Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 16, dez. 2019

Problema de Buckley e Leverett: aproximação de funções para a estimativa da saturação de choque

The Buckley and Leverett problem: approximation function for the estimation of shock saturation

Jorge Corrêa de Araújo
Prof. Associado do Departamento de Matemática. FFP-UERJ
jcaraujo_55@yahoo.com.br

Rosa García Márquez
Profa. Associada do Departamento de Matemática. FFP-UERJ
rosagmarquez@yahoo.com.br

Resumo

Um dos modelos matemáticos mais simples para a simulação de deslocamento de fluidos em meios porosos com o objetivo de obter uma avaliação rápida das condições de comportamento qualitativo dos reservatórios de petróleo é o modelo de Buckley e Leverett. Tal modelo utiliza um fluxo unidimensional e bifásico em que ocorre a injeção de um determinado fluido, em geral, água ou gás, com a subsequente produção de óleo no poço produtor. Utilizando dados experimentais das permeabilidades relativas de um problema de Buckley e Leverett disponível na literatura, foi obtida a função de fluxo fracionária usando funções quadráticas para a modelagem das curvas de permeabilidades relativas de um meio arenoso para a água e para o óleo, em oposição às curvas exponenciais comumente usadas para essa finalidade. A estimativa da saturação de água da frente de choque pode ser obtida por meio de aproximação de funções. Os resultados ficaram em concordância com os divulgados pela literatura adotada.

Palavras-chave: Escoamento em meio poroso; frente de choque perfil de saturação de água; método analítico de Welge.

Abstract

One of the simplest mathematical models for the simulation of fluid displacement in porous media in order to obtain a rapid assessment of the conditions of qualitative behavior of oil reservoirs is the Buckley and Leverett model. Such a model uses a one-dimensional, two-phase flow in which the injection of a given fluid, usually water or gas, occurs, with the subsequent production of oil at a producing well. Using experimental data from the relative permeability's of a Buckley and Leverett problem available in the literature, the fractional flow function was obtained using quadratic functions for the modeling of the relative permeability curves of sand to water, and oil as opposed to commonly used exponential curves for this purpose. The estimation of the water saturation of the front of shock, can be obtained by means of approach of functions. The results were in agreement with those published in the adopted literature.

Keywords: Flow in porous medium; shock front; water saturation profile; Welge analytical method.

Artigo recebido em ago. 2019 e aceito em dez. 2019.

1. Introdução

Quando um reservatório de petróleo é utilizado, certa quantidade de óleo flui espontaneamente por conta da alta pressão existente em seu interior. Essa fase de recuperação de óleo, é conhecida como fase primária, e durante essa etapa, até 15% de óleo pode ser recuperado (BARBOSA, 2010, p.17). Depois de cessado o fluxo, uma grande quantidade de óleo permanece no reservatório, e segundo LeVeque (1992, p. 48) um mecanismo padrão de recuperação de óleo consiste na injeção de fluido para que ele invada e desloque o óleo de um meio poroso, como por exemplo, uma rocha porosa ou areia, de modo a forçar o óleo para fora desses reservatórios através de poços de produção. A quantidade de óleo deslocado nessa fase chamada secundária depende da facilidade relativa com que os fluidos podem mover-se (BUCKLEY; LEVERETT, 1942, p. 109). Por exemplo, segundo Buckley e Leverett (1942, p. 109) no início do deslocamento, a saturação de óleo pode ser alta, enquanto a saturação do fluido pode ser baixa e, nesse caso, o óleo fluirá em maior quantidade em comparação com o fluido de deslocamento e nesse estágio o deslocamento de fluido será quase 100 por cento efetivo. No final dessa fase, grandes volumes de fluido de deslocamento só conseguem recuperar uma pequena quantidade de óleo residual.

Nesse sentido, a simulação de reservatórios com vistas a capturar esses aspectos desse tipo de fluxo em reservatórios constitui uma atividade padrão essencial na indústria petrolífera. Entretanto, somente modelos matemáticos complexos baseados em equações diferenciais parciais (EDP´s) não lineares são capazes de lidar com as incertezas decorrentes das diversas variáveis típicas de um reservatório tais como, sua geometria e tipo de rocha (LEITE NETTO, 2003, p. 1) ou inerentes aos fluidos como, viscosidade, permeabilidade relativas da rocha para a água e para o óleo, bem como a saturação irredutível de água e residual do óleo no meio poroso. Esses modelos matemáticos complexos utilizam leis físicas como, a equação de continuidade de massa, as leis de Darcy, equações de estado (TORO, 2009, p.6) e relações dos coeficientes de permeabilidade, as quais são obtidas experimentalmente.

Segundo LeVeque (1992, p. 48) as equações de Buckley e Leverett (1942, p. 109-110) são modelos escalares particularmente simples para a representação de alguns aspectos desse tipo de fluxo e, desse modo, podem fornecer uma avaliação rápida sobre o comportamento qualitativo do perfil de saturação de água e óleo ao longo da extensão do reservatório. As soluções analíticas com base na teoria de Buckley e Leverett, por envolverem expressões relativamente simples, são muito utilizadas na simulação de reservatórios de petróleo, apesar das simplificações adotadas (OLIVEIRA; CORDEIRO; TREVIZANI; CANZIAN; ASSUNÇÃO; ROMERO, 2014, p. 90). Além disso, podem ser utilizadas também para validar soluções numéricas.

Dentre as simplificações da teoria básica de Buckley e Leverett (1942, p. 110) tem-se o deslocamento unidimensional, os fluídos devem ser imiscíveis, e as diferentes pressões de capilaridade e gravitacionais são negligenciadas. O modelo de Buckley e Leverett pode ser visto segundo Oliveira, Cordeiro, Trevizani, Canzian, Assunção e Romero (2014, p. 82) como um pistão com vazamento, pois devido a injeção de água a montante do reservatório uma frente de choque ou avanço de água, empurra o óleo para a jusante. No entanto, tal deslocamento não é completo subsistindo uma saturação de óleo residual que permanece nos poros varridos pela água. A água atrás do choque arrasta o óleo por efeito viscoso devido ao atrito considerando as condições iniciais do problema, enquanto o óleo que flui a frente do choque é deslocado devido ao efeito de compressão da água injetada.

A localização da frente de choque ou simplesmente choque, x_{Saf} , de saturação de água de valor S_{af} ,durante o tempo de processo é, segundo Oliveira, Cordeiro, Trevizani, Canzian, Assunção e Romero (2014, p. 82), a informação principal, pois conforme dito anteriormente, a sua localização é importante para saber o quão distante está a chegada de água no poço de produção. Nesse sentido, o método analítico proposto por Welge (1952, p. 92-93, 97) para obter S_{af} , combinado com a Equação (4) de Buckley e Leverett (1942, p. 110) permite obter a posição dessa frente de choque ao longo do tempo de processamento estipulado para a injeção de água.

O método analítico devido a Welge (1952, p. 92-93, 97), utiliza uma reta tangente ao gráfico do fluxo fracionário passando pelo ponto $(S_{ai}, 0)$ onde a abscissa do ponto de tangência dá o valor de S_{af} , caso o eixo horizontal seja ocupado pelas saturações, ou a altura desse ponto de tangência, caso o eixo horizontal seja ocupado pela posição dos planos de saturação conforme mostra a Figura 2 no artigo escrito por Welge (1952, p. 92). Entretanto, o método utilizado para obter essa tangente usando aproximação de funções, e aqui adotado nesse estudo, não é mencionado por nenhum dos autores referenciados no texto. O objetivo principal foi apresentar uma metodologia que consiste em aproximar o segmento de reta da parte da função de fluxo fracionário definido entre $\left[S_{ai}, S^*\right] \subset [0, 1]$ para obter $S^* = S_{af}$, ou seja, o envelope convexo do gráfico de *f* (LEVEQUE, 1992,49-50) Usando essa técnica, nossas estimativas para S_{af} e S_{am} , onde S_{am} indica a saturação média de água, ficaram em boa concordância com os resultados desses mesmos parâmetros divulgados por Netto (2003, p. 56). Também adotamos essa metodologia com o modelo de Stone (BARBOSA, 2010, p. 36) e o modelo divulgado por LeVeque (1992, p. 48) para um problema de Riemann representando um escoamento de água-óleo. Também foram adotados modelos quadráticos com o uso de apenas dois parâmetros para as curvas de permeabilidades relativas da água e do óleo, em oposição aos modelos exponenciais para essas mesmas permeabilidades que envolvem cada um quatro parâmetros, os quais são usualmente adotados (LEITE NETTO, 2003, p. 14, BARBOSA, 2010, p. 34). Por último, procuramos descrever com mais detalhes as Equações (1) e (2) de Buckley e Leverett (1942, p. 109-110) que foram apresentadas de modo sucinto pelos referidos autores. Essas equações devido as suas aplicações, mesmo em textos elaborados como os de Leite Netto (2003, p. 16-17), Chequer (2015, p. 13-14), LeVeque (1992, p. 48-49) ou mesmo Welge (1952, p. 92), carecem de detalhamento, trazendo algumas dificuldades para a compreensão das mesmas. Também a Equação (5) de Buckley e Leverett (1942, p. 110), foi aqui obtida usando uma metodologia baseada em Welge (1952, p. 92) para um sistema gás-óleo. Na Seção 2, são apresentadas as características do meio poroso unidimensional que será utilizado nesse estudo, bem como, o problema de Buckley-Leverett. Também é apresentado o modelo de Stone (BARBOSA, 2010, p. 36) para a representação do fluxo fracionário do fluído de deslocamento. Na Seção 3, é discutido o método dos mínimos quadrados linear considerando os casos discreto e contínuo, que serão usados para a obtenção, respectivamente, dos modelos de permeabilidades para a água e o óleo e o envelope convexo do gráfico da função de fluxo fracionário. Ainda nessa seção, são apresentados a equação escalar conservativa e a condição de Hankine-Ruggoniot (CUMINATO; MENEGUETTE JUNIOR, 2013, p. 256), bem como os modelos exponenciais para as permeabilidades relativas da água e do óleo. Na Seção 4 são discutidos os principais resultados obtidos nesse estudo. Na Seção 5, pode ser estabelecido que as curvas quadráticas de permeabilidade relativas da água e do óleo resultaram em uma expressão simplificada para a função de fluxo fracionário. A metodologia utilizando aproximação de funções para a obtenção do envelope convexo do gráfico da função de fluxo fracionário mostrou-se adequada para a

estimativa de saturação de choque e da saturação média de água do problema de Buckley e Leverett.

2. Materiais e Métodos

Considere um meio poroso unidimensional com as seguintes especificações dadas na Tabela 1.

Tabela 1: Dados utilizados

Comprimento	$L = 10\ m$	Viscosidade dinâmica do óleo	$\mu_0 = 2\,cp$
Largura	$\Delta y = 1\ m$	Viscosidade dinâmica da água	$\mu_a = 0,3\,cp$
Espessura	$h = 1\ m$	Permeabilidade da água na saturação do óleo	$K_{ra}^0 = 0,60$
Porosidade	$\phi = 0,25$	Permeabilidade do óleo na saturação da água	$K_{ro}^0 = 0,65$
Volume poroso da rocha	$V_p = 2,5 m^3$	Saturação irredutível de água	$S_{ai} = 0,15$
Vazão de injeção de água	$q_t = 0,01\ {}^{m^3}\!/_{dia}$	Saturação de óleo no meio poroso	$S_{or} = 0,20$

As saturações adotadas, bem como todos os demais dados da Tabela 1 foram extraídos de Leite Netto (2003, p. 46), para a obtenção da solução analítica do problema de Buckley e Leverett.

2.1 Problema de Buckley-Leverett

O problema de Buckley e Leverett (1942, p. 107-115) trata da recuperação secundária de petróleo em reservatórios por meio de deslocamento de água ou gás sendo por isso, amplamente utilizado na engenharia de petróleo. Nesse sentido, esse problema confinado em um meio unidirecional pode ser expresso pela EDP na forma conservativa dada por:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{q_t}{A\varphi}\frac{\partial f(S)}{\partial x} = 0;\ x,t > 0\,, \tag{1}$$

$$S_d = S(x > 0, t = 0) = S_{ai}\,, \tag{2}$$

$$S_e = S(0, t \geq 0) = 1 - S_{or}\,. \tag{3}$$

Denotando por $A = \Delta y\, h$ a área de qualquer seção reta do meio poroso unidimensional, e $S = S(x,t)$ é o valor da saturação de água. O objetivo dessa equação é fornecer o perfil de saturação de água ao no reservatório ao longo do tempo. A EDP dada pela Equação (1) é do tipo hiperbólica e nela, as descontinuidades são transportadas sem suavização podendo segundo Cuminato e Meneguette Junior (2015, p. 228) haver também a formação de singularidades ou choques, mesmo no caso de dados iniciais bem comportados, o que não é o caso do problema analisado nesse estudo.

2.2 Modelo de Stone

Existem vários modelos matemáticos de função de fluxo fracionário para a representação do problema de Buckley e Leverett, entre os quais o atribuído a Stone (BARBOSA, 2010, p. 36) que é dado por

$$f(S_a) = \frac{S_a^{\,2}}{S_a^{\,2} + a(1 - S_a)^2}\,, \tag{4}$$

onde $a = \dfrac{\mu_a}{\mu_o}$, sendo μ_a e μ_o as viscosidades dinâmicas, respectivamente, da água e do óleo.

3. Método dos Mínimos Quadrados

Nesta seção é apresentado o caso discreto, e o caso contínuo de uma aproximação de função.

3.1 Caso discreto

Dados um conjunto finito de pontos (x_k, y_k), $k = 1,...,m$, o objetivo é encontrar uma função $\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, g_i(x)$, onde $g_i(x)$ são funções arbitrariamente escolhidas e os λ_i são parâmetros ajustáveis de modo que o funcional linear

$$S(\lambda_1,...,\lambda_n) = \sum_{k=1}^{m} d_k^2 = \sum_{k=1}^{m} \left[y_k - \phi(x_k) \right]^2, \tag{5}$$

seja minimizado. Esse procedimento é equivalente a resolver um sistema linear de ordem $n \times n$ dado segundo Ruggiero e Lopes (1996, p. 274) por

$$A\lambda = b, \tag{6}$$

onde λ é o vetor de parâmetros a ser otimizado, sendo *A*, a matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ com

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} g_j(x_k) g_i(x_k) = a_{ji} \quad \text{e} \quad b_i = \sum_{k=1}^{m} y_k \, g_i(x_k).$$

3.2 Caso contínuo

Seja $f(x)$ uma função contínua em um intervalo $[\alpha, \beta]$ e $\phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x)$, onde $g_i(x)$ são também contínuas no mesmo intervalo e onde λ_i são parâmetros ajustáveis de modo que o funcional linear

$$S(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = \int_a^b \left[f(x) - \phi(x) \right]^2 dx, \tag{7}$$

seja mínimo. Esse procedimento é equivalente a resolver um sistema linear de ordem $n \times n$ dado segundo Ruggiero e Lopes (1996, p. 280) por

$$A\lambda = b, \tag{8}$$

λ é o vetor de parâmetros a ser otimizado, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ onde

$$a_{ij} = \int_a^b g_i(x) g_j(x) dx \quad \text{e} \quad b_i = \int_a^b f(x) g_i(x) dx. \tag{9}$$

3.3 Condição de Hankine-Rugoniot

Seja

$$u_t + \left(f(u) \right)_x = 0, \tag{10}$$

uma equação escalar conservativa (LEVEQUE, 1992, p. 15) onde $u = u(x,t)$ é a densidade de uma substância em um meio fluido e $f[u(x,t)]$ é uma função de fluxo, com $x \in D = [a,b]$. Se $x = \xi(t)$ é uma curva ao longo da qual a solução u para a Equação (10) é descontínua com salto de u_e para u_d, onde u_e e u_d são, respectivamente, os valores limites de u à esquerda e a direita da curva $x = \xi(t)$, então vale a condição de salto, ou condição de Rankine-Hugoniot (CUMINATO; MENEGUETTE JUNIOR, 2013, p. 256) dada por:

$$s = \frac{d\xi}{dt} = \frac{f(u_e) - f(u_d)}{u_e - u_d}, \tag{11}$$

onde s é a velocidade do choque e $x = \xi(t)$ é a curva de choque.

3.4 Modelo exponencial

As permeabilidades relativas da água, K_{ra} e do óleo, K_{ro} em uma seção reta observada são funções que dependem das saturações dos fluidos, as quais podem ser aproximadas por um modelo de potência dado pelas equações (BARBOSA, 2010, p.34)

$$K_{ra} = K_{ra}^0 \left(\frac{S_a - S_{ai}}{1 - S_{ai} - S_{or}} \right)^a \quad \text{e} \quad K_{ro} = K_{ro}^0 \left(\frac{1 - S_{or} - S_a}{1 - S_{ai} - S_{or}} \right)^a. \tag{12}$$

4. Resultados e Discussões

A Figura 1 mostra uma representação esquemática simplificada do problema de Buckley e Leverett, onde L é comprimento do meio, $q_t = q_i$ é a vazão total do fluxo de fluidos em qualquer seção transversal e, $q_t = q_i + q_o$ é mesma vazão, composta das vazões individuais dos fluidos em deslocamento.

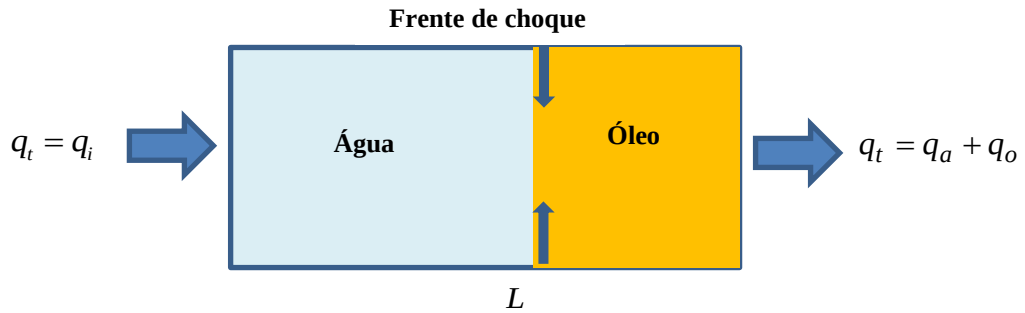

Figura 1: Representação esquemática de injeção de água em um corpo poroso.

Portanto, quando a água se move, ela desloca certa fração de óleo imediatamente, enquanto atrás do choque ou avanço de água, existe segundo LeVeque (1992, p. 49) uma mistura de óleo e água, com cada vez menos óleo à medida que o tempo passa. No campo de produção, só existe óleo em alta concentração até a chegada do choque com saturação de valor S_{af}, quando então a água emerge. Tem-se, portanto, uma mudança brusca de saturação que passa da saturação de água residual, S_{ai}, para S_{af}, sendo que atrás do choque, a saturação de água vai aumentando de S_{af} até $1 - S_{or}$, onde S_{or} é a saturação de óleo residual.

Aqui é assumido que a injeção de água no poço injetor tem vazão constante igual à vazão de saída na produção. Também, será admitido que o meio poroso encontra-se com os poros totalmente preenchidos, isto é, a saturação de óleo é alta nesse meio, exceto pela saturação de irredutível ou água imóvel de saturação, S_{ai}. Assim, se S_a e S_o representam, respectivamente, a saturação de água e óleo no meio poroso, então $S_a + S_o = 1$. Segundo Leite Netto (2003, p. 12) as forças que atuam em um meio poroso são de natureza gravitacional, capilar e viscosa. A gravitacional atua sobre os fluidos com respeito as suas densidades, forçando os mais leves, como o óleo, a ocuparem as partes mais altas do reservatório. As forças ou pressões capilares estão ligadas a interação rocha-fluido, enquanto as forças viscosas que são forças de atrito são responsáveis pela perda de carga que ocorre durante o movimento dos fluidos. Além disso, o fluxo será considerado difuso, isto é, suas concentrações encontram-se uniformemente distribuídas em qualquer seção transversal do meio, o que confere a propriedade da homogeneidade do meio. O fluxo fracionário $f_a = f$, representa a representa a razão entre o fluxo injetado de líquido de deslocamento em relação ao fluxo total na saída de uma seção reta, isto é,

$$f_a = \frac{q_a}{q_a + q_o}, \tag{13}$$

onde q_a e q_o são, respectivamente a vazão de água e de óleo por seção reta no reservatório.

Segundo Buckley e Leverett (1942, p. 110) com essas simplificações, o fluxo fracionário pode ser reescrito na forma

$$f_a = \frac{1}{1 + \dfrac{\mu_a K_{ro}}{\mu_o K_{ra}}}, \tag{14}$$

onde μ_a e μ_o são, respectivamente, os parâmetros de viscosidade dinâmicas da água e do óleo, enquanto K_{ra} e K_{ro} são, respectivamente, as permeabilidades relativas da rocha ou areia, para a água e o óleo e ambas, funções da saturação de água. Desse modo, a função de fluxo fracionário depende essencialmente da saturação, isto é, $f_a = f_a(S_a)$. A equação de balanço de massa sobre uma região fina de comprimento dx da seção do reservatório em termos da movimentação de água em um dado tempo t é dado segundo Chequer (2015, p. 13) por

$$q_a \rho_a (x,t) - q_a \rho_a (x + dx, t) = A \phi \, dx \frac{\partial \left(\rho_a S_a (x,t) \right)}{\partial t}, \tag{15}$$

onde o lado direito da Equação (15) expressa o aumento de massa no volume de controle no tempo t. Desenvolvendo o produto de funções escalares $q_a \rho_a (x + dx, t)$ em série de Taylor em torno de *x* até o termo de primeira ordem tem-se

$$q_a \rho_a (x + dx, t) = q_a \rho_a (x,t) + \frac{\partial \left(q_a S_a (x,t) \right)}{\partial x} dx. \tag{16}$$

Das Equações (15) e (16) e da incompressibilidade da água, isto é, $\rho_a (x,t) = const$ resulta

$$\frac{\partial q_a}{\partial x} = -A \phi \frac{\partial S_a}{\partial t}. \tag{17}$$

Como $q_a = q_a(S_a)$ tem-se, aplicando a regra da cadeia na derivação composta que

$$\frac{\partial q_a}{\partial x} = \frac{\partial q_a}{\partial S_a} \cdot \frac{\partial S_a}{\partial x} . \tag{18}$$

A variação da saturação de água em um ponto (x,t) pode ser aproximada pelo diferencial total $dS_a(x,t)$ dado por:

$$dS_a(x,t) = \nabla S_a(x,t) \cdot (dx, dt) = \frac{\partial S_a(x,t)}{\partial x} dx + \frac{\partial S_a(x,t)}{\partial t} dt . \tag{19}$$

Considerando que a saturação de cada plano é constante ao longo de seu movimento, a Equação (19) pode ser escrita como

$$\frac{\partial S_a(x,t)}{\partial x} dx + \frac{\partial S_a(x,t)}{\partial t} dt = 0 . \tag{20}$$

Das Equações (17), (18) e (20) tem-se

$$\frac{\partial q_a}{\partial S_a} = A\phi \frac{\partial x}{\partial t} . \tag{21}$$

Da Equação (13), a derivada do fluxo fracionário de água pela saturação de água nos dá

$$\frac{\partial f_a}{\partial S_a} = \frac{1}{q_t} \frac{\partial q_a}{\partial S_a} . \tag{22}$$

Multiplicando a Equação (21) pelo fator constante $\frac{1}{q_t}$ e usando a Equação (22) tem-se

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{q_t}{A\phi} \frac{\partial f_a}{\partial S_a} , \tag{23}$$

onde considerando os subscritos associados a saturação e ao tempo, a Equação (23) pode ser escrita como

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{S_a} = \frac{q_t}{A\phi} \left(\frac{\partial f_a}{\partial S_a}\right)_t . \tag{24}$$ [1]

A Equação (24) é a Equação (2) de Buckley e Leverett (1942, p. 110) com mudança de rótulos para a saturação e o tempo. Essa equação estabelece que a velocidade de avanço de um plano de saturação fixa de valor S_a, é proporcional a derivada da função de fluxo fracionário no tempo t. Note que a Equação (23), pode ser ainda reescrita na forma simplificada:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{q_t}{A\phi} \frac{df_a}{dS_a} . \tag{25}$$

Integrando a Equação (25) de 0 a t obtém-se

$$x_{S_a} = \frac{1}{A\phi} \frac{df_a}{dS_a} \int_0^t q_\tau d\tau = v_{S_a} V_i , \tag{26}$$

[1] A Equação (2) original de Buckley e Leverett $\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)_{S_D} = \frac{q_T}{A\phi}\left(\frac{\partial f_D}{\partial S_D}\right)_\theta$, onde u é a distância ao longo do caminho de *f*; S_D é a saturação do fluido de deslocamento; θ representa o tempo; q_T taxa total do fluxo de fluido que atravessa uma seção reta de área *A*; f_D é o fluxo fracionário do fluido de deslocamento; ϕ é a porosidade e *A* a área da seção

onde x_{S_a} é a posição do plano de saturação constante S_a no tempo t e $V_i = q_t T$ o volume total injetado durante o tempo de processo T, enquanto $v_{S_a} = \frac{q_t}{A\phi}\frac{df_a}{dS_a}$ é a velocidade constante de deslocamento. Portanto, o perfil de um plano de saturação S_a é proporcional à derivada de fluxo fracionário e ao volume injetado. Para a obtenção dos gráficos relativos ao fluxo fracionário, $f_a = f_a(S_a)$ e a posição do plano de saturação, x_{S_a} foram considerados os dados dos pontos discretos (x_{Sa}, S_a), onde S_a são as saturações tomadas no intervalo $[S_{ai}, 1 - S_{or}]$ considerando as vinte e três saturações dadas pela progressão aritmética $S_a^j = S_{ai} + (j-1)\, r\, n^{-1}$, onde $r = 0{,}65$ e $n = 23$ que foram utilizadas por Leite Netto (2003, p. 17, 21, 51). Para usarmos a Equação (26) é preciso obter a Equação (14) a qual, necessita das permeabilidades relativas da água, K_{ra} e do óleo, K_{ro} dadas pela Equação (12). Empregando os mínimos quadrados para o ajuste dos dados das permeabilidades relativas discretas da água e do óleo calculadas com os modelos exponenciais dados pela Equação (12), obtemos as seguintes curvas quadráticas para essas permeabilidades dadas, respetivamente, por:

$$K_{ra}(S_a) \approx 0{,}0319 - 0{,}4260 S_a + 1{,}420 S_a^2, \tag{27}$$

$$K_{ro}(S_a) \approx 0{,}9846 - 2{,}4615 S_a + 1{,}5384 S_a^2. \tag{28}$$

Das equações (14), (27), (28) e dos dados das permeabilidades relativas da água e do óleo constantes da Tabela 1, tem-se uma expressão analítica simplificada que é uma aproximação para a função de fluxo fracionário dada por:

$$f_a(S_a) \approx \frac{1}{1 + \dfrac{0.3\left(0.9846 - 2.4615 S_a + 1.5384 S_a^2\right)}{2\left(0.0319 - 0.4626 S_a + 1.420 S_a^2\right)}} \tag{29}$$

A Figura 2 mostra os dados discretos das saturações de água móvel até a saída do reservatório em $\frac{x}{L} = 1$ de valor S_{af}, enquanto no poço de injeção em $\frac{x}{L} = 0$, tem-se a saturação de água máxima $1 - S_{or} = 0{,}8$. A curva contínua é uma exponencial decrescente que ajustou esses dados. Esse perfil de saturação, conhecido como *breakthrough* (OLIVEIRA; CORDEIRO; TREVIZANI; CANZIAN; ASSUNÇÃO; ROMERO, 2014, p. 83). acontece quando a água injetada no reservatório emerge na produção. Esse evento será discutido com mais detalhes ao longo do texto.

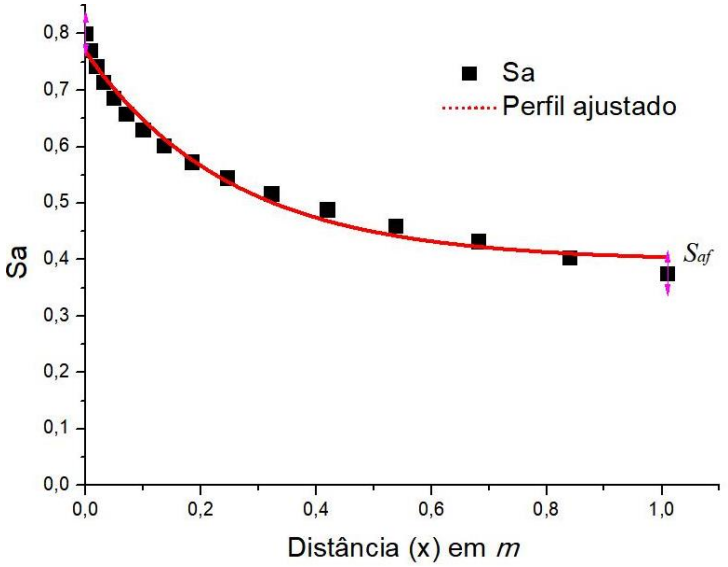

Figura 2: Curva de saturação de água em função da distância do plano de saturação de água móvel no evento *breakthrough.*

A Figura 3 mostra um perfil típico do fluxo fracionário e de sua derivada em função da saturação durante o tempo de processamento.

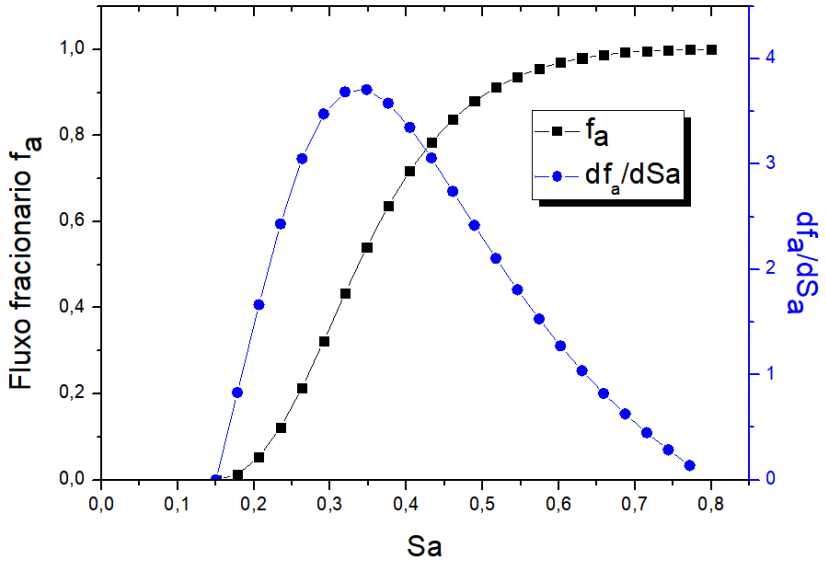

Figura 3. Perfis típicos para as curvas f_a e $\frac{df_a}{dS_a}$ de um sistema água- óleo com $S_{ai} = 0{,}15$ e $S_{or} = 0{,}20$.

Da Equação (13) pode-se obter

$$\frac{\partial f_a}{\partial x} = \frac{1}{q_t} \cdot \frac{\partial q_a}{\partial x}. \tag{30}$$

Multiplicando a Equação (17) pelo fator constante $\frac{1}{q_t}$ e combinando com a Equação (30) tem-se a Equação (1) de Buckley e Leverett (1942, p.109) com renomeação de rótulos dada por:

$$\left(\frac{\partial S_a}{\partial t}\right)_x = -\frac{q_t}{A\phi}\left(\frac{\partial f_a}{\partial x}\right)_t{}^{2}. \tag{31}$$

A Equação (5) de Buckley e Leverett (1942, p. 110) também pode ser obtida utilizando a seguinte metodologia. Como $f_a = f_a(S_a)$ e $S_a = S_a(x,t)$, tem-se pela regra da cadeia que

$$\frac{\partial f_a}{\partial x} = \frac{df_a}{dS_a}\cdot\frac{\partial S_a}{\partial x}. \tag{32}$$

A Equação (4) proposta por Welge (1952, p. 92) para o sistema gás-óleo foi aqui adaptada para o sistema água-óleo. Daí, e das equações (30) e (31) obtemos novamente a Equação (5) de Buckley e Leverett (1942, p. 110)**.**

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = -\frac{\dfrac{\partial S_a}{\partial t}}{\dfrac{\partial S_a}{\partial x}} = \frac{q_t}{A\phi}\frac{df_a}{dS_a}. \tag{33}$$

A saturação média, S_{am} de água da região invadida pela frente de choque pode ser estimada através da Equação (7) de Welge (1952, p.94), e que segundo Leite Netto (2003, p. 21) é dada por:

$$\frac{df_a(S_{af})}{dS_a} = \frac{1}{S_{am} - S_{ai}}, \tag{34}$$

onde conhecido $\dfrac{df_a(S_{af})}{dS_a}$, tem-se a saturação média de água S_{am} atrás da região invadida pelo choque.

Para estimar a saturação média, Welge (1952, p. 97) apresentou a seguinte metodologia adaptada para o sistema água-óleo que, segundo Leite Netto (2003, p. 21) é descrita como:

i) Traçar o gráfico de $f_a(S_a)$, o que exige as curvas de permeabilidades $K_{ra}(S_a)$ e $K_{ro}(S_a)$.
ii) Traçar a reta tangente ao gráfico de $f_a(S_a)$ partindo do ponto $(S_{ai},0)$, onde a abscissa do ponto de tangência da curva nos dá a estimativa para $S_{af} = S^*$.

Essa construção gráfica, que pode ser vista na Figura 4, corresponde a obter o fecho convexo do gráfico de $f_a(S_a)$ (LEVEQUE, 1992, p. 48-49), isto é, a obtenção de S_{af} é determinada pela envoltória convexa do gráfico de $f(S_a)$. Entretanto, nenhum dos autores referenciados nesse artigo mostra como obter essa envoltória, o que aqui foi realizado usando aproximação de funções.

[2] Equação (1) original de Buckley e Leverett $\left(\frac{\partial S_D}{\partial \theta}\right)_u = -\frac{q_T}{\phi A}\left(\frac{\partial f_D}{\partial u}\right)_\theta$.

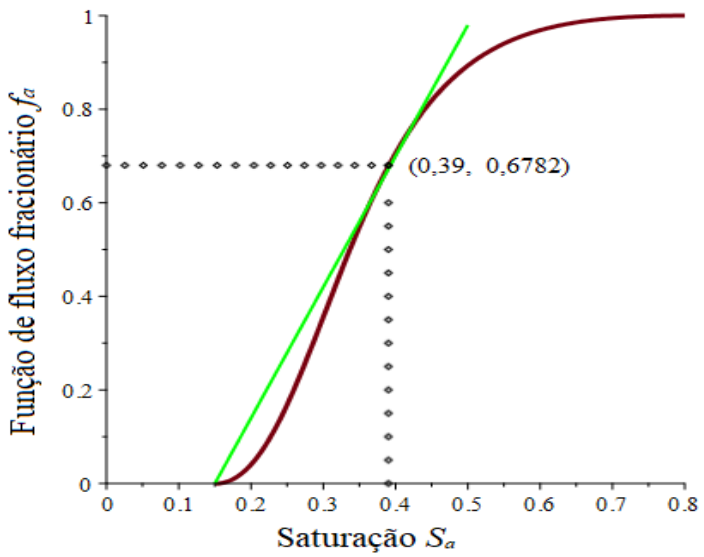

Figura 4. Determinação geométrica da saturação da frente de avanço de água ou saturação de choque.

Seja $\Delta t = t_{BT}$ o tempo para que o plano de choque de saturação S_{af} chegue à extremidade de produção, isto é, a região invadida pelo choque tem comprimento igual à L.

Como foi visto anteriormente este evento é o *breakthrough*. Usando a Equação (26), tem-se que

$$t_{BT} = \frac{L}{v_{S_{af}}}. \tag{35}$$

A forma conservativa dada pela Equação (1), pode ser posta na forma de uma EDP não linear dada por:

$$\frac{\partial S_a}{\partial t} + \frac{q_t}{A\phi}\frac{df_a(S_a)}{dS_a}\frac{\partial S_a}{\partial x} = 0. \tag{36}$$

Para que uma curva característica $x = \xi(t)$ satisfaça a Equação (36) devemos ter

$$\frac{dx}{dt} = \frac{q_t}{A\phi}\frac{df(S_a)}{dS_a}. \tag{37}$$

Portanto, as saturações S_a são constantes ao longo das características dadas pela solução da Equação (37), na forma

$$x = \frac{q_t}{A\phi}\frac{df(S_a)}{dS_a}t + x_0. \tag{38}$$

Desse modo, são admitidas soluções com descontinuidade de salto, chamada choques. Da Equação (2) tem-se que para $x > 0$, $S = S_{ai}$. Logo, para $x > 0$ as características dadas pela Equação (36) tem a forma $x = x_0$, isto é, são retas verticais no plano xt. À esquerda do choque do plano de saturação $S = S_{af}$ é determinado de forma a compatibilizar a condição de Rankine-Hugoniot dado pela Equação (11) quando do salto do estado S_{ai} para S_{af} com a Equação (25) da velocidade de um plano de saturação constante para obter

$$\frac{df(S_{af})}{dS} = \frac{f(S_{af}) - f(S_{ai})}{S_{af} - S_{ai}}. \tag{39}$$

A Equação (39) é na verdade, devido à condição de Rankine-Hugoniot, a velocidade do avanço da frente de choque $x = \xi(t)$ de valor S_{af}. Essa velocidade usando a Equação (37) é dada por:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{q_t}{A\phi}\left[\frac{df(S_{af})}{dS}\right]. \tag{40}$$

Logo, o caminho da frente de choque ou avanço de água, é dado pela integração em t da Equação (40) para obter

$$x_{S_{af}} = \frac{q_t}{A\phi}\frac{df\ (S_{af})}{dS}t\,. \tag{41}$$

A Equação (41) é a solução analítica para o problema de Buckley e Leverett (LEITE NETTO, 2003, p. 30).

Conhecendo-se a função de fluxo fracionário, a Equação (39) nos fornece um método para a estimativa do valor de S_{af} através da resolução de uma equação não linear. Quando $S_{ai} \cong 0$, é assumida, como por exemplo, usando o modelo de Stone (BARBOSA, 2010, p. 42-42) a Equação (39) tem a sua expressão simplificada na forma:

$$\frac{df(S_{af})}{dS} = \frac{f(S_{af})}{S_{af}}. \tag{42}$$

A solução conectando os estados S_e e S_{af} é uma onda de rarefação, enquanto a solução conectando os estados S_{af} com S_d é uma onda de choque para uma função de fluxo sigmoidal (BARBOSA, 2010, p.88). Dito de outro modo, o problema de Buckley e Leverett dado pela Equação (1) possui como solução uma rarefação com um choque no extremo da área de rarefação, chamada de rarefação seguida de choque (CUMINATO; MENEGUETTE JUNIOR, 2013, p. 260-261), onde a posição do choque é dada pela direção de $\frac{df(S_{af})}{dS}$. As inclinações das características na onda de rarefação variam de 90 (graus) até a inclinação do choque dada pela Equação (39). A Figura 5 representa os perfis de saturação de água do problema de Buckley e Leverett aqui analisado em diferentes tempos. Nesse gráfico, as saturações, $S_a \geq S_{af}$ são lidas no eixo vertical, enquanto no horizontal, são marcadas as posições, x_{Sa} dos planos de saturação para um determinado tempo, onde os segmentos verticais representam a frente de choque em diferentes instantes. As posições das saturações acima do valor S_{af}, foram calculadas usando a Equação (33). O valor $S_{am} = 0{,}49$ em todo o reservatório pode ser obtido da Equação (34), a qual só necessita da saturação de frente S_{af} e da saturação de água residual, S_{ai} .

As saturações na rarefação estão no domínio $\left[S_{af}, 1 - S_{or}\right]$ onde a posição desses planos de saturação podem ser calculadas usando a Equação (26) onde $0 \leq x_{Sa} \leq x_{Saf}$. No choque a saturação de água é constante e igual a S_{af}, e à frente dele, tem-se óleo em elevado percentual.

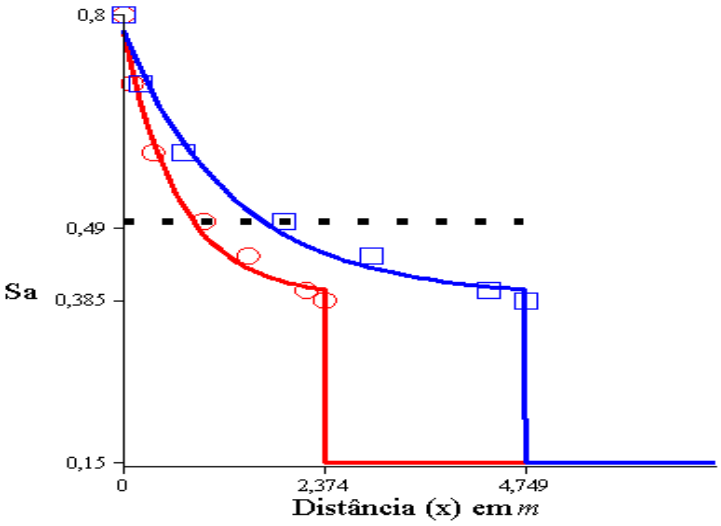

Figura 5. Perfis típicos de saturação de água móvel com o tempo: avanço da frente de choque de saturação $S_{af} = 0,385$ com $t = 20$ (dias) representado pela curva com círculos, e $t = 40$ (dias) representado pela curva com quadrados.

A Figura 6(a) mostra uma boa concordância das curvas contínuas de permeabilidades relativas da água e do óleo dadas, respectivamente, pelas Equações (27) e (28) comparadas com os valores discretos quando adotados os modelos exponenciais. A Figura 6(b) mostra também uma boa concordância entre os fluxos fracionários calculados usando os modelos exponenciais representados pelos pontos discretos e a curva contínua utilizando os modelos quadráticos dados pelas equações (27) e (28). A Figura 6(c) mostra outro ajuste dos pontos discretos $\left(S_a^j, f_a(S_a^j)\right)$, $j = 1..23$, obtidos pela Equação (29) usando um modelo sigmoidal aqui adotado e dado por:

$$f_a\left(S_a\right) = A_2 + \frac{\left(A_1 - A_2\right)}{1 + \exp\left(\dfrac{S_a - x_0}{dx}\right)}, \tag{43}$$

onde $A_1 = -0{,}12395$, $A_2 = 0{,}99738$, $x_0 = 0{,}32311$ e $dx = 0{,}07432$. Esse ajuste foi obtido usando o *software Origin* 8.0 com $\sum_{i=1}^{n} R_i^{\,2} = 1{,}94 \times 10^{-5}$ (soma de resíduos quadráticos). Desse modo, outros modelos para a função de fluxo podem ser usados para a sua expressão analítica com boa concordância entre eles.

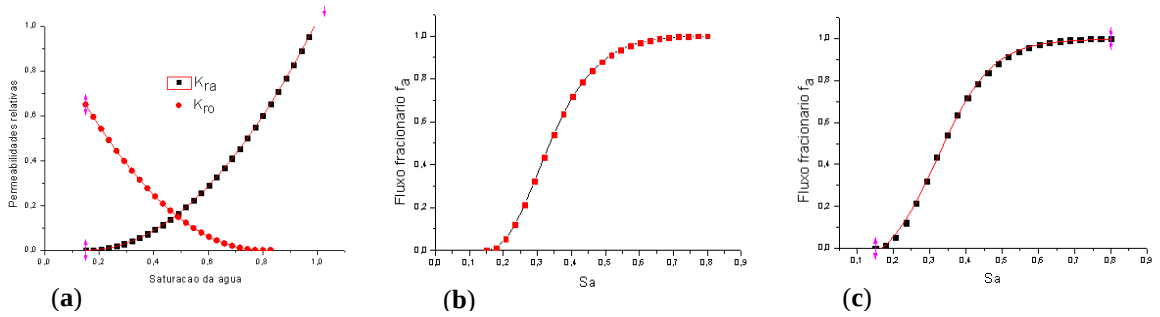

Figura 6. (a) Perfil das curvas de permeabilidades relativas da água e do óleo em função da saturação de água S_a ajustadas por funções quadráticas, (b) e (c) perfil do fluxo fracionário contínuo dado, respectivamente, pelas Equações (42) e (43).

Das Equações (39) e (34) foram obtidos, $S_{af} = 0{,}39301$ para o valor da saturação da frente de choque, e $S_{am} = 0{,}5037$ para a saturação média de água do meio invadido pela frente de choque. Os valores aqui obtidos concordam com os divulgados por Leite Netto (2003, p. 56) diferindo apenas na terceira casa decimal. Entretanto, é possível, usando os mínimos quadrados lineares para o caso contínuo desenvolvido na Seção 3.2, obter uma estimativa para S_{af} por meio da resolução de um sistema linear de segunda ordem, $A\lambda = b$ obtido pela aproximação da reta tangente ao gráfico de f_a que passa pelo ponto $(S_{ai}, 0)$ dada por:

$$L(S_a) = \frac{df_a(S_{af})}{dS_a}[S_a - S_{ai}] \ . \tag{44}$$

Definindo $g_1(S_a) = S_a$ e $g_2(S_a) = 1$ obtemos as entradas da matriz simétrica $A = (a_{ij})_{i,j=1..2}$ dadas por:

$$a_{11} = \int_0^{S_{af}} S_a^2 \, dS_a \, , \quad a_{12} = a_{21} = \int_0^{S_{af}} S_a dS_a \quad \text{e} \quad a_{22} = \int_0^{S_{af}} dS_a \, .$$

A matriz b é dada por $b_1 = \int_0^{S_{af}} \left[f_a(S_a) \right] S_a dS_a$ e $b_2 = \int_0^{S_{af}} \left[f_a(S_a) \right] dS_a$. A resolução desse sistema usando o software Maple resultou na equação algébrica não linear na variável S_{af} dada por:

$$\lambda_1(S_{af}) = \frac{df_a(S_{af})}{dS_a} \, , \tag{45}$$

onde $\lambda_1(S_{af})$ é uma das funções coordenadas na variável S_{af} da solução do sistema $A\lambda = b$.

O gráfico da função $\phi \equiv \lambda_1(S_{af}) - \dfrac{df_a(S_{af})}{dS_a}$ pode ser visto na Figura 7.

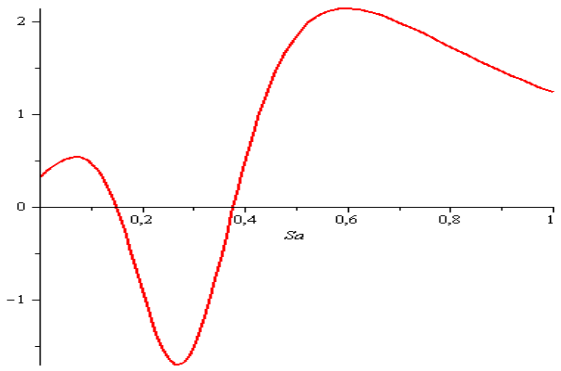

Figura 7: Raízes da Equação (45) no intervalo [0,1] para a estimativa de S_{af} .

Foi obtido $S_{af} = 0{,}3778$ para a raiz da função ϕ, sendo que a raiz próxima a 0,15 foi descartada, pois $S_{af} > S_{ai} = 0{,}15$ (LEITE NETTO, 2003, p. 51-52). As estimativas para os parâmetros S_{af} e S_{am} com a aproximação de funções diferem, respectivamente, 4% e 6,3% em relação aos valores para esses mesmos parâmetros divulgados por Leite Netto (2003, p.56). Embora Leite Netto (2003, p. 56) não tenha especificado como foi obtida a estimativa da saturação de choque $S_{af} = 0{,}394$ ao fazermos os cálculos com a função de fluxo fracionário adotando as curvas de permeabilidades dadas pela Equação (12) com $a = b = 2$ e a Equação (39), obtivemos $S_{af} = 0{,}393$. O valor para $S_{am} = 0{,}504$ divulgado por Leite Netto (2003, p. 56) ficou também em grande concordância com o valor estimado $S_{am} = 0{,}503$ usando o valor $S_{af} = 0{,}393$ com a Equação (39). Essa boa concordância entre os parâmetros de saturação de choque e a saturação média indica que as funções de fluxo fracionário com os modelos de permeabilidades exponencial e quadrático são concordantes.

Como já foi dito anteriormente, o método aqui desenvolvido para a estimativa de S_{af} é baseado no aspecto geométrico da construção da reta tangente ao gráfico de f_a com o objetivo de obter o fecho convexo desse conjunto como sugerido por Leveque (1992, p. 49-50). O modelo de Leveque (1992, p. 48) para a função de fluxo fracionário, nada mais é que o modelo de Stone (BARBOSA, 2010, p. 36) com o parâmetro a representando a razão entre as viscosidades da água e do óleo. Esse modelo foi utilizado com $a = 1$ e $a = 0{,}5$ no problema de Buckley e Leverett para obter estimativas para as saturações S_{af} e S_{am} usando a Equação (39) e a metodologia baseada na construção da tangente ao gráfico de f_a aqui já detalhada. A Tabela 2 mostra os resultados desses parâmetros para os três exemplos aqui analisados.

Tabela 2. Estimativas para os parâmetros de concentração S_{af} e S_{am}

Modelo	S_{af}^1	S_{am}^1	S_{af}^2	S_{am}^2	$S^* = \dfrac{S_{af}^1 + S_{af}^2}{2}$	$S_{am} = \dfrac{S_{am}^1 + S_{am}^2}{2}$
Modelo de Buckley e Leverett +	0,3930	0,5037	0,3778	0,4718	0,3854	0,4877
Modelo 2 (a = 0,15)$^{++}$	0,3611	0,5305	0,3824	0,5842	0,3717	0,5573
Modelo 2 (a = 0,5)$^{+++}$	0,5773	0,7320	0,6072	0,8337	0,5922	0,8976
Modelo 2 (a = 1)$^{+++}$	0,7071	0,8284	0,7392	0,9796	0,7231	0,8976

$^{+}$ Modelo de fluxo ajustado por permeabilidades quadráticas vistas nas Equações (27) , (28) e 29) $^{++}$ Modelo de Stone visto na Equação (4). $^{+++}$ Modelo LeVeque (1992, p. 48). S_{af}^1 Método usando a Equação (39) e S_{af}^2 Método usando o modo geométrico da tangente por aproximação de funções. A média das saturações de água, $S_{am}^{1,2}$ foram estimadas pela Equação (34).

Dos modelos de Stone aqui utilizados, o que mais se aproximou do modelo1 é o que usa $a = \dfrac{\mu_a}{\mu_o} = 0{,}15$. Os outros dois modelos de Stone foram aqui considerados apenas no sentido de comparar as estimativas obtidas para os parâmetros S_{af} e S_{am} com as metodologias adotadas.

No evento do *breakthrough* usando as equações (26) e (35) é possível obter a solução analítica do problema de Buckley e Leverett para o perfil de saturação de água em função da distância *x* do plano de saturação em relação ao ponto de injeção dado por

$$x_{Sa} = \frac{L}{\dfrac{df_a(S_{af})}{dS_a}} \left(\frac{df_a(S_a)}{dS_a} \right). \tag{46}$$

O perfil das saturações no domínio $[S_{af}, 1 - S_{or}]$ durante esse evento, pode ser visto na Figura 2. Esse perfil está em boa concordância com o de saturação de água obtido por Leite Netto (2003, p. 56- 57) para esse mesmo problema. Obter a relação inversa da Equação (46) pode se tornar uma tarefa impossível, por isso, ajustamos os pares simétricos discretos (S_a, x_{Sa}) por meio de uma função de decaimento exponencial dada por:

$$S_a(\hat{x}) = A \exp\left(-\frac{\hat{x}}{B} \right) + C, \tag{47}$$

onde $0 \le \hat{x} = \dfrac{x_{Sa}}{L} \le 1$, $A = 0{,}37122$, $B = 0{,}2532$ e $C = 0{,}3972$ com resíduo quadrático $R^2 = 0{,}98$, evidenciando desse modo a qualidade do ajuste para o perfil de saturações (Figura 2). Os parâmetros da Equação (49) foram ajustados pelo modo não linear dos mínimos quadrados usando o *software Origin* 8.0.

Em particular $S_a(0) = 0{,}7684 \cong 0{,}8 = 1 - S_{or}$ e $S_a(1) = 0{,}4043 \cong 0{,}3940$ têm boa concordância com os resultados teóricos já divulgados. Em particular, $S_a(0{,}5) = 0{,}4487$,ou seja, quando a água emergir no poço de produção, a saturação de água na metade do reservatório será de aproximadamente 45%, que é próxima da saturação média em toda a extensão do reservatório. Portanto, informações diretas sobre as saturações nas diversas posições podem ser obtidas sem a necessidade de resolver seguidamente a Equação não linear (46).

5 Conclusões

O uso de funções quadráticas para as curvas de permeabilidades relativas da água e do óleo resultou em uma expressão analítica simplificada para uma aproximação da função de fluxo fracionário constituída por modelos quadráticos, em substituição aos modelos exponenciais, para as permeabilidades relativas de água e óleo. Também um modelo sigmoidal para a função de fluxo foi utilizado mostrando boa concordância com esse modelo simplificado. O método aqui utilizado, usando a aproximação de funções para obter estimativas para a saturação de choque do problema de Buckley e Leverett, mostrou-se adequado quando comparado com o cálculo desse mesmo parâmetro utilizando a resolução de equações algébricas não lineares ou o envelope convexo do gráfico do fluxo de saturação. Uma discrepância inferior a nove por cento pode ser verificada entre as diferentes metodologias com respeito à estimativa para a saturação média. O modelo de Stone quando considerado como dependente da razão de viscosidade entre os fluídos ficou em boa concordância com o modelo de fluxo fracionário utilizando funções de permeabilidades quadráticas.

Um maior detalhamento das Equações de Buckley e Leverett foi obtido, bem como, a dedução da equação da posição de um plano de saturação constante usando uma metodologia baseada num sistema gás-óleo.

6 Referências

BARBOSA, N. M. **Resolução numérica de equações diferenciais parciais hiperbólicas não lineares:** um estudo visando a recuperação de petróleo. 2010. 140 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional) - Instituto Politécnico, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Nova Friburgo, 2010.

BUCKLEY, S. E.; LEVERETT, M. C. Mechanism of fluid displacement in sands. **Transaction of the AIME**, v. 146, n.1, p. 107-116, 1942.

CUMINATO, J. A.; MENEGUETTE JUNIOR, M. **Discretização de equações diferenciais parciais:** técnicas de diferenças finitas. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

CHEQUER, L. B. **A injeção de água de baixa salinidade como método de recuperação avançada de óleo.** 2015. 74 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenheira de Exploração e Produção de Petróleo) - Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense, Macaé, 2015.

LEITE NETTO, J. B.M. **Estudo da dispersão numérica em simuladores de fluxo para o problema de deslocamento imiscível**. 2003, 92 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Petróleo) - Centro de Ciência e Tecnologia, Universidade Estadual do Norte Fluminense, Macaé, 2003.

LEVEQUE, R. J. **Numerical methods for conservation laws**. 2nd. ed. Basel: Birkhäuser, 1992. (Lectures in Mathematics ETH Zurich).

OLIVEIRA, C. M.; CORDEIRO, D. C.; TREVIZANI, A. A.; CANZIAN, E. P.; ASSUNÇÃO, G.G.; ROMERO, O. J. Análise paramétrica do deslocamento de óleo em um meio poroso governado pela teoria de Buckley-Leverett. **Latin American Journal of Energy Research**, v. 1, n. 1, p. 82-90, 2014.

RUGGIERO, M. A. G., LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico:** aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Pearson: Makron Books, 1996.

TORO, E. F. **Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics**. a practical introduction. 3rd. ed. Berlin: Springer-Verlag, 2009.

WELGE, H. J. A simplified method for computing oil recovery by gas or water drive. **Petroleum Transactions, AIME**, v. 195, p. 91-98, 1952.