em \mathbb{R}^2 . Observamos que esta definição é a mesma em um espaço euclidiano de dimensão qualquer.

Mais precisamente, seja w um campo de vetores em \mathbb{R}^3 com uma singularidade isolada em 0 . Isso significa que podemos considerar uma pequena bola B_0 centrada em 0 tal que ao longo da esfera \mathbb{S}_0^2 , que é o bordo de B_0 , o campo de vetores w não tem singularidades.

Para cada ponto x de \mathbb{S}_0^2 , consideramos o vetor

$$\tilde{w}(x) = \frac{w(x)}{\|w(x)\|}$$

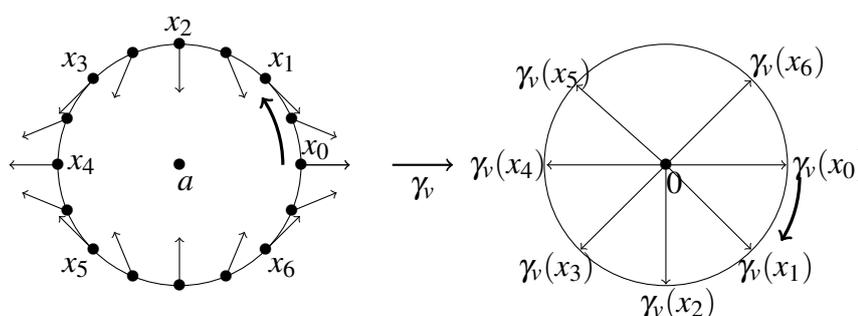


Figura 15: Campo de índice $I(v, a) = -1$.

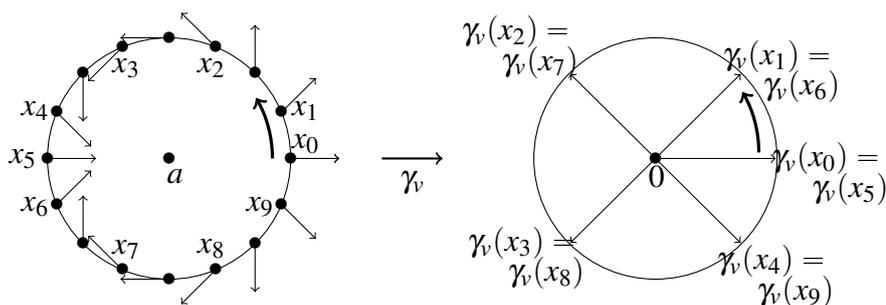


Figura 16: Campo de índice $I(v, a) = +2$.

em um outro exemplar de \mathbb{R}^3 , com mesma orientação e chamado de $\tilde{\mathbb{R}}^3$. Aqui $\|w(x)\|$ é a norma euclidiana de $w(x)$.

O vetor $\tilde{w}(x)$ é de tamanho 1 e a sua extremidade, $\gamma_w(x)$, pertence à esfera \mathbb{S}^2 de raio 1 e de centro à origem de $\tilde{\mathbb{R}}^3$.

A aplicação $\gamma_w : \mathbb{S}_0^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ definida por $x \mapsto \gamma_w(x)$ é chamada de *aplicação de Gauss*.

Como no caso anterior, seção 5.2.2, um ponto $a \in \mathbb{S}_0^2$ tal que a aplicação derivada

$$d(\gamma_w)_a : T_a(\mathbb{S}_0^2) \rightarrow T_{(\gamma_w(a))}\mathbb{S}^2$$

tem o posto menor do que 2 é chamado de ponto crítico de γ_w . Os pontos regulares e valores críticos e regulares estão definidos da mesma maneira do que na seção 5.2.2.

Em um valor regular y de γ_w , podemos considerar o número inteiro

$$\text{grau}(\gamma_w; y) = \sum_{x \in \gamma_w^{-1}(y)} \text{sign } d(\gamma_w)_x.$$

Como na seção 5.2.2, o número $\text{grau}(\gamma_w; y)$ não depende do valor regular de γ_w , ele é denotado por $\text{grau}(\gamma_w)$ e é chamado *grau* de γ_w . O índice $I(w, 0)$ do campo w em \mathbb{R}^3 com singularidade isolada em 0 é bem definido como o grau de γ_w .

Lema 13 *Seja v um campo de vetores em \mathbb{R}^2 com singularidade isolada na origem $0_{\mathbb{R}^2} \in \mathbb{R}^2$ de índice $I(v, 0_{\mathbb{R}^2}; \mathbb{R}^2)$. Seja t um campo de vetores em \mathbb{R} com singularidade isolada na origem $0_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$, saindo radialmente do ponto $0_{\mathbb{R}}$. A soma $w = v \oplus t$ é um campo de vetores em $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$ tal que $w((x, y), z) = (v(x, y), 0_{\mathbb{R}}) + (0_{\mathbb{R}^2}, t(z))$, com singularidade isolada na origem $0_{\mathbb{R}^3} = (0_{\mathbb{R}^2}, 0_{\mathbb{R}})$ de índice $I(w, 0_{\mathbb{R}^3}; \mathbb{R}^3)$ tal que:*

$$I(w, 0_{\mathbb{R}^3}; \mathbb{R}^3) = I(v, 0_{\mathbb{R}^2}; \mathbb{R}^2).$$

Este resultado, já usado em Schwartz (1991), aparece no livro de Brasselet, Seade, Suwa (2010) como “Lemma 2.3.3”, sem prova. A prova que providenciamos aqui usa o conceito de grau. Observamos que a hipótese sobre o campo t implica que o índice $I(t, 0_{\mathbb{R}})$ vale +1.

Prova. Denotamos por B_0 a bola fechada de centro 0 e de raio 1 em \mathbb{R}^3 . Observe que a bola B_0 é homeomorfa à $D^2 \times I$, sendo D^2 um disco de dimensão dois e I o intervalo $[-1, +1]$. O bordo de B_0 , isto é, a esfera \mathbb{S}_0^2 é homeomorfa à lata $(\mathbb{S}^1 \times I) \cup (D^2 \times (\{-1\} \cup \{+1\}))$.

Na lata, temos coordenadas $((r, \alpha), \lambda)$ tais que: sobre $(\mathbb{S}^1 \times I)$, temos $r = 1$, $\alpha \in [0, 2\pi[$ e $\lambda \in [-1, +1]$; sobre $D^2 \times (\{-1\} \cup \{+1\})$ temos $r \in [0, r]$, $\alpha \in [0, 2\pi[$ e $\lambda \in \{-1\} \cup \{+1\}$. Observamos que, quando $r = 0$, a coordenada α não é definida.

Construímos um campo de vetores w sobre $(\mathbb{S}^1 \times I) \cup (D^2 \times (\{-1\} \cup \{+1\}))$ da seguinte maneira:

- a) sobre $(\mathbb{S}^1 \times I)$, no ponto $x = (1, \alpha, \lambda)$, o campo $w(x)$ vale $v(1, \alpha) + t(\lambda)$;
- b) sobre $D^2 \times \{-1\}$ (respectivamente, $D^2 \times \{+1\}$), no ponto $x = (r, \alpha, k)$ o campo $w(x)$ é $v(r, \alpha) + t(k)$ com $k = -1$ ou $k = +1$, respectivamente.

O campo w assim definido é o que é chamado de prolongamento radial de v em Schwartz (1991). O campo w tem uma singularidade isolada na origem $0_{\mathbb{R}^3} = (0_{\mathbb{R}^2}, 0_{\mathbb{R}})$.

Considere em \mathbb{R}^3 a orientação dada pela orientação de \mathbb{R}^2 seguida pela orientação de \mathbb{R} . Observamos que, como o campo de vetores t é radial saindo de $0_{\mathbb{R}}$, este campo conserva a orientação de \mathbb{R} . Então, localmente, a orientação induzida por w em \mathbb{R}^3 é a mesma que a orientação induzida por v em \mathbb{R}^2 (veja Observação 9).

Em cada ponto x de \mathbb{S}_0^2 (ou da lata), temos $w(x) \neq 0$. Como no caso de dimensão 2, podemos considerar a aplicação de Gauss

$$\gamma_w : \mathbb{S}_0^2 \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad \gamma_w(x) \text{ é a extremidade do vetor } \tilde{w}(x) = \frac{w(x)}{\|w(x)\|}.$$

Seja γ_v a aplicação de Gauss correspondente ao campo v , definida como na seção 5.2.2. Um valor regular de γ_w também é um valor regular de γ_v . Neste valor, as orientações de γ_v e γ_w coincidem. Logo, temos

$$\text{grau}(\gamma_w) = \text{grau}(\gamma_v).$$

Portanto, os índices $I(w, 0_{\mathbb{R}^3}; \mathbb{R}^3) = \text{grau}(\gamma_w)$ e $I(v, 0_{\mathbb{R}^2}; \mathbb{R}^2) = \text{grau}(\gamma_v)$ coincidem.

7 Teorema de Poincaré-Hopf

O Teorema de Poincaré-Hopf foi provado por Poincaré no ano 1885 no caso de superfícies, depois por Hopf, no ano 1927, para o caso de variedades suaves de dimensão maior.

Teorema 14 *Se v é um campo de vetores com singularidades isoladas, tangente a uma superfície \mathcal{S} compacta, suave, sem bordo e não necessariamente orientada, então*

$$\sum_{a_i} I(v, a_i) = \chi(\mathcal{S}),$$

com a_i pontos singulares de v .

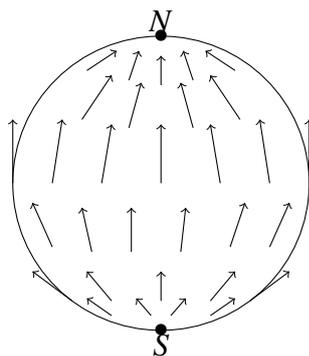


Figura 17: Campo de vetores tangente a esfera \mathbb{S}^2 . Temos $I(v, N) = I(v, S) = +1$.

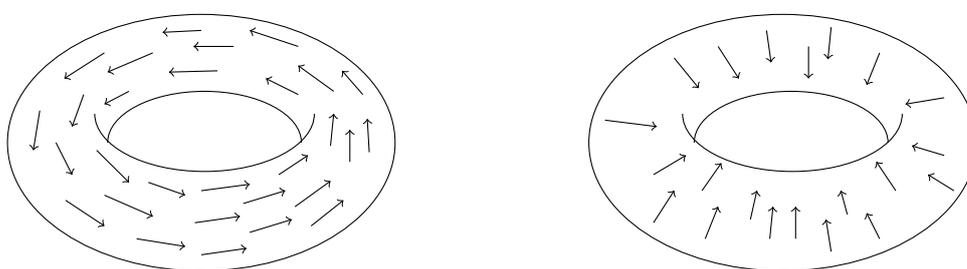


Figura 18: Campos de vetores tangente ao toro \mathbb{T} : Campo tangente as “paralelas” e campo tangente as “meridianas”. Não há singularidades.

Antes de oferecer uma ideia para a prova, voltamos aos exemplos que já consideramos. Um exemplo de campos de vetores sobre a esfera \mathbb{S}^2 é dado na Figura 17.

Neste exemplo, o campo tem singularidades de índice $+1$ nos polos norte e sul (campos radiais saindo e entrando, respectivamente, veja Figura 13). Tem-se que a característica de Euler-Poincaré da esfera é 2 , que também é a soma dos índices nos pontos singulares.

No toro, existem campos de vetores tangente sem nenhuma singularidade (veja Figura 18). Então a soma $\sum_{a_i} I(v, a_i)$ vale 0 , o que é a característica de Euler-Poincaré do toro.

No plano projetivo \mathbb{P}^2 , que não é orientável, a Figura 19 mostra um campo de vetores tangente, com somente uma singularidade de índice $+1$. Isto é a característica de Euler-Poincaré do espaço projetivo.

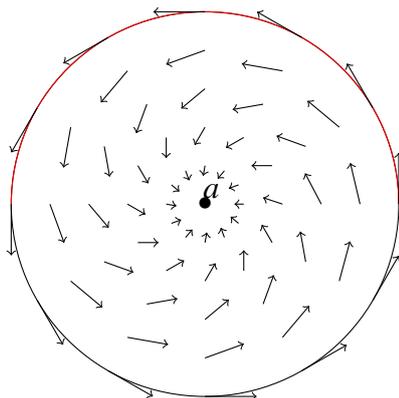


Figura 19: Campo de vetores tangente ao plano projetivo \mathbb{P}^2 . Aqui, o plano projetivo é representado como um disco com os pontos diametralmente opostos do bordo são identificados (veja Figura 3). Temos $I(v, a) = +1$ (veja Figura 13).

Mostraremos o Teorema de Poincaré-Hopf no caso não-orientável depois de estudar o caso orientado.

7.1 Caso orientável

A prova do Teorema de Poincaré-Hopf no caso orientado pode ser feita em duas etapas:

a) Exibir um campo de vetores v tal que

$$\sum_{a_i} I(v, a_i) = \chi(\mathcal{S}).$$

b) Provar que a soma $\sum_{a_i} I(v, a_i)$ não depende do campo de vetores v tangente a \mathcal{S} com singularidades a_i , nem do número de singularidades, isto é, para quaisquer campos de vetores v e v' com singularidades isoladas sobre \mathcal{S} , então

$$\sum_{a_i} I(v, a_i) = \sum_{b_j} I(v', b_j),$$

onde a_i e b_j são as singularidades dos campos v e v' , respectivamente.

7.1.1 Primeira etapa

A primeira etapa exibe um campo de vetores com uma construção bonita, devido a H. Hopf, que vamos descrever com detalhes.

Seja K uma triangulação de \mathcal{S} . Para cada simplexo de dimensão 2, vamos construir um campo, chamado de campo de Hopf, como seguinte:

Para cada simplexo σ de K , escolhamos um baricentro denotado por $\hat{\sigma}$.

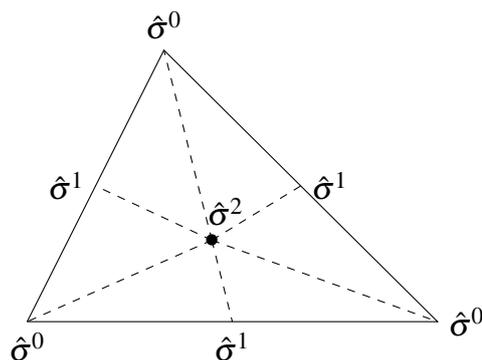


Figura 20: Baricentros e decomposição baricêntrica.

Um simplexo de dimensão n , onde $n = 0, 1, 2$, será denotado por σ^n , e seu baricentro denotado por $\hat{\sigma}^n$.

A escolha de baricentros permite definir a decomposição baricêntrica de K , denotada por K' , cujos vértices são todos baricentros $\hat{\sigma}^0$, $\hat{\sigma}^1$ e $\hat{\sigma}^2$, os segmentos serão denotados por $[\hat{\sigma}^i, \hat{\sigma}^j]$ com $i < j$ e triângulos por $[\hat{\sigma}^0, \hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2]$.

As singularidades do campo v serão todos os baricentros $\hat{\sigma}^i$, $i = 0, 1, 2$, e somente estes pontos. O campo será tangente aos segmentos $[\hat{\sigma}^i, \hat{\sigma}^j]$ da decomposição baricêntrica, saindo de $\hat{\sigma}^i$ e indo na direção de $\hat{\sigma}^j$ ($i < j$). Como o campo v se anula nos pontos $\hat{\sigma}^i$ e $\hat{\sigma}^j$, ele está crescendo saindo de $\hat{\sigma}^i$ até um máximo e depois ele decresce até se anula no ponto $\hat{\sigma}^j$ (Figura 21).

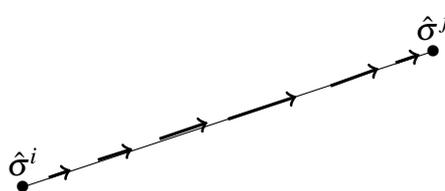


Figura 21: O campo de Hopf ao longo de $[\hat{\sigma}^i, \hat{\sigma}^j]$.

No triângulo $[\hat{\sigma}^0, \hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2]$, o campo é construído de tal maneira a ser contínuo e satisfazer as condições anteriores (Figura 22).

O campo de Hopf, a partir de sua construção, admite como singularidades os baricentros de todos os simplexos de K .

A situação local é a mesma para todos baricentros $\hat{\sigma}^0$ (Figura 23).

Isto é, o índice $I(v, \hat{\sigma}^0) = +1$ (veja Figura 13) para todo baricentro $\hat{\sigma}^0$.

Da mesma maneira, para todo baricentro $\hat{\sigma}^1$, temos a situação local da Figura 24.

Isto é, o índice $I(v, \hat{\sigma}^1) = -1$ (veja Figura 15) para todo baricentro $\hat{\sigma}^1$.

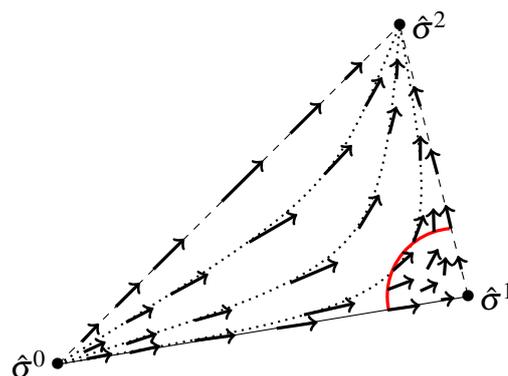


Figura 22: O campo de Hopf no triângulo $[\hat{\sigma}^0, \hat{\sigma}^1, \hat{\sigma}^2]$.

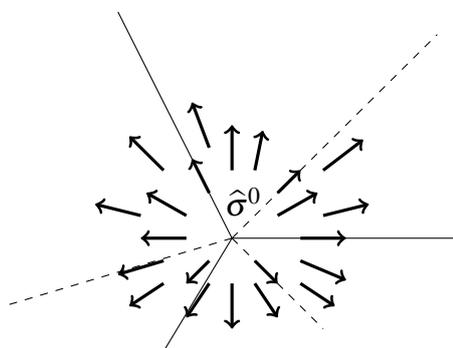


Figura 23: O campo de Hopf em um baricentro $\hat{\sigma}^0$.

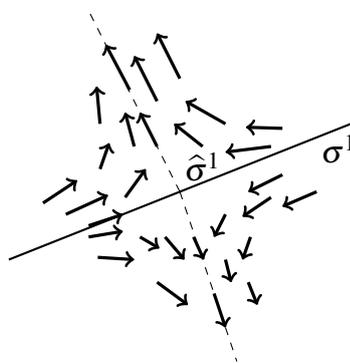


Figura 24: O campo de Hopf em um baricentro $\hat{\sigma}^1$.

Finalmente, para todo baricentro $\hat{\sigma}^2$, temos a situação local da Figura 25.

Isto é, o índice $I(v, \hat{\sigma}^2) = +1$ (campo radial entrando, veja Figura 13) para todo baricentro $\hat{\sigma}^2$.

Agora, vamos calcular a soma

$$\sum_{a_i} I(v, a_i)$$

para todos os pontos singulares a_i do campo de vetores v . Os pontos singulares são:

- + os baricentros $\hat{\sigma}_i^0$ dos vértices σ_i^0 ,
- + os baricentros $\hat{\sigma}_j^1$ dos segmentos σ_j^1 ,

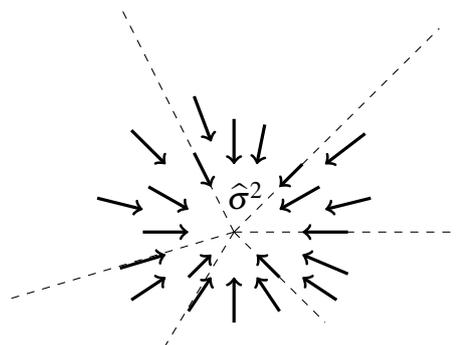


Figura 25: O campo de Hopf em um baricentro $\hat{\sigma}^2$.

+ os baricentros $\hat{\sigma}_k^2$ dos triângulos σ_k^2 .

Então, tem-se

$$\sum_{a_i} I(v, a_i) = \sum_{\sigma_i^0} I(v, \hat{\sigma}_i^0) + \sum_{\sigma_j^1} I(v, \hat{\sigma}_j^1) + \sum_{\sigma_k^2} I(v, \hat{\sigma}_k^2).$$

Mas vemos que, para todo σ_i^0 , temos $I(v, \hat{\sigma}_i^0) = 1$, então $\sum_{\sigma_i^0} I(v, \hat{\sigma}_i^0)$ é o número n_0 dos vértices.

Da mesma maneira, para todo σ_j^1 , temos $I(v, \hat{\sigma}_j^1) = -1$, então $\sum_{\sigma_j^1} I(v, \hat{\sigma}_j^1)$ é igual a $-n_1$, onde n_1 é o número dos segmentos. Enfim, para todos σ_k^2 , temos $I(v, \hat{\sigma}_k^2) = +1$, então $\sum_{\sigma_k^2} I(v, \hat{\sigma}_k^2)$ é igual ao número n_2 dos triângulos.

Então, temos

$$\sum_{a_i} I(v, a_i) = n_0 - n_1 + n_2 = \chi(\mathcal{S}),$$

sendo a_i os pontos singulares do campo de vetores v .

7.1.2 Segunda etapa

A segunda etapa é a mais delicada e há várias maneiras de trabalhar. Vamos providenciar as ideias de Heinz Hopf (HOPF, 1925, 1927), revisitadas por John Milnor (MILNOR, 1965) e Marie-Hélène Schwartz (SCHWARTZ, 1965).

Sendo um campo v de vetores tangente a \mathcal{S} , com singularidades isoladas a_i , vamos estender o campo em uma vizinhança X_ϵ de \mathcal{S} , com as mesmas singularidades e os mesmos índices. Isto é chamado de *prolongamento radial*. A vizinhança X_ϵ tem bordo ∂X_ϵ sobre a qual é definida a aplicação de Gauss

$$n : \partial X_\epsilon \rightarrow \mathbb{S}^2$$

que associa a cada ponto $y \in \partial X_\epsilon$ o vetor normal unitário $n(y)$ saindo de X_ϵ no ponto y . A segunda etapa será concluída mostrando que se a soma dos índices do campo v é igual ao grau da aplicação de Gauss, então esta soma é independente do campo v e do número de pontos singulares de v .

O método de prolongamento radial apareceu pela primeira vez, independentemente e ao mesmo

tempo, no livro de John Milnor (MILNOR, 1965), “*Topology from the differential viewpoint*”, e na construção de classes características de variedades singulares devido à Marie-Hélène Schwartz (SCHWARTZ, 1965). Milnor providenciou a construção no caso de campos de vetores com singularidades não degeneradas, isto é, de índice $+1$ ou -1 , sobre variedades suaves. Sendo um campo de vetores com uma singularidade isolada de índice I , Milnor tem de perturbar o campo de vetores ao fim de ter um campo de vetores com $|I|$ singularidades isoladas de índice $+1$ ou -1 , seguido que I seja positivo ou negativo. No que segue, mostramos que se usamos a construção de *prolongamento radial*, devido à Marie-Hélène Schwartz, não precisamos de perturbar o campo de vetores. Esta construção vale para campos de vetores com singularidades isoladas de qualquer índice, e mesmo no caso de variedades singulares, o que é muito mais geral e mais delicada.

Vamos agora à construção de prolongamento radial de Marie-Hélène Schwartz, nosso caso particular de uma superfície \mathcal{S} orientada e compacta.

Como a superfície \mathcal{S} é orientada e compacta, podemos considerá-la como uma mergulhada em \mathbb{R}^3 . Sendo um campo v de vetores tangentes à \mathcal{S} , com singularidades isoladas a_i , vamos estender o campo em uma vizinhança X_ε de \mathcal{S} em \mathbb{R}^3 , com as mesmas singularidades e os mesmos índices.

Chamamos de X_ε a vizinhança fechada de \mathcal{S} em \mathbb{R}^3 , de “tamanho” ε , isto é, o conjunto de todos os pontos $x \in \mathbb{R}^3$ tais que $\|x - y\| \leq \varepsilon$ para um ponto $y \in \mathcal{S}$. Para ε suficientemente pequeno, X_ε é uma variedade suave de dimensão 3 em \mathbb{R}^3 , com borda ∂X_ε . A vizinhança X_ε tem borda ∂X_ε sobre a qual é definida a aplicação de Gauss

$$n : \partial X_\varepsilon \rightarrow \mathbb{S}^2$$

que associa a cada ponto $y \in \partial X_\varepsilon$ o vetor normal unitário $n(y)$ saindo de X_ε no ponto y . A segunda etapa será concluída mostrando que se a soma dos índices do campo v é igual ao grau da aplicação de Gauss, então esta soma é independente do campo v e do número de pontos singulares de v .

O campo de vetores radiais, dentro de X_ε é construído da seguinte maneira: para $x \in X_\varepsilon$, seja $r(x)$ o ponto de \mathcal{S} mais próximo de x . O vetor $t(x) = x - r(x)$ (em \mathbb{R}^3) é ortogonal ao espaço tangente a \mathcal{S} no ponto $r(x)$, senão, $r(x)$ não seria o ponto de \mathcal{S} mais próximo de x . O vetor $t(x)$ é chamado de *transversal*.

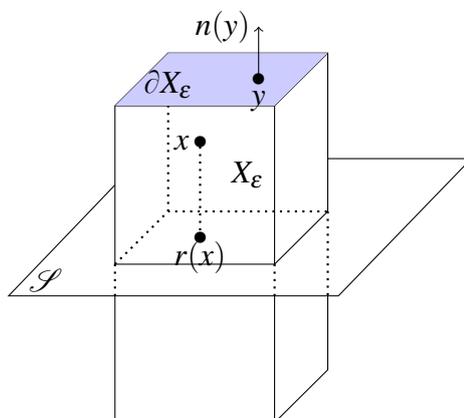


Figura 26: A vizinhança X_ε .

Para ε suficientemente pequeno, a função $r : X_\varepsilon \rightarrow \mathcal{S}$ é suave e bem definida. Seja φ a função

$$\varphi(x) = \|x - r(x)\|^2,$$

onde “ $\| \cdot \|$ ” é a norma euclidiana em \mathbb{R}^3 . O gradiente de φ é dado por

$$\text{grad}\varphi = 2(x - r(x)).$$

Em cada ponto y do bordo $\partial X_\varepsilon = \varphi^{-1}(\varepsilon^2)$, o vetor normal unitário, saindo de X_ε é dado por

$$n(y) = \frac{\text{grad}\varphi}{\|\text{grad}\varphi\|} = \frac{(y - r(y))}{\varepsilon}.$$

Estendemos o campo de vetores v (definido sobre \mathcal{S}) em um campo de vetores w definido sobre X_ε da seguinte maneira:

$$w(x) = (x - r(x)) + v(r(x)),$$

ou seja

$$w(x) = t(x) + v(r(x)).$$

Lembramos que $t(x) = x - r(x)$ é chamado de campo de vetores *transversal*, ele é independente de v e é transversal ao plano tangente à \mathcal{S} . Chamamos $v(r(x))$ de campo de vetores *paralelos*. Ele é paralelo ao plano tangente a \mathcal{S} (veja Figura 27).

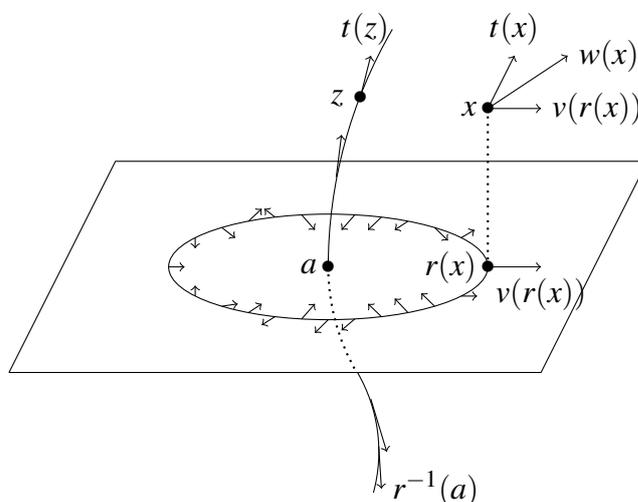


Figura 27: O campo de vetores $w(x)$ é soma do campo transversal $t(x)$ e do campo paralelo $v(r(x))$.

Quais são as propriedades do campo de vetores w ?

Por um lado, para $y \in \partial X_\varepsilon$, o produto escalar $w(y) \cdot n(y)$ vale $\varepsilon > 0$, então o campo de vetores w sai de X_ε ao longo do bordo ∂X_ε . Por outro lado, w se anula nos mesmos pontos que v . De fato, no ponto $x \in X_\varepsilon$, os vetores $(x - r(x))$ e $v(r(x))$ são ortogonais.

Seja a uma singularidade do campo v , ao longo da “fibra” $r^{-1}(a) = \{x \in X_\varepsilon : r(x) = a\}$ da vizinhança X_ε , o campo w vale $(x - a)$, o que é um campo de vetores com singularidade isolada no ponto a , com

índice +1. Assim que demonstrado em Schwartz (1991), o campo w é a soma de dois campos de vetores que são ortogonais: o campo $t(x)$ que é transversal, nulo ao longo de X_ε e o campo paralelo $v(r(x))$, nulo em todos pontos z tais que $r(z) = a$. Então w admite as mesmas singularidades que $v(x)$.

Como o campo de vetores t sai radialmente do ponto a na fibra $r^{-1}(a)$, o Lema 13 mostra que o índice $I(w, a; X_\varepsilon)$ do campo de vetores w definido em X_ε , no ponto singular a é igual ao índice $I(v, a; \mathcal{S})$ do campo de vetores v definido na superfície \mathcal{S} no mesmo ponto singular a . Temos

$$I(w, a; X_\varepsilon) = I(v, a; \mathcal{S}).$$

Agora, temos um campo de vetores w definido sobre X_ε satisfazendo as seguintes propriedades: w tem as mesmas singularidades que v e os mesmos índices nos pontos singulares, e w está saindo de X_ε ao longo do bordo ∂X_ε .

Para concluir a segunda etapa, vamos usar (e mostrar) o seguinte resultado de Hopf: se

$$w : X_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^3$$

é um campo de vetores suave com singularidades isoladas, saindo de X_ε ao longo do bordo ∂X_ε , então a soma $\sum_{a_i} I(w, a_i; X_\varepsilon)$ é igual ao grau da aplicação de Gauss associada a $n : \partial X_\varepsilon \rightarrow \mathbb{S}^2$. Isso implica que a soma $\sum_{a_i} I(w, a_i; X_\varepsilon)$ não depende do campo w , e como consequência, a soma $\sum_{a_i} I(v, a_i)$ não depende do campo v tangente a \mathcal{S} com singularidades isoladas.

O resultado de Hopf pode ser visto da seguinte forma: Considaremos uma pequena bola $B_\eta(a_i)$ ao redor de cada ponto a_i em X_ε . O raio $\eta \ll \varepsilon$ é suficientemente pequeno para que as bolas estejam no interior de X_ε e não se interseccionam. A variedade

$$X_\varepsilon \setminus \bigcup_i B_\eta(a_i)$$

é uma variedade suave com bordo

$$\partial \left[X_\varepsilon \setminus \bigcup_i B_\eta(a_i) \right] = \partial X_\varepsilon \cup - \left[\bigcup_i \partial B_\eta(a_i) \right],$$

onde sinal “-” vem do que a orientação de $\partial B_\eta(a_i)$ como bordo da bola $B_\eta(a_i)$ é a orientação oposta de $\partial B_\eta(a_i)$ como elemento do bordo de $X_\varepsilon \setminus \bigcup_i B_\eta(a_i)$.

Agora, a aplicação de Gauss

$$\gamma_w : \partial \left[X_\varepsilon \setminus \bigcup_i B_\eta(a_i) \right] \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad \text{associada a } \tilde{w}(x) = \frac{w(x)}{\|w(x)\|},$$

que é bem definida sobre o bordo de $X_\varepsilon \setminus \bigcup_i B_\eta(a_i)$, se estende a uma aplicação

$$\gamma_w : X_\varepsilon \setminus \bigcup_i B_\eta(a_i) \rightarrow \mathbb{S}^2$$

sem nenhuma singularidade. Com efeito, todas as singularidades de \tilde{w} estão nas bolas $B_\eta(a_i)$.

Sabemos que se um campo de vetores v , definido sobre o bordo de uma bola $B(a)$, se estende sem singularidades dentro de $B(a)$, então o índice $I(v, a)$ (o seu grau) vale 0 (veja Observação 12). Isso é um caso particular de uma propriedade importante do grau: se uma aplicação $f : \partial Y \rightarrow \mathbb{S}^2$ definida sobre o bordo de uma variedade Y de dimensão 3 em \mathbb{R}^3 , se estende sem singularidade no interior de Y , então $\text{grau}(f) = 0$.

Como γ_w se estende sem singularidade a uma aplicação $\gamma_w : X_\varepsilon \setminus \bigcup_i B_\eta(a_i) \rightarrow \mathbb{S}^2$, isso implica que o grau de γ_w sobre o bordo de $X_\varepsilon \setminus \bigcup_i B_\eta(a_i)$ vale 0. Em outras palavras, a soma dos graus de γ_w sobre os componentes do bordo de $X_\varepsilon \setminus \bigcup_i B_\eta(a_i)$ vale 0. Isto é

$$\text{grau}(\gamma_w; \partial X_\varepsilon) - \sum_i \text{grau}(\gamma_w; \partial B_\eta(a_i)) = 0,$$

onde não esquecemos do sinal “−” por causa de orientação.

Por um lado, \tilde{w} está saindo de X_ε ao longo de seu bordo e \tilde{w} pode ser deformado continuamente no campo de vetores n normais, saindo de X_ε ao longo da sua borda. A deformação (ou homotopia), sendo contínua e com vetores saindo de X_ε ao longo da sua borda, faz com que o grau, que é um número inteiro, permaneça o mesmo, o que implica que $\text{grau}(\gamma_w; \partial X_\varepsilon) = \text{grau}(n)$.

Por outro lado, pela definição do índice, temos $\text{grau}(\gamma_w; \partial B_\eta(a_i)) = I(w, a_i; X_\varepsilon) = I(v, a_i)$. Finalmente temos

$$\sum_i I(v, a_i) = \text{grau}(n),$$

o que não depende do campo de vetores v com singularidades isoladas sobre \mathcal{S} . Assim, concluímos a prova no caso orientável.

7.2 Caso não orientável

No caso de superfícies não orientáveis, consideremos o cobrimento duplo e orientado. Isto é, em um ponto x de uma superfície orientada $\widehat{\mathcal{S}}$, consideramos o conjunto de pares (x, o_x) , onde o_x é uma orientação local de \mathcal{S} em x . São duas orientações locais possíveis, então temos uma aplicação $\pi : \widehat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$, tal que $\pi^{-1}(x)$ contém dois pontos (correspondente às duas orientações). O cobrimento duplo orientado $\pi : \widehat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ é um homeomorfismo local.

Por exemplo, no caso do espaço projetivo \mathbb{P}^2 , o cobrimento duplo orientado é a projeção canônica $\pi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$. No caso da garrafa de Klein K^2 , o cobrimento duplo orientado é a projeção do toro $\pi : \mathbb{T}^2 \rightarrow K^2$. No caso de uma superfície orientada, a projeção $\pi : \widehat{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{S}$ é isomorfa a $\pi : \mathcal{S} \times \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathcal{S}$, isto é $\widehat{\mathcal{S}}$ não é conexa e é a união de dois exemplares de \mathcal{S} .

Agora, seja \mathcal{S} uma superfície compacta suave e não orientada. Por um lado, se v é um campo contínuo de vetores sobre \mathcal{S} com singularidades isoladas a_i de índice $I(v; a_i)$, então podemos definir um levantamento \hat{v} de v que é um campo contínuo de vetores sobre $\widehat{\mathcal{S}}$ com pontos singulares isoladas a_i^j com $j = 1, 2$, tais que $\pi(a_i^j) = a_i$. Como π é um homeomorfismo local, temos $I(v; a_i^j) = I(v; a_i)$ para cada $j = 1, 2$. Então $\sum_{i,j} I(\hat{v}; a_i^j) = 2 \sum_i I(v; a_i)$.



Por outro lado, podemos definir uma triangulação de $\widehat{\mathcal{S}}$ tal que os simplexos de $\widehat{\mathcal{S}}$ são imagens inversas dos simplexos de \mathcal{S} . A imagem inversa de cada um dos simplexos de \mathcal{S} consiste em dois simplexos de $\widehat{\mathcal{S}}$ de mesma dimensão. Os números de simplexos n_0, n_1 e n_2 de $\widehat{\mathcal{S}}$ são dobro dos números correspondentes de \mathcal{S} . Então temos $\chi(\widehat{\mathcal{S}}) = 2\chi(\mathcal{S})$.

Como $\widehat{\mathcal{S}}$ é uma superfície compacta suave e orientada, sabemos, pela prova no caso orientável, que $\chi(\widehat{\mathcal{S}}) = \sum_{i,j} I(\hat{v}; a_i^j)$.

Assim obtemos o Teorema de Poincaré-Hopf para superfícies não orientáveis:

$$\chi(\mathcal{S}) = 1/2 \cdot \chi(\widehat{\mathcal{S}}) = 1/2 \sum_{i,j} I(v; a_i^j) = \sum_i I(v; a_i).$$

7.3 Conclusões

Ao procurarmos por “Poincaré-Hopf Theorem” em um site da internet, vemos várias aplicações em mecânica, física, química, ciências exatas, economica, etc.

A razão mais importante é que temos:

Teorema 15 *Uma variedade \mathcal{S} suave, compacta e sem bordo admite um campo de vetores tangente sem singularidades se, e somente se, $\chi(\mathcal{S}) = 0$.*

Corolário 16 *É impossível construir um campo de vetores tangente à esfera \mathbb{S}^2 , sem singularidades. O mesmo resultado vale para o plano projetivo \mathbb{P}^2 .*

A consequência deste resultado é que o fibrado tangente à esfera \mathbb{S}^2 não é trivial. O mesmo resultado vale para todas esferas de dimensão par.

8 Referências bibliográficas

BRASSELET, J.-P. Radial vector fields and the Poincaré-Hopf theorem. **Contemporary Mathematics**, v. 253, p. 25-30, 2000.

BRASSELET, J.-P.; THUY, N. T. B. A característica de Euler-Poincaré. **arXiv:1611.03918v1 [math.AT]**, 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1611.03918.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2019.

BRASSELET, J.-P.; SEADE, J.; SUWA, T. **Vector fields on Singular Varieties**. Berlin: Springer-Verlag, 2010. (Lecture notes in mathematics; 1987).

DESCARTES, R. **De solidorum elementis**, Oeuvres de Descartes, v. 10, p. 256-276, Paris, 1908.



EPPSTEIN, D. The geometry junkyard. Twenty proofs of Euler formula.

Disponível em: <https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/>. Acesso em: 10 ago. 2019.

EULER, L. Elementa doctrinae solidorum – Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusasunt praedita 1751. **Novi Comment. Acad. Sc. Petrop.** t.4 (1752-53) Saint Pétersbourg, p. 140-160, 1758.

HOPF, H. Über die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen. **Mathematische Annalen**, v. 95, n. 1, p. 340-367, 1926.

HOPF, H. Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. **Mathematische Annalen**, v. 96, n. 1, p. 225-249, 1927.

LEGENDRE, A.M.. Éléments de géométrie. Paris: Firmin Didot, 1794.

LIMA, E. L. A característica de Euler-Poincaré. **Matemática Universitária**, n. 1, p. 47-62, 1985a.

LIMA, E.L. O teorema de Euler sobre poliedros. **Matemática Universitária**, n. 2, p. 57-74, 1985b.

MILNOR, J. **Topology from the differentiable viewpoint**. Charlottesville: Univ. Press of Virginia, 1965.

POINCARÉ, H. Sur l'Analysis situs. **CRAS**, v. 115, p. 633-636, 1892.

POINCARÉ, H. Sur la généralisation d'un théorème d'Euler relatif aux polyédres. **CRAS**, v. 117, p. 144-145, 1893.

SCHWARTZ, M.-H. Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe. **CRAS**, n. 260, 3262-3264 et 3535-3537, 1965.

SCHWARTZ, M.-H. **Champs radiaux sur une stratification analytique**. Paris: Hermann, 1991. (Travaux en cours, 39).