

**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 18, jul. 2020
Iniciação Científica

**Milena Carolina dos Santos Man-
gueira**

Instituto Federal de Educação e Tec-
nologia do Estado do Ceará
milencarolina24@gmail.com

Francisco Régis Vieira Alves

Instituto Federal de Educação e Tec-
nologia do Estado do Ceará
fregis@ifce.edu.br

**Paula Maria Machado Cruz Ca-
tarino**

Universidade de Trás-os-Montes e
Alto Douro - Portugal
pcatarino23@gmail.com

Números híbridos de Mersenne

Hybrid Mersenne numbers

Resumo

Exibimos no presente trabalho um estudo sobre os números híbridos de Mersenne, a partir do que já foi estudado sobre os números híbridos como: definição, propriedades e teoremas relacionados. Ao longo do texto discutimos definições, teoremas, propriedades e proposições a fim de mostrar esse novo conjunto de números híbridos de Mersenne. Apresentaremos a partir da Fórmula de Binet a dedução de três identidades clássicas vinculadas ao modelo híbrido de Pell, que são a identidade de Catalan, identidade de Cassini e identidade de d'Ocagne. Por fim, a extensão dos números híbridos de Mersenne para os índices negativos.

Palavras-chave: Números Híbridos. Sequência de Mersenne. Número Híbrido de Mersenne. Fórmula de Binet.

Abstract

We present in this paper a study of Mersenne hybrid numbers, from what has already been studied about hybrid numbers as their definition, properties and related theorems. Throughout the text we discuss definitions, theorems, properties and propositions in order to show this new set of Mersenne hybrid numbers. We will present from Binet's formula the deduction of three classic identities linked to Pell's hybrid model, which are Catalan's identity, Cassini's identity and d'Ocagne's identity. Finally, the extension of Mersenne hybrid numbers to negative indices.

Keywords: Hybrid Numbers. Mersenne sequence. Hybrid Mersenne Number. Binet's formula.

1 Introdução

As sequências recorrêntes são encontradas na área da Matemática, onde pode-se encontrar nos trabalhos de Alves, Catarino (2016), Alves (2017), e pode ser facilmente aplicada em diversas áreas. A sequência de Mersenne formada pelos termos 0, 1, 3, 7, 15, 31... e lembrada pela recorrência $M_{n+2} = 2M_{n+1} + 1$, sendo $M_0 = 0$ e $M_1 = 1$ seus termos iniciais, é uma sequência pouco trabalhada no âmbito matemático, afim de ampliar o conhecimento iremos trabalhar em cima dessa sequência neste artigo. Por outro lado, a partir da importância do estudo do novo conjunto de números, os Números Híbridos, onde será apresentado um pouco sobre esse assunto neste artigo, como sua definição e propriedades. E ainda, iremos associar os dois conteúdos e apresentar a hibridização da sequência de Mersenne onde podemos ver que a hibridização de outras sequências vem sendo trabalhadas em outros artigos: Catarino (2019), Cerda-Morales (2018), Szynal-Liana (2018), Szynal-Liana e Wloch (2019).

Logo mais, nas seções subsequentes, introduziremos uma nova definição denominada como: os números híbridos de Mersenne. E ainda, encontraremos sua recorrência, a equação característica, norma do número híbrido de Mersenne, forma matricial, função geradora, a fórmula de Binet e algumas identidades clássicas: Catalan, Cassini, d'Ocagne e a sua extensão para os índices negativos.

2 Preliminares

2.1 Números híbridos

Um novo conjunto numérico foi apresentado por Özdemir (2018) onde foram estudados três sistemas numéricos juntos, são eles: números complexos, hiperbólicos e duais estando combinados um com outro. Assim, denominou-se esse novo número como número híbrido, denotado por $\mathbb{K}$. Além do mais, Carvalho (2019) apresenta uma representação geométrica bidimensional de tais números por meio da tecnologia. Podemos ver como esse conjunto dos números híbridos se comporta no diagrama dos conjuntos numéricos:

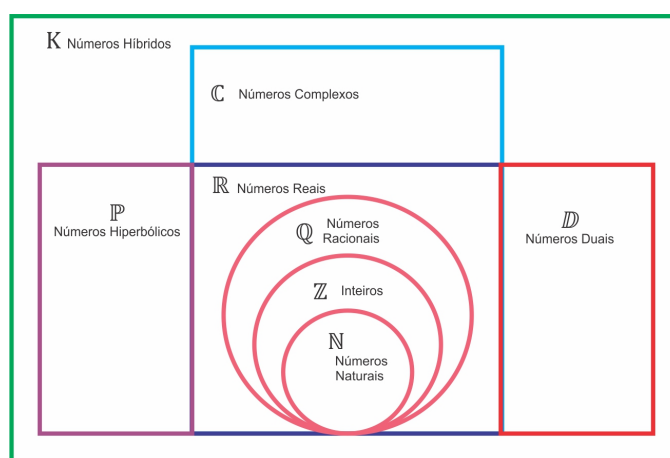


Figura 1: Diagrama dos conjuntos numéricos.

Fonte: Elaborado com base em Özdemir (2018)

A partir disso, serão definidos os números híbridos, alguns teoremas, propriedades e forma matricial.

Definição 1 Um número híbrido é definido como:

$$\mathbb{K} = \{z = a + bi + c\varepsilon + dh : a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + 1\}$$

E ainda, pode-se efetuar algumas propriedades e operações com os números híbridos, sejam elas: soma ou subtração de números híbridos que consiste em somar e/ou subtrair cada um dos seus termos, multiplicação de um escalar a um número híbrido que é definido com o escalar multiplicando cada termo do número híbridos.

O produto híbrido é obtido distribuindo-se os termos à direita, preservando a ordem de multiplicação das unidades e depois escrevendo os valores dos seguintes substituindo cada produto de unidades pelas igualdades $i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + 1$. Usando essas igualdades, podemos encontrar o produto de quaisquer duas unidades híbridas. E ainda podemos apresentar a tabela da multiplicação de um número híbrido, como mostra a tabela 1.

$\cdot$	1	i	ε	h
1	1	i	ε	h
i	i	-1	$1 - h$	$\varepsilon + i$
ε	ε	$1 + h$	0	$-\varepsilon$
h	h	$-\varepsilon - i$	ε	1

Tabela 1: Tabela de multiplicação para $\mathbb{K}$.

Fonte: Elaborado pelos autores

Podemos ver que a operação de multiplicação nos números híbridos não é comutativa, mas tem a propriedade de associatividade e o conjunto $\mathbb{K}$ dos números híbridos forma um anel não comutativo em relação à adição e multiplicação. E ainda, temos o conjugado de um número híbrido $z = a + bi + c\varepsilon + dh$, denotado por $\bar{z}$, é definido como $\bar{z} = a - bi - c\varepsilon - dh$, e o número real $C(z) = z\bar{z} = \bar{z}z = a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2 = a^2 + b^2 - 2bc - d^2$ é chamado de caráter do número híbrido, onde a raiz desse número real será a norma do número híbrido z , assim temos que: $\|z\| = \sqrt{C(z)}$.

2.2 Sequência de Mersenne

Na Matemática nos deparamos com diversas sequências recorrentes e de números inteiros, que podem ser aplicadas em quase todos os campos da ciência. A sequência de Mersenne é discutida em Catarino, Campos e Vasco (2016).

A sequência de Mersenne corresponde a seguinte relação de recorrência:

$$M_{n+1} = 2M_n + 1$$

Para $n + 1$ podemos reescrever essa relação de recorrência como $M_{n+2} = 2M_{n+1} + 1$. E ainda, subtraindo $M_{n+2} - M_{n+1}$ podemos obter uma outra relação de recorrência equivalente para esta sequência. Observe:

$$\begin{aligned} M_{n+2} - M_{n+1} &= 2M_{n+1} + 1 - 2M_n - 1 \\ M_{n+2} &= 3M_{n+1} - 2M_n \end{aligned}$$

com as condições iniciais $M_0 = 0$, $M_1 = 1$ e $n \geq 0$. Em Catarino, Campos e Vasco (2016) podemos encontrar a equação característica definida por $x^2 - 3x + 2 = 0$ com suas raízes $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$, podemos encontrar também a fórmula de Binet representada como $M_n = 2^n - 1$ e Alves, Catarino e Mangueira (2019) substituí o índice n por $-n$ na fórmula de Binet obtendo outra fórmula $M_{-n} = 2^{-n} - 1 = -\frac{1}{2^n}(2^n - 1) = -\frac{M_n}{2^n}$, $n \geq 0$, essa fórmula possibilita encontrar os termos inteiros não positivos dessa sequência. Essa sequência ainda apresenta algumas propriedades, relações e identidades em torno dela.

Motivado no trabalho Özdemir (2018) e baseado na importância dessa sequência aplicaremos assim a definição dos números híbridos nessa sequência e nas próximas seções apresentaremos os números híbridos de Mersenne, algumas propriedades algébricas, a fórmula de Binet, a função geradora e algumas identidades relacionadas a esta sequência.

3 Números híbridos de Mersenne

Nesta seção vamos definir os números híbridos de Mersenne e alguns resultados obtidos a partir dessa definição.

Definição 2 O número híbrido de Mersenne, denominado por HM_n é definido como:

$$HM_n = M_n + M_{n+1}i + M_{n+2}\varepsilon + M_{n+3}h.$$

Com as seguintes condições iniciais: $HM_0 = i + 3\varepsilon + 7h$ e $HM_1 = 1 + 3i + 7\varepsilon + 15h$.

Baseado no mesmo princípio que Cerda-Morales (2018) utiliza para apresentar proposições em torno os números híbridos de Fibonacci, pode-se obter a proposição a seguir.

Proposição 1 O número híbrido de Mersenne $HM_n, n \in \mathbb{N}$, satisfaz $HM_{n+2} = 3HM_{n+1} - 2HM_n$.

Demonstração

$$\begin{aligned} 3HM_{n+1} - 2HM_n &= 3(M_{n+1} + M_{n+2}i + M_{n+3}\varepsilon + M_{n+4}h) - 2(M_n + M_{n+1}i + M_{n+2}\varepsilon + M_{n+3}h) \\ &= (3M_{n+1} - 2M_n) + (3M_{n+2} - 2M_{n+1})i + (3M_{n+3} - 2M_{n+2})\varepsilon \\ &\quad + (3M_{n+4} - 2M_{n+3})h \\ &= M_{n+2} + M_{n+3}i + M_{n+4}\varepsilon + M_{n+5}h \\ &= HM_{n+2} \end{aligned}$$

□

Podemos obter algumas informações sobre os números híbridos de Mersenne. De acordo com as relações de recorrência, $HM_{n+2} = 3HM_{n+1} - 2HM_n$, podemos agora apresentar sua equação característica, obtendo $\frac{HM_{n+2}}{HM_{n+1}} = 3 - 2\frac{HM_n}{HM_{n+1}}$. Logo, $\frac{HM_{n+2}}{HM_{n+1}} = 3 - 2\frac{1}{\frac{HM_{n+1}}{HM_n}}$. Supondo que o

limite proposto existe e que seja igual a t , fazendo o n tender nesta última expressão e notando que necessariamente $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{HM_{n+2}}{HM_{n+1}} = t$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{HM_{n+1}}{HM_n} = t$, verifica-se assim que: $t = 3 - 2\frac{1}{t}$

ou ainda, $t^2 - 3t + 2 = 0$ determinando assim a equação característica de um número híbrido de Mersenne, onde é uma equação de segundo grau possuindo duas raízes reais $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

Baseado no que já foi apresentado anteriormente temos que o caráter do número híbrido de Mersenne é dada como $C(HM_n) = M_n^2 + (M_{n+1} - M_{n+2})^2 - M_{n+2}^2 - M_{n+3}^2$ e ainda podemos apresentar a norma de um número híbrido de Mersenne.

O resultado a seguir é obtido de forma semelhante aos números híbridos de Jacobsthal apresentado por Szynal- Liana e Wloch (2019).

Proposição 2 A norma de um número híbrido de Mersenne, $n \in \mathbb{N}$, é dado por:

$$\|HM_n\|^2 = |M_n^2 - 3M_{n+1}^2 + 10M_{n+1}M_{n+2} - 9M_{n+2}^2|.$$

Demonstração

$$\begin{aligned}\|HM_n\| &= \sqrt{|C(HM_n)|} \\ \|HM_n\|^2 &= |M_n^2 + M_{n+1}^2 - 2M_{n+1}M_{n+2} - M_{n+3}^2| \\ &= |M_n^2 + M_{n+1}^2 - 2M_{n+1}M_{n+2} - 9M_{n+2}^2 + 12M_{n+1}M_{n+2} - 4M_{n+1}^2| \\ &= |M_n^2 - 3M_{n+1}^2 + 10M_{n+1}M_{n+2} - 9M_{n+2}^2|\end{aligned}$$

□

Além disso, Catarino (2019) apresenta a forma matricial dos números híbridos dos k -Pell. Com isso, pode-se apresentar a forma matricial dos números híbridos de Mersenne, a partir de uma matriz 2×2 , onde há uma bijeção entre o conjunto de todas as matrizes.

Proposição 3 Uma matriz do número híbrido de Mersenne, com $n \in \mathbb{N}$, é dada por:

$$\varphi_{HM_n} = \begin{bmatrix} M_n + M_{n+2} & -M_{n+1} + 2M_{n+2} \\ 4M_{n+2} - 3M_{n+1} & M_n - M_{n+2} \end{bmatrix}$$

Demonstração

Özdemir (2018) define a forma da matricial de um número híbrido como:

$$\varphi_z = \begin{bmatrix} a + c & b - c + d \\ c - b + d & a - c \end{bmatrix}$$

Fazendo as devidas substituições, temos:

$$\begin{aligned}\varphi_{HM_n} &= \begin{bmatrix} M_n + M_{n+2} & M_{n+1} - M_{n+2} + M_{n+3} \\ M_{n+2} - M_{n+1} + M_{n+3} & M_n - M_{n+2} \end{bmatrix} \\ \varphi_{HM_n} &= \begin{bmatrix} M_n + M_{n+2} & M_{n+1} - M_{n+2} + 3M_{n+2} - 2M_{n+1} \\ M_{n+2} - M_{n+1} + 3M_{n+2} - 2M_{n+1} & M_n - M_{n+2} \end{bmatrix} \\ \varphi_{HM_n} &= \begin{bmatrix} M_n + M_{n+2} & -M_{n+1} + 2M_{n+2} \\ 4M_{n+2} - 3M_{n+1} & M_n - M_{n+2} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

□

E ainda, temos a seguinte proposição que relaciona o determinante de uma matriz com a sua norma.

Proposição 4 Se φ_{HM_n} corresponde a matriz híbrida do número híbrido de Mersenne, HM_n , então $\|HM_n\|^2 = \det(\varphi_{HM_n})$ (CATARINO, 2019).

Demonstração

$$\begin{aligned} \det(\varphi_{HM_n}) &= \det \begin{bmatrix} M_n + M_{n+2} & -M_{n+1} + 2M_{n+2} \\ 4M_{n+2} - 3M_{n+1} & M_n - M_{n+2} \end{bmatrix} \\ &= |M_n^2 - M_{n+2}^2 + 4M_{n+1}M_{n+2} - 3M_{n+1}^2 - 8M_{n+2}^2 + 6M_{n+1}M_{n+2}| \\ &= |M_n^2 - M_{n+2}^2 + 10M_{n+1}M_{n+2} - 3M_{n+1}^2 - 8M_{n+2}^2| \\ &= |M_n^2 - 3M_{n+1}^2 + 10M_{n+1}M_{n+2} - 9M_{n+2}^2| \\ &= \|HM_n\|^2 \end{aligned}$$

□

A seguir, daremos a função geradora de HM_n , sua fórmula de Binet e algumas identidades encontradas que envolve os números híbridos de Mersenne. Os resultados apresentados a seguir serão adotados a partir dos trabalhos de Catarino (2019), Cerda-Morales (2018) e Szynal-Liana e Wloch (2018), na qual, foi realizado o mesmo procedimento para sequências diferentes.

Teorema 1 A função geradora do número híbrido generalizado de Mersenne, denotado por $G_{HM_n}(t)$, é:

$$G_{HM_n}(t) = \frac{HM_0 + (HM_1 - 3HM_0)t}{(1 - 3t + 2t^2)}$$

Demonstração

Para definir a função geradora do número híbrido de Mersenne, denotado por $G(HM_n)(t)$, vamos escrever uma sequência em que cada termo corresponde aos coeficientes.

$$G_{HM_n}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} HM_n t^n = HM_0 + HM_1 t + HM_2 t^2 + \dots + HM_n t^n + \dots$$

Fazendo manipulações algébricas devido a relação de recorrência podemos escrever essa sequência como:

$$\begin{aligned} G_{HM_n}(t) &= HM_0 + HM_1 t + HM_2 t^2 + \dots + HM_n t^n + \dots \\ -3t.G_{HM_n}(t) &= -3HM_0 t - 3HM_1 t^2 - 3HM_2 t^3 - \dots - 3HM_n t^{n+1} - \dots \\ 2t^2 G_{HM_n}(t) &= 2HM_0 t^2 + 2HM_1 t^3 + 2HM_2 t^4 + \dots + 2HM_n t^{n+2} + \dots \end{aligned}$$

Somando cada membro, temos:

$$\begin{aligned} (1 - 3t + 2t^2)G_{HM_n}(t) &= HM_0 + (HM_1 - 3HM_0)t + (HM_2 - 3HM_1 + 2HM_0)t^2 \\ &\quad + (HM_3 - 3HM_2 + 2HM_1)t^3 + \dots + (HM_n - 3HM_{n-1} + 2HM_{n-2})t^n \\ &= HM_0 + (HM_1 - 3HM_0)t + 0t^2 + 0t^3 + \dots + 0t^n \\ G_{HM_n}(t) &= \frac{HM_0 + (HM_1 - 3HM_0)t}{(1 - 3t + 2t^2)} \end{aligned}$$

□

Assim, temos a função geradora para as sequências híbridas de Mersenne.

Agora iremos explorar a existência de uma fórmula explícita para o cálculo do n -ésimo termo da sequência, sem depender da recorrência utilizando a fórmula de Binet, onde é necessário utilizar as raízes da equação característica desta sequência. A fórmula de Binet foi descoberto por Abraham de Moivre (1667-1764), porém tal investigação matemática homenageou Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856), sendo então chamada de Fórmula de Binet.

Teorema 2 Para $n \geq 0$ temos que a fórmula de Binet para o número híbrido de Mersenne é dado como:

$$HM_n = (-HM_0 + HM_1)\alpha^n + (2HM_0 - HM_1)\beta^n$$

onde α e β são as raízes da equação característica da sequência.

Demonstração

Tem-se que a fórmula de Binet pode ser representado da seguinte maneira:

$$HM_n = A\alpha^n + B\beta^n$$

Para $n = 0$, tem-se: $A + B = HM_0$ e, para $n = 1$, temos $A\alpha + B\beta = HM_1$.

Podemos construir um sistema de equações lineares da seguinte forma:

$$\begin{cases} A + B = HM_0 \\ 2A + B = HM_1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, temos que os coeficientes encontrados foram: $A = -HM_0 + HM_1$ e $B = 2HM_0 - HM_1$

Fazendo as devidas substituições na fórmula de Binet, temos:

$$HM_n = (-HM_0 + HM_1)\alpha^n + (2HM_0 - HM_1)\beta^n$$

□

A partir da fórmula de Binet podemos encontrar interessantes identidades: Catalan, Cassini e a d'Ocagne. Assim, apresentaremos a seguir, a dedução dessas identidades vinculadas ao modelo híbrido de Mersenne.

Podemos reescrever a fórmula de Binet para $HM_n = p\alpha^n + q\beta^n$, onde $p = (-HM_0 + HM_1)$ e $q = (2HM_0 - HM_1)$.

Proposição 5 (Identidade de Catalan) Para os números naturais n e k , com $n \geq k$, se HM_n é o n -ésimo número híbrido de Mersenne, então temos a seguinte identidade:

$$HM_{n-k}HM_{n+k} - HM_n^2 = (-1)^{n-k} [HM_k^2 + \alpha^{2k}(-p^2 - pq^2) + \beta^{2k}(-q^2 - pq)]$$

Demonstração

$$\begin{aligned} HM_{n-k}HM_{n+k} - HM_n^2 &= p^2\alpha^{2n} + pq\alpha^{n-k}\beta^{n+k} + pq\alpha^{n+k}\beta^{n-k} + q^2\beta^{2n} - p^2\alpha^{2n} - 2pq\alpha^n\beta^n - q^2\beta^{2n} \\ &= pq\alpha^{n-k}\beta^{n+k} - 2pq\alpha^n\beta^n + pq\alpha^{n+k}\beta^{n-k} \\ &= (-1)^{n-k}(-pq\alpha^{2k} + 2pq\alpha^k\beta^k - pq\beta^{2k}) \\ &= (-1)^{n-k}[(p^2\alpha^{2k} + 2pq\alpha^k\beta^k + q^2\beta^{2k}) + (-pq\alpha^{2k} - pq\beta^{2k} - p^2\alpha^{2k} - q^2\beta^{2k})] \\ &= (-1)^{n-k}[HM_k^2 + \alpha^{2k}(-p^2 - pq) + \beta^{2k}(-q^2 - pq)] \end{aligned}$$

□

A identidade de Cassini é um caso particular da identidade de Catalan, quando $k = 1$ obtemos o seguinte resultado.

Proposição 6 (*Identidade de Cassini*) Para os números naturais n , se HM_n é o n -ésimo número híbrido de Mersenne, então temos a seguinte identidade:

$$HM_{n-1}HM_{n+1} - HM_n^2 = (-1)^{n-1} [HM_1^2 + \alpha^2(-p^2 - pq^2) + \beta^2(-q^2 - pq)]$$

Demonstração

$$\begin{aligned} HM_{n-1}HM_{n+1} - HM_n^2 &= p^2\alpha^{2n} + pq\alpha^{n-1}\beta^{n+1} + pq\alpha^{n+1}\beta^{n-1} + q^2\beta^{2n} - p^2\alpha^{2n} - 2pq\alpha^n\beta^n - q^2\beta^{2n} \\ &= pq\alpha^{n-1}\beta^{n+1} - 2pq\alpha^n\beta^n + pq\alpha^{n+1}\beta^{n-1} \\ &= (-1)^{n-1}(-pq\alpha^2 + 2pq\alpha\beta - pq\beta^2) \\ &= (-1)^{n-1}[(p^2\alpha^2 + 2pq\alpha\beta + q^2\beta^2) + (-pq\alpha^2 - pq\beta^2 - p^2\alpha^2 - q^2\beta^2)] \\ &= (-1)^{n-1}[HM_1^2 + \alpha^2(-p^2 - pq) + \beta^2(-q^2 - pq)] \end{aligned}$$

□

Proposição 7 (*Identidade de d'Ocagne*) Suponha que n seja um número inteiro não negativo e m um número natural. Se HM_n , é o n -ésimo número híbrido de Mersenne, a expressão da identidade de d'Ocagne é dada por:

$$HM_mHM_{n+1} - HM_{m+1}HM_n = (-1)^{n-1} [HM_1^2 + \alpha^2(-p^2 - pq^2) + \beta^2(-q^2 - pq)]$$

Demonstração

Esta identidade é uma generalização da identidade de Cassini, fazendo $m = n - 1$, temos a seguinte identidade: $HM_{n-1}HM_{n+1} - HM_n^2$ onde podemos encontrar a demonstração na proposição anterior.

□

4 Híbridos de Mersenne para índices negativos

Observe que ao partir da relação de recorrência podemos facilmente encontrar a relação de recorrência para os termos anteriores.

$$\begin{aligned} HM_{n+2} &= 3HM_{n+1} - 2HM_n \\ HM_{n+2} - 3HM_{n+1} &= -2HM_n \\ 3HM_{n+1} - HM_{n+2} &= 2HM_n \\ HM_n &= \frac{3HM_{n+1} - HM_{n+2}}{2} \end{aligned}$$

Portanto, atribuindo valores para n , temos:

$$\begin{aligned} n &= 0 \therefore \frac{1}{2}(3HM_1 - HM_2) = \frac{1}{2}(2i + 6\varepsilon + 14h) = i + 3\varepsilon + 7h = HM_0 \\ n &= -1 \therefore \frac{1}{2}(3HM_0 - HM_1) = \frac{1}{2}(-1 + 2\varepsilon + 6h) = -\frac{1}{2} + \varepsilon + 3h = HM_{-1} \\ n &= -2 \therefore \frac{1}{2}(3HM_{-1} - HM_0) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2} - i + 2h\right) = -\frac{3}{4} - \frac{i}{2} + h = HM_{-2} \\ n &= -3 \therefore \frac{1}{2}(3HM_{-2} - HM_{-1}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{7}{4} - \frac{3i}{2} - \varepsilon\right) = -\frac{7}{8} - \frac{3i}{4} - \frac{\varepsilon}{2} = HM_{-3} \end{aligned}$$

Notemos que a partir da dinâmica caracterizada podemos discutir a possibilidade de estendermos os números híbridos de Mersenne a índices negativos. Vale salientar que, esse processo ainda não foi realizado por outros autores no âmbito matemático.

Teorema 3 Para os índices negativos dos números híbridos de Mersenne, tem-se que a fórmula de Binet é dada como:

$$H_{-n} = (4HM_{-1} - 4HM_{-2})\alpha^{-n} + (2HM_{-2} - HM_{-1})\beta^{-n}$$

Demonstração

Tem-se que a fórmula de Binet pode ser representado da seguinte maneira:

$$HM_{-n} = A\alpha^{-n} + B\beta^{-n}$$

Para $n = 1$, tem-se: $A\alpha^{-1} + B\beta^{-1} = HM_{-1}$ e, para $n = 2$, temos $A\alpha^{-2} + B\beta^{-2} = HM_{-2}$, onde $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.

Podemos construir um sistema de equações lineares da seguinte forma:

$$\begin{cases} A\alpha^{-1} + B\beta^{-1} = HM_{-1} \\ A\alpha^{-2} + B\beta^{-2} = HM_{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}A + B = HM_{-1} \\ \frac{1}{4}A + B = HM_{-2} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, temos que os coeficientes encontrados foram:

$$A = 4HM_{-1} - 4HM_{-2} \text{ e } B = 2HM_{-2} - HM_{-1}$$

Fazendo as devidas substituições na fórmula de Binet para os índices negativos dos números híbridos de Mersenne, temos:

$$HM_{-n} = (4HM_{-1} - 4HM_{-2})\alpha^{-n} + (2HM_{-2} - HM_{-1})\beta^{-n}$$

□

5 Conclusão

A partir do trabalho realizado por Catarino (2019) onde ela faz a hibridização dos números k -Pell, neste trabalho foi apresentado uma extensão da hibridização de uma outra sequência, a sequência de Mersenne, onde foi introduzido uma nova definição: os Números Híbridos de Mersenne e propriedades referentes aos mesmos, a relação de recorrência da sequência híbrida de Mersenne, sua função geradora, sua fórmula de Binet, sua representação matricial, sua extensão para os índices negativos e identidades bastante conhecidas na matemática. Essas novas propriedades foram descobertas a partir do que já se é conhecido da sequência de Mersenne, trabalhado juntamente com a definição e propriedades dos Números Híbridos, que até então não foi produzido muita coisa referente aos conteúdos apresentado, e para chegar aos resultados obtidos foi utilizado provas matemáticas e raciocínio lógico. A partir desse trabalho sobre os Números Híbridos de Mersenne, pode-se aprofundar nesse estudo em trabalhos futuros e encontrar novas definições e propriedades referente a eles.

6 Agradecimentos

A parte de desenvolvimento da pesquisa no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES.

A parte de desenvolvimento da pesquisa em Portugal é financiado por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia. I. P, no âmbito o projeto UID/CED/00194/2020.

7 Referências Bibliográficas

ALVES, F. R. V. Fórmula de De Moivre, ou de Binet ou de Lamé: demonstrações e generalidades sobre a sequência generalizada de Fibonacci–SGF. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 17, n. 33, p. 1-16, 2017.

ALVES, F.; CATARINO, P. The Bivariate (complex) Fibonacci and Lucas polynomials: an historical investigation with the Maple's Help. **Acta Didactica Napocensia**, v. 9, n. 4, p. 71-95, 2016.

ALVES, F.; CATARINO, P.; MANGUEIRA, M. Discovering theorems about the gaussian Mersenne sequence with the maple's help. **Annals. Computer Science Series**, v. 17, n. 2, 2019.

CARVALHO, C. F. **Números híbridos e sua visualização no geogebra**. 2019. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Centro de Ciência e Tecnologia, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2019.

CATARINO, P.; CAMPOS, H.; VASCO, P. On the Mersenne sequence. **Annales Mathematicae et Informaticae**, v. 46, p. 37-53, 2016.

CATARINO, P. On k -pell hybrid numbers. **Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography**, v.22, n.1, p. 83-89, 2019.

CERDA-MORALES, G. Investigation of generalized hybrid fibonacci numbers and their properties. **arXiv:1806.02231v1 [math.RA]**, 2018, Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1806.02231.pdf>. Acesso em: 03 mar. 2020.

ÖZDEMİR, M. Introduction to hybrid numbers. **Advances in Applied Clifford Algebras**, v. 28, n. 1, art. 11, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00006-018-0833-3>. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00006-018-0833-3>. Acesso em: 03 mar. 2020

SZYNAL-LIANA, A. The Horadam hybrid numbers. **Discussiones Mathematicae-General Algebra and Applications, Sciendo**, v. 38, n. 1, p. 91-98, 2018.

SZYNAL-LIANA, A.; WŁOCH, I. **On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Hybrid Numbers**. In: *Annales Mathematicae Silesianae*, v. 33, n. 1, p. 276-283, 2019. Disponível em: <https://content.sciendo.com/view/journals/amsil/33/1/article-p276.xml>. Acesso em: 03 mar. 2020.

ERRATA

Página 3 – na definição dos números híbridos e – no terceiro parágrafo	
Onde se lê:	$ih=-hi=e+1$
Leia-se:	$ih=-hi=e+i$

Página 3 – no quarto parágrafo	
Onde se lê:	onde a raiz desse número real será a norma do número híbrido z , assim temos que: $\ z\ =\sqrt{C(z)}$
Leia-se:	onde a raiz desse número real será a norma do número híbrido z , assim temos que: $\ z\ =\sqrt{ C(z) }$

18/1/2021