Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 18, jul. 2020
Iniciação Científica

Relações recorrentes bidimensionais e tridimensionais de Narayana

Two-dimensional and three-dimensional recurring relations of Narayana The

Francisco Hedyleno Coelho Bezerra
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE
hedyleno@gmail.com

Francisco Régis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE
fregis@ifce.edu.br

Renata Passos Machado Vieira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE
re.passosm@gmail.com

Resumo

A sequência de Narayana tem sua gênese no problema sobre a reprodução de vacas, proposto pelo matemático indiano Narayana Pandita (1340-1400). Este trabalho aborda uma discussão inerente às relações recorrentes bidimensionais e tridimensionais definidas a partir do modelo recursivo unidimensional de Narayana definido por: $N_{n+1} = N_n + N_{n-2}$,com $n \geq 2$ e $N_0 = 0, N_1 = N_2 = 1$ sendo seus termos iniciais, e propostas no âmbito de pesquisas sobre o processo de complexificação da sequência de Narayana caracterizado pela inserção da unidade imaginária, do aumento dimensional e da correspondente representação algébrica. À visto disso, pretende-se descrever propriedades matemáticas dos números de Narayana $N(n,m)$ com $n,m \geq 0$ e $N(n,m,p)$ com $n,m,p \geq 0$ na forma complexa.

Palavras-chave: Sequência de Narayana. Relações bidimensionais. Relações tridimensionais.

Abstract

The Narayana sequence has its genesis in the problem of reproduction cows, proposed by the Indian mathematician Narayana Pandita (1340-1400). This paper discusses a discussion inherent to the two-dimensional and three-dimensional recurring relations defined from the one-dimensional recursive model of Narayana defined by: $N_{n+1} = N_n + N_{n-2}$, with $n \geq 2$ e $N_0 = 0, N_1 = N_2 = 1$ As its initial terms, and proposals in the context of research on the complexification process of Narayana's sequence is characterized by the insertion of the imaginary unit, the dimensional increase and the corresponding algebraic representation. In view of this, we intend to describe mathematical properties of the Narayana numbers $N(n,m)$ with $n,m \geq 0$ and $N(n,m,p)$ with $n,m,p \geq 0$ in complex form.

Keywords: Narayana sequence. Two-dimensional relations. Three-dimensional relations

Artigo recebido em out. 2019 e aceito em abr. 2020.

1 Introdução

A sequência de Narayana é uma sequência linear e recorrente de 3ª ordem definida pela recorrência $N_{n+1} = N_n + N_{n-2}$, com $n \geq 2$ e $N_0 = 0, N_1 = N_2 = 1$ seus termos iniciais. Esta sequência recebeu esse nome em função do matemático indiano chamado Narayana Pandita (1340-1400) que propôs o seguinte problema relacionado à reprodução de vacas: Uma vaca dá à luz a um bezerro todos os anos. Por sua vez, o bezerro dá à luz a outro bezerro quando tem três anos de idade. Qual o número de bezerros produzidos por uma vaca durante 20 anos?

O processo de complexificação da sequência de Narayana está relacionado ao acréscimo da unidade imaginária, ao aumento dimensional e a sua correspondente representação algébrica. Dessa forma, neste trabalho, serão discutidos aspectos referentes às relações recorrentes e propriedades matemáticas bidimensionais e tridimensionais definidas a partir do modelo recursivo unidimensional de Narayana tendo como base os trabalhos de Oliveira (2018) e Oliveira, Alves e Paiva (2017), onde os autores abordam uma discussão inerente as relações recorrentes bidimensionais e tridimensionais da sequência de Fibonacci.

Destacamos também o trabalho de Ramírez e Sirven (2015), onde os autores propõem uma generalização da sequência de Narayana e exploram algumas propriedades matriciais, e ainda o trabalho de Cerda-Morales (2018), onde são exploradas algumas identidades generalizadas da sequência de Narayana. No entanto, não se encontram trabalhos voltados para o processo de complexificação da sequência de Narayana, que é o foco deste trabalho.

A partir disso, apresentaremos a exploração de propriedades bidimensionais, com duas variáveis m e n com $n, m \geq 0$ para os números $N(n,m)$, derivadas das relações recorrentes: $N(n+1,m) = N(n,m) + N(n-2,m)$ e $N(n,m+1) = N(n,m) + N(n,m-2)$, com os seguintes valores iniciais definidos como $N(0,0) = 0$, $N(1,0) = 1$, $N(2,0) = 1$, $N(0,1) = i$, $N(0,2) = i$, $N(1,1) = 1+i$, $N(1,2) = 1+i$, $N(2,1) = 1+i$, $N(2,2) = 1+i$. Assim como para as propriedades para os números $N(n,m,p)$ com $n,m,p \geq 0$ referente às relações de recorrência tridimensional: $N(n+1,m,p) = N(n,m,p) + N(n-2,m,p)$, $N(n,m+1,p) = N(n,m,p) + N(n,m-2,p)$ e $N(n,m,p+1) = N(n,m,p) + N(n,m,p-2)$, com as condições iniciais definidas $N(0,0,0) = 0$, $N(1,0,0) = 1$, $N(2,0,0) = 1$, $N(0,1,0) = i$, $N(0,2,0) = i$, $N(0,0,1) = j$, $N(0,0,2) = j$, $N(1,1,0) = 1+i$, $N(2,1,0) = 1+i$, $N(1,0,1) = 1+j$, $N(2,0,1) = 1+j$, $N(1,1,1) = 1+i+j$. $N(1,2,1) = 1+i+j$, com $i^2 = -1$.

2 Relações recorrentes bidimensionais de Narayana

Nesta seção, será introduzida uma nova notação para a relação bidimensional da sequência de Narayana. Serão definidas duas relações de recorrências, baseadas na recorrência unidimensional, levando em consideração os estudos de Horadam (1993) e Harman (1981).

Definição 1. Os números na forma $N(n,m)$ são definidos como a sequência Bidimensional de Narayana, satisfazendo as seguintes relações de recorrência:

$$\begin{cases} N(n+1,m) = N(n,m) + N(n-2,m) \\ N(n,m+1) = N(n,m) + N(n,m-2) \end{cases}$$

Com as condições iniciais: $N(0,0) = 0$, $N(1,0) = 1$, $N(2,0) = 1$, $N(0,1) = i$, $N(0,2) = i$, $N(1,1) = 1+i$, $N(1,2) = 1+i$, $N(2,1) = 1+i$, $N(2,2) = 1+i$. Onde $i^2 = -1$. Doravante, são identificados e discutidos alguns lemas e um teorema referentes à definição 1.

Assim, considere a sequência de Narayana $N_{n+1} = N_n + N_{n-2}$, com $n \geq 2$ e $N_0 = 0$, $N_1 = N_2 = 1$ seus termos iniciais, logo:

Lema 1. Para qualquer inteiro $n, m \geq 0$, temos que $N(n,0) = N_n$.

Demonstração. Através da recorrência $N(n+1,m) = N(n,m) + N(n-2,m)$ e com os valores iniciais $N(0,0) = 0 = N_0$, $N(1,0) = 1 = N_1$, $N(2,0) = 1 = N_2$ pode-se aplicar o segundo princípio de indução sobre n, onde fixa-se o valor de m=0. Supondo que para $n = 2,3,...,k-1$, vale, respectivamente:

$$N(3,0) = N(2,0) + N(0,0) = 1 = N_3$$
$$N(4,0) = N(3,0) + N(1,0) = 2 = N_4$$
$$N(5,0) = N(4,0) + N(2,0) = 3 = N_5$$
$$\vdots = \vdots$$
$$N(k-2,0) = N_{k-2}$$
$$N(k-1,0) = N_{k-1},$$
$$N(k,0) = N(k-1,0) + N(k-3,0) = N_{k-1} + N_{k-3} = N_k$$

Assim, para n=k temos:

$$N(k+1,0) = N(k,0) + N(k-2,0) = N_k + N_{k-2} = N_{k+1}$$

Lema 2. Para qualquer inteiro $n, m \geq 0$, temos que: $N(0,m) = N_0(N_m + N_{m-2}) + (N_0 + N_{-2}).N_m.i = N_m i$

Demonstração. Através da recorrência $N(n,m+1) = N(n,m) + N(n,m-2)$ e com os valores iniciais definidos anteriormente como: $N(0,0) = 0$, $N(0,1) = i$, $N(0,2) = i$, pode-se aplicar o segundo princípio de indução sobre m, onde fixa $n = 0$. Supondo que para $m = 2,3,...,k-1$ vale respectivamente:

$$N(0,3) = N(0,2) + N(0,0) = i = N_3.i$$
$$N(0,4) = N(0,3) + N(0,1) = 2i = N_4.i$$
$$N(0,5) = N(0,4) + N(0,2) = 3i = N_5.i$$
$$N(0,6) = N(0,5) + N(0,3) = 4i = N_6.i$$
$$\vdots = \vdots$$
$$N(0,k-2) = N_{k-2}.i$$
$$N(0,k-1) = N_{k-1}.i$$
$$N(0,k) = N(0,k-1) + N(0,k-3) = N_{k-1}.i + N_{k-3}.i = (N_{k-1} + N_{k-3}).i = N_k.i$$

Assim, para n=k temos:

$$N(0,k+1) = N(0,k) + N(0,k-2) = N_k.i + N_{k-2}.i = (N_k + N_{k-2})i = N_{k+1}.i$$

Porém, visando obtermos a sua forma generalizada, calculando os termos $N_0 = 0$ e $N_{-2} = 1$ a partir da recorrência $N_{n+1} = N_n + N_{n-2}$, temos que:

$$N(0,k+1)=N_0(N_{k+1}+N_{k-1})+(N_0+N_{-2}).N_{k+1}.i$$

Lema 3. Para qualquer inteiro $n,m\geq 0$, temos que: $N(n,1)=N_n+(N_n+N_{n-2}).i$

Demonstração. De modo análogo, pode-se fixar o valor de $m=1$ e variar o valor de $n=2,3,...,k-1$ com os valores iniciais $N(0,1)=i$, $N(1,1)=1+i$ e $N(2,1)=1+i$, utilizando a recorrência $N(n+1,m)=N(n,m)+N(n-2,m)$, tem-se que:

$$N(3,1)=N(2,1)+N(0,1)=1+2i=N_3+(N_3+N_1).i$$

$$N(4,1)=N(3,1)+N(1,1)=2+3i=N_4+(N_4+N_2).i$$

$$N(5,1)=N(4,1)+N(2,1)=3+4i=N_5+(N_5+N_3).i$$

$$\vdots=\vdots$$

$$N(k-2,1)=N_{k-2}+(N_{k-2}+N_{k-4}).i$$

$$N(k-1,1)=N_{k-1}+(N_{k-1}+N_{k-3})\cdot i$$

$$N(k,1)=N_k+(N_k+N_{k-2})\cdot i$$

Assim, para n=k temos:

$$\begin{aligned}N(k+1,1)&=N(k,1)+N(k-2,1)\\&=N_k+(N_k+N_{k-2}).i+N_{k-2}+(N_{k-2}+N_{k-4}).i\\&=N_{k+1}+(N_{k+1}+N_{k-1}).i\end{aligned}$$

Lema 4. Para qualquer inteiro $n,m\geq 0$, temos que: $N(1,m)=(N_m+N_{m-2})+N_m.i$

Demonstração. Para realizar essa demonstração será aplicado o mesmo princípio indutivo, além de fixar o valor de $n=1$ e variar o valor de $m=2,3,...,k-1$, utilizando a recorrência $N(n,m+1)=N(n,m)+N(n,m-2)$ e os seguintes valores iniciais $N(1,0)=1$, $N(1,1)=1+i$, $N(1,2)=1+i$, obtendo:

$$N(1,3)=N(1,2)+N(1,0)=2+i=(N_3+N_1)+N_3i$$

$$N(1,4)=N(1,3)+N(1,1)=3+2i=(N_4+N_2)+N_4i$$

$$N(1,5)=N(1,4)+N(1,2)=4+3i=(N_5+N_3)+N_5i$$

$$N(1,6)=N(1,5)+N(1,3)=6+4i=(N_6+N_4)+N_6i$$

$$\vdots=\vdots$$

$$N(1,k-2)=(N_{k-2}+N_{k-4})+N_{k-2}.i$$

$$N(1,k-1)=(N_{k-1}+N_{k-3})+N_{k-1}.i$$

$$N(1,k)=(N_k+N_{k-2})+N_k.i$$

Assim, para n=k temos:

$$\begin{aligned} N(1,k+1) &= N(1,k)+N(1,k-2) \\ &= (N_k+N_{k-2})+N_k.i+(N_{k-2}+N_{k-4})+N_{k-2}.i \\ &= (N_{k+1}+N_{k-1})+N_{k+1}.i \end{aligned}$$

Ademais, com o viés de obter a sua forma generalizada, foi realizado o cálculo dos termos $N_1=1$ e $N_{-1}=0$ a partir da recorrência $N_{n+1}=N_n+N_{n-2}$. Logo:

$$N(1,k+1)=N_1(N_{k+1}+N_{k-1})+(N_1+N_{-1}).N_{k+1}.i$$

Teorema 1. Para os inteiros, $n,m\in \mathbb{N}$, os números bidimensionais de Narayana são descritos por:

$$N(n,m)=N_n(N_m+N_{m-2})+(N_n+N_{n-2})N_m.i$$

Demonstração. Fixando o valor do número natural n, pode-se realizar a demonstração através de indução sobre m. Assim, fixando o valor de $n=0$ e considerando os valores iniciais $N(0,0)=0$, $N(0,1)=i$, $N(0,2)=i$ e variando o $m=2,3,...,k-1$ foi verificado o lema 2. De forma análoga fixando o valor de $n=1$ e considerando os valores iniciais $N(1,0)=1$, $N(1,1)=1+i$, $N(1,2)=1+i$ e variando o valor de $m=2,3,...,k-1$ foi verificado o lema 4.

Logo, fixando o $n=2$ e variando o $m=2,3,...,k-1$, obtêm-se:

$$N(2,0)=1$$
$$N(2,1)=1+i$$
$$N(2,2)=1+i$$
$$N(2,3)=N(2,2)+N(2,0)=2+i=N_2(N_3+N_1)+(N_2+N_0).N_3.i$$
$$N(2,4)=N(2,3)+N(2,1)=3+2i=N_2(N_4+N_2)+(N_2+N_0).N_4.i$$
$$N(2,5)=N(2,4)+N(2,2)=4+3i=N_2(N_5+N_3)+(N_2+N_0).N_5.i$$

$$\vdots = \vdots$$

$$N(2,k-2)=N_2(N_{k-2}+N_{k-4})+(N_2+N_0)N_{k-2}.i$$
$$N(2,k-1)=N_2(N_{k-1}+N_{k-3})+(N_2+N_0)N_{k-1}.i$$
$$N(2,k)=N_2(N_k+N_{k-2})+(N_2+N_0)N_k.i$$
$$\begin{aligned} N(2,k+1) &= N(2,k)+N(2,k-2) \\ &= N_2(N_k+N_{k-2})+(N_2+N_0)N_k.i+N_2(N_{k-2}+N_{k-4})+(N_2+N_0)N_{k-2}.i \end{aligned}$$

$$= N_2(N_{k+1} + N_{k-1}) + (N_2 + N_0)N_{k+1}.i$$

Por fim, fixando o $n = 3$ e variando o m, tem-se:

$$N(3,0) = 1$$
$$N(3,1) = 1 + 2i$$
$$N(3,2) = 1 + 2i$$
$$N(3,3) = N(3,2) + N(3,0) = 2 + 2i = N_3(N_3 + N_1) + (N_3 + N_1).N_3.i$$
$$N(3,4) = N(3,3) + N(3,1) = 3 + 4i = N_3(N_4 + N_2) + (N_3 + N_1).N_4.i$$
$$N(3,5) = N(3,4) + N(3,2) = 4 + 6i = N_3(N_5 + N_3) + (N_3 + N_1).N_5.i$$

$$\vdots = \vdots$$

$$N(3,k-2) = N_3(N_{k-2} + N_{k-4}) + (N_3 + N_1)N_{k-2}.i$$
$$N(3,k-1) = N_3(N_{k-1} + N_{k-3}) + (N_3 + N_1)N_{k-1}.i$$
$$N(3,k) = N_3(N_k + N_{k-2}) + (N_3 + N_1)N_k.i$$
$$\begin{aligned} N(3,k+1) &= N(3,k) + N(3,k-2) \\ &= N_3(N_k + N_{k-2}) + (N_3 + N_1)N_k.i + N_3(N_{k-2} + N_{k-4}) + (N_3 + N_1)N_{k-2}.i \\ &= N_3(N_{k+1} + N_{k-1}) + (N_3 + N_1)N_{k+1}.i \end{aligned}$$

Diante disso, pode-se concluir que para a generalização da relação bidimensional de Narayana, tem-se que:

$$N(0,m) = N_0(N_m + N_{m-2}) + (N_0 + N_{-2}).N_m.i$$
$$N(1,m) = N_1(N_m + N_{m-2}) + (N_1 + N_{-1}).N_m.i$$
$$N(2,m) = N_2(N_m + N_{m-2}) + (N_2 + N_0).N_m.i$$
$$N(3,m) = N_3(N_m + N_{m-2}) + (N_3 + N_1).N_m.i$$

$$\vdots = \vdots$$

$$N(n,m) = N_n(N_m + N_{m-2}) + (N_n + N_{n-2}).N_m.i$$

Continuando a investigação do aumento dimensional da sequência de Narayana na forma complexa, a seguir, será feita uma abordagem tridimensional da relação recorrente de Narayana.

3 Relações recorrentes tridimensionais de Narayana

Os números Complexos de Narayana se estendem a dimensões superiores. A fim de fazer essa verificação, neste tópico, são esboçadas propriedades inerentes à relação recursiva do caso Tridimensional.

Definição 2. Os números na forma $N(n,m,p)$ são definidos como a sequência Tridimensional de Narayana, satisfazendo as seguintes relações de recorrência:

$$\begin{cases} N(n+1,m,p) = N(n,m,p) + N(n-2,m,p) \\ N(n,m+1,p) = N(n,m,p) + N(n,m-2,p) \\ N(n,m,p+1) = N(n,m,p) + N(n,m,p-2) \end{cases}$$

Com as condições iniciais: $N(0,0,0)=0$, $N(1,0,0)=1$, $N(2,0,0)=1$, $N(0,1,0)=i$, $N(0,2,0)=i$, $N(0,0,1)=j$, $N(0,0,2)=j$, $N(1,1,0)=1+i$, $N(2,1,0)=1+i$, $N(1,0,1)=1+j$, $N(2,0,1)=1+j$, $N(1,1,1)=1+i+j$, $N(1,2,1)=1+i+j$. Doravante, são identificados e discutidos alguns lemas e um teorema referentes à definição 2.

Lema 5. Para qualquer valor inteiro $n,m,p\geq 0$, temos que: $N(n,0,0)=N_n$

Demonstração. Através da recorrência $N(n+1,m,p)=N(n,m,p)+N(n-2,m,p)$ e com os valores iniciais $N(0,0,0)=0=N_0$, $N(1,0,0)=1=N_1$, $N(2,0,0)=1=N_2$ pode-se aplicar o segundo princípio de indução , onde fixa o valor de $m=0$, $p=0$ e variar o valor de $n=2,3,...,k-1$, obtendo:

$$N(3,0,0)=N(2,0,0)+N(0,0,0)=1=N_3$$

$$N(4,0,0)=N(3,0,0)+N(1,0,0)=2=N_4$$

$$N(5,0,0)=N(4,0,0)+N(2,0,0)=3=N_5$$

$$N(6,0,0)=N(5,0,0)+N(3,0,0)=4=N_6$$

$$\vdots = \vdots$$

$$N(k-2,0,0)=N_{k-2}$$

$$N(k-1,0,0)=N_{k-1}$$

$$N(k,0,0)=N(k-1,0,0)+N(k-3,0,0)=N_{k-1}+N_{k-3}=N_k$$

Assim, para n=k temos:

$$N(k+1,0,0)=N(k,0,0)+N(k-2,0,0)=N_k+N_{k-2}=N_{k+1}$$

Lema 6. Para qualquer inteiro $n,m,p\geq 0$, temos que: $N(0,m,0)=N_m.i$.

Demonstração. Através da recorrência $N(n,m+1,p)=N(n,m,p)+N(N,m-2,p)$ e com os valores iniciais $N(0,0,0)=0$, $N(0,1,0)=i$ e $N(0,2,0)=i$, pode-se aplicar o segundo princípio de indução, onde fixa o $n=0$, $p=0$ e varia o $m=2,3,...,k-1$,

$$N(0,3,0)=N(0,2,0)+N(0,0,0)=i=N_3.i$$

$$N(0,4,0)=N(0,3,0)+N(0,1,0)=2i=N_4.i$$

$$N(0,5,0)=N(0,4,0)+N(0,2,0)=3i=N_5.i$$

$$N(0,6,0)=N(0,5,0)+N(0,3,0)=4i=N_6.i$$

$$\vdots=\vdots$$

$$N(0,k-2,0)=N_{k-2}.i$$

$$N(0,k-1,0)=N_{k-1}.i$$

$$N(0,k,0)=N(0,k-1,0)+N(0,k-3,0)=N_{k-1}.i+N_{k-3}.i=(N_{k-1}+N_{k-3}).i=N_k.i$$

Assim, para n=k temos:

$$N(0,k+1,0)=N(0,k,0)+N(0,k-2,0)=N_k.i+N_{k-2}.i=(N_k+N_{k-2}).i=N_{k+1}.i$$

Lema 7. Para qualquer inteiro $n,m,p\geq 0$ temos que $N(0,0,p)=N_p.j$

Demonstração. Através da recorrência $N(n,m,p+1)=N(n,m,p)+N(n,m,p-2)$ e com os valores iniciais definidos anteriormente como: $N(0,0,0)=0=N_0$, $N(0,0,1)=j$, $N(0,0,2)=j$, pode-se aplicar o segundo princípio de indução, onde fixa o $n=0$, $m=0$ e varia $p=2,3,...,k-1$,

$$N(0,0,3)=N(0,0,2)+N(0,0,0)=j=N_3.j$$
$$N(0,0,4)=N(0,0,3)+N(0,0,1)=2.j=N_4.j$$
$$N(0,0,5)=N(0,0,4)+N(0,0,2)=3.j=N_5.j$$
$$N(0,0,6)=N(0,0,5)+N(0,0,3)=4.j=N_6.j$$

$$\vdots=\vdots$$

$$N(0,0,k-2)=N_{k-2}.j$$
$$N(0,0,k-1)=N_{k-1}.j$$
$$N(0,0,k)=N(0,0,k-1)+N(0,0,k-3)=N_{k-1}.j+N_{k-3}.j=(N_{k-1}+N_{k-3}).j=N_k.j$$

Assim, para p=k temos:

$$N(0,0,k+1) = N(0,0,k) + N(0,0,k-2) = N_k.j + N_{k-2}.j = (N_k + N_{k-2})j = N_{k+1}.j$$

Lema 8: Para qualquer inteiro $n,m,p \geq 0$, temos que: $N(n,1,0) = N_n + (N_n + N_{n-2}).i$

Demonstração. Através da recorrência $N(n+1,m,p) = N(n,m,p) + N(n-2,m,p)$ e com os valores iniciais definidos anteriormente como $N(0,1,0) = i$, $N(1,1,0) = 1+i$ e $N(2,1,0) = 1+i$, pode-se aplicar o segundo princípio de indução, onde fixa $m=1$, $p=0$ e varia $n = 2,3,...,k-1$

$$N(3,1,0) = N(2,1,0) + N(0,1,0) = 1+2i = N_3 + (N_3 + N_1).i$$
$$N(4,1,0) = N(3,1,0) + N(1,1,0) = 2+3i = N_4 + (N_4 + N_2).i$$
$$N(5,1,0) = N(4,1,0) + N(2,1,0) = 3+4i = N_5 + (N_5 + N_3).i$$

$$\vdots = \vdots$$

$$N(k-2,1,0) = N_{k-2} + (N_{k-2} + N_{k-4}).i$$
$$N(k-1,1,0) = N_{k-1} + (N_{k-1} + N_{k-3}).i$$
$$N(k,1,0) = N(k-1,1,0) + N(k-3,1,0) = N_{k-1} + (N_{k-1} + N_{k-3}).i + N_{k-3} + (N_{k-3} + N_{k-5}).i$$
$$= N_k + (N_k + N_{k-2}).i$$

Assim, para n=k temos:

$$N(k+1,1,0) = N(k,1,0) + N(k-2,1,0)$$
$$= N_k + (N_k + N_{k-2}).i + N_{k-2} + (N_{k-2} + N_{k-4}).i$$
$$= N_{k+1} + (N_{k+1} + N_{k-1}).i$$

Lema 9. Para qualquer inteiro $n,m,p \geq 0$, temos que: $N(n,0,1) = N_n + (N_n + N_{n-2}).j$

Demonstração. Através da recorrência $N(n+1,m,p) = N(n,m,p) + N(n-2,m,p)$ e com os valores iniciais definidos anteriormente como: $N(1,0,1) = 1+j$, $N(2,0,1) = 1+j$ e $N(0,0,1) = j$, pode-se aplicar o segundo princípio de indução, onde fixa $m=0$, $p=1$ e varia $n = 2,3,...,k-1$

$$N(3,0,1) = N(2,0,1) + N(0,0,1) = 1+2j = N_3 + (N_3 + N_1).j$$
$$N(4,0,1) = N(3,0,1) + N(1,0,1) = 2+3i = N_4 + (N_4 + N_2).j$$
$$N(5,0,1) = N(4,0,1) + N(2,0,1) = 3+4j = N_5 + (N_5 + N_3).j$$

$$\vdots = \vdots$$

$$N(k-2,0,1) = N_{k-2} + (N_{k-2} + N_{k-4}).j$$
$$N(k-1,0,1) = N_{k-1} + (N_{k-1} + N_{k-3}).j$$
$$N(k,0,1) = N_k + (N_k + N_{k-2}).j$$

Assim, para n=k temos:

$$\begin{aligned} N(k+1,0,1) &= N(k,0,1)+N(k-2,0,1) \\ &= N_k+(N_k+N_{k-2}).j+N_{k-2}+(N_{k-2}+N_{k-4}).j \\ &= N_{k+1}+(N_{k+1}+N_{k-1}).j \end{aligned}$$

Lema 10. Para qualquer inteiro $n,m,p\geq 0$, temos que: $N(n,1,1)=N_n+(N_n+N_{n-2}).i+(N_n+N_{n-2}).j$

Demonstração. Através da recorrência $N(n+1,m,p)=N(n,m,p)+N(n-2,m,p)$ e com os valores iniciais definidos anteriormente como: $N(0,1,1)=i+j$, $N(1,1,1)=1+i+j$ e $N(2,1,1)=1+i+j$, pode-se aplicar o segundo princípio de indução, onde fixa $m=1$, $p=1$ e varia $n=2,3,...,k-1$,

$$\begin{aligned} &N(3,1,1)=N(2,1,1)+N(0,1,1)=1+2i+2j=N_3+(N_3+N_1).i+(N_3+N_1)j \\ &N(4,1,1)=N(3,1,1)+N(1,1,1)=2+3i+3j=N_4+(N_4+N_2).i+(N_4+N_2)j \\ &N(5,1,1)=N(4,1,1)+N(2,1,1)=3+4i+4j=N_5+(N_5+N_3).i+(N_5+N_3).j \\ &N(k-2,1,1)=N_{k-2}+(N_{k-2}+N_{k-4}).i+(N_{k-2}+N_{k-4}).j \\ &N(k-1,1,1)=N_{k-1}+(N_{k-1}+N_{k-3}).i+(N_{k-1}+N_{k-3}).j \\ &N(k,1,1)=N_k+(N_k+N_{k-2}).i+(N_k+N_{k-2}).j \end{aligned}$$

Assim, para n=k temos:

$$\begin{aligned} &N(k+1,1,1)=N(k,1,1)+N(k-2,1,1) \\ &N_k+(N_k+N_{k-2}).i+(N_k+N_{k-2}).j+N_{k-2}+(N_{k-2}+N_{k-4}).i+(N_{k-2}+N_{k-4}).j \\ &\qquad =N_{k+1}+(N_{k+1}+N_{k-1}).i+(N_{k+1}+N_{k-1}).j \end{aligned}$$

Lema 11. Para qualquer inteiro $n,m,p\geq 0$, temos que: $N(1,m,0)=(N_m+N_{m-2})+N_m.i$

Demonstração. Através da recorrência $N(n,m+1,p)=N(n,m,p)+N(n,m-2,p)$ e com os valores iniciais definidos anteriormente como: $N(1,0,0)=1$, $N(1,1,0)=1+i$ e $N(1,2,0)=1+i$,pode-se aplicar o segundo princípio de indução, onde fixa $n=1$, $p=0$ e varia $m=2,3,...,k-1$

$$\begin{aligned} &N(1,3,0)=N(1,2,0)+N(1,0,0)=2+i=(N_3+N_1)+N_3.i \\ &N(1,4,0)=N(1,3,0)+N(1,1,0)=3+2i=(N_4+N_2)+N_4.i \\ &N(1,5,0)=N(1,4,0)+N1,2,0)=4+3i=(N_5+N_3)+N_5.i \end{aligned}$$

$$\vdots = \vdots$$

$$N(1,k-2,0)=(N_{k-2}+N_{k-4})+N_{k-2}.i$$

$$N(1,k-1,0)=(N_{k-1}+N_{k-3})+N_{k-1}.i$$
$$N(1,k,0)=(N_k+N_{k-2})+N_k.i$$

Assim, para m=k temos:

$$\begin{aligned} N(1,k+1,0) &= N(1,k,0)+N(1,k-2,0) \\ &= (N_k+N_{k-2})+N_k.i+(N_{k-2}+N_{k-4})+N_{k-2}.i \\ &= (N_{k+1}+N_{k-1})+N_{k+1}.i \end{aligned}$$

Lema 12. Para qualquer inteiro $n,m,p\geq 0$, temos que: $N(0,m,1)=N_m.i+(N_m+N_{m-2}).j$

Demonstração. Através da recorrência $N(n,m+1,p)=N(n,m,p)+N(n,m-2,p)$ e com os valores iniciais definidos anteriormente como: $N(0,0,1)=j$, $N(0,1,1)=i+j$ e $N(0,2,1)=i+j$, pode-se aplicar o segundo princípio de indução, onde fixa o $n=0$, $p=1$ e varia o $m=2,3,...,k-1$

$$N(0,3,1)=N(0,2,1)+N(0,0,1)=i+2j=N_3.i+(N_3+N_1).j$$
$$N(0,4,1)=N(0,3,1)+N(0,1,1)=2i+3j=N_4.i+(N_4+N_2).j$$
$$N(0,5,1)=N(0,4,1)+N(0,2,1)=3i+4j=N_5.i+(N_5+N_3).j$$

$$\vdots = \vdots$$

$$N(0,k-2,1)=N_{k-2}.i+(N_{k-2}+N_{k-4}).j$$
$$N(0,k-1,1)=N_{k-1}.i+(N_{k-1}+N_{k-3}).j$$
$$N(0,k,1)=N_k.i+(N_k+N_{k-2}).j$$

Assim, para m=k temos:

$$\begin{aligned} N(0,k+1,1) &= N(0,k,1)+N(0,k-2,1) \\ &= N_k.i+(N_k+N_{k-2}).j+N_{k-2}.i+(N_{k-2}+N_{k-4}).j \\ &= N_{k+1}.i+(N_{k+1}+N_{k-1}).j \end{aligned}$$

Lema 13. Para os inteiros $n,m,p\geq 0$, temos que: $N(1,m,1)=(N_m+N_{m-2})+N_m.i+(N_m+N_{m-2}).j$.

Demonstração. Através da recorrência $N(n,m+1,p)=N(n,m,p)+N(n,m-2,p)$ e com os valores iniciais definidos anteriormente como: $N(1,0,1)=1+j$, $N(1,1,1)=1+i+j$ e $N(1,2,1)=1+i+j$, pode-se aplicar o segundo princípio de indução, onde fixa $n=1$, $p=1$ e varia $m=2,3,...,k-1$

$$N(1,3,1)=N(1,2,1)+N(1,0,1)=2+i+2j=(N_3+N_1)+N_3.i+(N_3+N_1).j$$

$$N(1,4,1)=N(1,3,1)+N(1,1,1)=3+2i+3j=(N_4+N_2)+N_4.i+(N_4+N_2).j$$

$$N(1,5,1)=N(1,4,1)+N(1,2,1)=4+3i+4j=(N_5+N_3)+N_5.i+(N_5+N_3).j$$

$$N(1,k-2,1)=(N_{k-2}+N_{k-4})+N_{k-2}.i+(N_{k-2}+N_{k-4}).j$$

$$N(1,k-1,1)=(N_{k-1}+N_{k-3})+N_{k-1}.i+(N_{k-1}+N_{k-3}).j$$

$$N(1,k,1)=(N_k+N_{k-2})+N_k.i+(N_k+N_{k-2}).j$$

Assim, para m=k temos:

$$\begin{aligned} N(1,k+1,1) &= N(1,k,1)+N(1,k-2,1) \\ &= (N_{k+1}+N_{k-1})+N_{k+1}.i+(N_{k+1}+N_{k-1}).j \end{aligned}$$

Lema 14. Para qualquer inteiro $n,m,p\geq 0$, temos que: $N(1,0,p)=(N_p+N_{p-2})+N_p.j$

Demonstração: Através da recorrência $N(n,m,p+1)=N(n,m,p)+N(n,m,p-2)$ e com os valores iniciais definidos anteriormente como: $N(1,0,0)=1$, $N(1,0,1)=1+j$ e $N(1,0,2)=1+j$, pode-se aplicar o segundo princípio de indução, onde fixa $n=1$, $m=0$ e varia $p=2,3,...,k-1$

$$N(1,0,3)=N(1,0,2)+N(1,0,0)=2+j=(N_3+N_1)+N_3.j$$

$$N(1,0,4)=N(1,0,3)+N(1,0,1)=3+2j=(N_4+N_2)+N_4.j$$

$$N(1,0,5)=N(1,0,3)+N(1,0,1)=4+3j=(N_5+N_3)+N_5.j$$

$$\vdots = \vdots$$

$$N(1,0,k-2)=(N_{k-2}+N_{k-4})+N_{k-2}.j$$

$$N(1,0,k-1)=(N_{k-1}+N_{k-3})+N_{k-1}.j$$

$$N(1,0,k)=(N_k+N_{k-2})+N_k.j$$

Assim, para p=k temos:

$$\begin{aligned} N(1,0,k+1) &= N(1,0,k)+N(1,0,k-2) \\ &= (N_k+N_{k-2})+N_k.j+(N_{k-2}+N_{k-4})+N_{k-2}.j \end{aligned}$$

$$= (N_{k+1} + N_{k-1}) + N_{k+1}.j$$

Lema 15. Para qualquer inteiro $n, m, p \geq 0$, temos que: $N(0,1,p) = (N_p + N_{p-2}).i + N_p.j$.

Demonstração. Através da recorrência $N(n,m,p+1) = N(n,m,p) + N(m,m,p-2)$ e com os valores iniciais definidos anteriormente como: $N(0,1,0) = i$, $N(0,1,1) = i + j$ e $N(0,1,2) = i + j$, pode-se aplicar o segundo princípio de indução, onde fixa $n = 0$, $m = 1$ e varia $p = 2,3,...,k-1$

$$N(0,1,3) = N(0,1,2) + N(0,1,0) = 2i + j = (N_3 + N_1).i + N_3.j$$

$$N(0,1,4) = N(0,1,3) + N(0,1,1) = 3i + 2j = (N_4 + N_2).i + N_4.j$$

$$N(0,1,5) = N(0,1,4) + N(0,1,2) = 4i + 3j = (N_5 + N_3).i + N_5.j$$

$$\vdots = \vdots$$

$$N(0,1,k-2) = (N_{k-2} + N_{k-4}).i + N_{k-2}.j$$

$$N(0,1,k-1) = (N_{k-1} + N_{k-3}).i + N_{k-1}.j$$

$$N(0,1,k) = (N_k + N_{k-2}).i + N_k.j$$

Assim, para p=k temos:

$$\begin{aligned} N(0,1,k+1) &= N(0,1,k) + N(0,1,k-2) \\ &= (N_k + N_{k-2}).i + N_k.j + (N_{k-2} + N_{k-4}).i + N_{k-2}.j \\ &= (N_{k+1} + N_{k-1}).i + N_{k+1}.j \end{aligned}$$

Lema 16. Para qualquer inteiro $n, m, p \geq 0$, temos que $N(1,1,p) = (N_p + N_{p-2}) + (N_p + N_{p-2}).i + N_p.j$.

Demonstração. Através da recorrência $N(n,m,p+1) = N(n,m,p) + N(n,m,p-2)$ e com os valores iniciais definidos anteriormente como: $N(1,1,0) = 1 + i$, $N(1,1,1) = 1 + i + j$ e $N(1,1,2) = 1 + i + j$, pode-se aplicar o segundo princípio de indução, onde fixa $n = 1$, $m = 1$ e varia $p = 2,3,...,k-1$

$$N(1,1,3) = N(1,1,2) + N(1,1,0) = 2 + 2i + j = (N_3 + N_1) + (N_3 + N_1).i + N_3.j$$

$$N(1,1,4) = N(1,1,3) + N(1,1,1) = 3 + 3i + 2j = (N_4 + N_2) + (N_4 + N_2).i + N_4.j$$

$$N(1,1,5) = N(1,1,4) + N(1,1,2) = 4 + 4i + 3j = (N_5 + N_3) + (N_5 + N_3).i + N_5.j$$

$$\vdots = \vdots$$

$$N(1,1,k-2) = (N_{k-2} + N_{k-4}) + (N_{k-2} + N_{k-4}).i + N_{k-2}.j$$

$$N(1,1,k) = (N_k + N_{k-2}) + (N_k + N_{k-2}).i + N_k.j$$

Assim, para p=k temos:

$$\begin{aligned} N(1,1,k+1) &= N(1,1,k) + N(1,1,k-2) \\ &= (N_k + N_{k-2}) + (N_k + N_{k-2}).i + N_k.j + (N_{k-2} + N_{k-4}) + (N_{k-2} + N_{k-4}).i + N_{k-2}.j \\ &= (N_{k+1} + N_{k-1}) + (N_{k+1} + N_{k-1}).i + N_{k+1}.j \end{aligned}$$

Teorema 2. Para os inteiros $n, m, p \in \mathrm{N}$, os números tridimensionais de Narayana são descritos por:

$$N(n,m,p) = N_n(N_m + N_{m-2})(N_p + N_{p-2}) + (N_n + N_{n-2})N_m(N_p + N_{p-2}).i + (N_n + N_{n-2})(N_m + N_{m-2})N_p j$$

Demonstração. Fixando o $n = 0$, $p = 2$ e variando o $m = 2,3,...,k-1$, obtêm-se:

$$N(0,3,2) = N(0,2,2) + N(0,0,2) = i + 2j = N_3.i + (N_3 + N_1)j$$

$$N(0,4,2) = N(0,3,2) + N(0,1,2) = 2i + 3j = N_4.i + (N_4 + N_2)j$$

$$N(0,5,2) = N(0,4,2) + N(0,2,2) = 3i + 4j = N_5.i + (N_5 + N_3)j$$

$$\vdots = \vdots$$

$$N(0,k-2,2) = (N_2 + N_0)N_{k-2}.i + (N_{k-2} + N_{k-4}).j$$

$$N(0,k-1,2) = (N_2 + N_0).N_{k-1}.i + (N_{k-1} + N_{k-3}).j$$

$$N(0,k,2) = (N_2 + N_0)N_k.i + (N_k + N_{k-2}).j$$

Assim, para m=k temos:

$$\begin{aligned} N(0,k+1,2) &= N(0,k,2) + N(0,k-2,2) \\ &= (N_2 + N_0)N_k.i + (N_k + N_{k-2}).j + (N_2 + N_0)N_{k-2}.i + (N_{k-2} + N_{k-4}).j \\ &= (N_2 + N_0)N_{k+1}.i + (N_{k+1} + N_{k-1}).j \end{aligned}$$

Fixando o $n = 1$, $p = 2$ e variando o m, obtém-se:

$$N(1,3,2) = N(1,2,2) + N(1,0,2) = 2 + i + 2j = (N_3 + N_1) + N_3.i + (N_3 + N_1).j$$

$$N(1,4,2)=N(1,3,2)+N(1,1,2)=3+2i+3j=(N_4+N_2)+N_4.i+(N_4+N_2).j$$

$$N(1,5,2)=N(1,4,2)+N(1,2,2)=4+3i+4j=(N_5+N_3)+N_5.i+(N_5+N_3).j$$

$$\vdots=\vdots$$

$$N(1,k-2,2)=(N_{k-2}+N_{k-4})+N_{k-2}.i+(N_{k-2}+N_{k-4}).j$$

$$N(1,k-1,2)=(N_{k-1}+N_{k-3})+N_{k-1}.i+(N_{k-1}+N_{k-3}).j$$

$$N(1,k,2)=(N_k+N_{k-2})+N_k.i+(N_k+N_{k-2}).j$$

Assim, para m=k temos:

$$\begin{aligned} N(1,k+1,2)&=N(1,k,2)+N(1,k-2,2)\\ &=(N_k+N_{k-2})+N_k.i+(N_k+N_{k-2}).j+(N_{k-2}+N_{k-4})+N_{k-2}.i+(N_{k-2}+N_{k-4}).j\\ &=(N_{k+1}+N_{k-1})+N_{k+1}.i+(N_{k+1}+N_{k-1}).j \end{aligned}$$

Fixando o $n=2$, $p=2$ e variando o m, obtêm-se:

$$N(2,3,2)=N(2,2,2)+N(2,0,2)=2+i+2j=N_2(N_3+N_1)+(N_2+N_0)N_3.i+N_2(N_3+N_1).j$$

$$N(2,4,2)=N(2,3,2)+N(2,1,2)=3+2i+3j=N_2(N_4+N_2)+(N_2+N_0)N_4.i+N_2(N_4+N_2).j$$

$$N(2,5,2)=N(2,4,2)+N(2,2,2)=4+3i+4j=N_2(N_5+N_3)+(N_2+N_0)N_5.i+N_2(N_5+N_3).j$$

$$\vdots=\vdots$$

$$N(2,m-2,2)=N_2(N_2+N_0)(N_{m-2}+N_{m-4})+(N_2+N_0)N_{m-2}.i+N_2(N_2+N_0)(N_{m-2}+N_{m-4})j$$

$$N(2,m-1,2)=N_2(N_2+N_0)(N_{m-1}+N_{m-3})+(N_2+N_0)N_{m-1}.i+N_2(N_2+N_0)(N_{m-1}+N_{m-3})j$$

$$\begin{aligned} N(2,m+1,2)&=N(2,m,2)+N(2,m-2,2)\\ &=N_2(N_2+N_0)(N_m+N_{m-2})+(N_2+N_0)N_m.i+N_2(N_2+N_0)(N_m+N_{m-2})j\\ &\quad+N_2(N_2+N_0)(N_{m-2}+N_{m-4})+(N_2+N_0)N_{m-2}.i+N_2(N_2+N_0)(N_{m-2}+N_{m-4})j\\ &=N_2(N_2+N_0)(N_{m+1}+N_{m-1})+(N_2+N_0)N_{m+1}.i+N_2(N_2+N_0)(N_{m+1}+N_{m-1})j \end{aligned}$$

Com isso, observe que:

$$N(0,m,2)=N_0(N_2+N_0)(N_m+N_{m-2})+(N_0+N_{-2})(N_2+N_0)N_mi+N_2(N_0+N_{-2})(N_m+N_{m-2})j$$

$$N(1,m,2)=N_1(N_2+N_0)(N_m+N_{m-2})+(N_1+N_{-1})(N_2+N_0)N_m.i+N_2(N_1+N_{-1})(N_m+N_{m-2})j$$

$$N(2,m,2)=N_2(N_2+N_0)(N_m+N_{m-2})+(N_2+N_0)(N_2+N_0)N_m.i+N_2(N_2+N_0)(N_m+N_{m-2})j$$

$$\vdots = \vdots$$

$$N(n,m,2) = N_n(N_2 + N_0)(N_m + N_{m-2}) + (N_n + N_{n-2})(N_2 + N_0)N_m i + N_2(N_2 + N_0)(N_m + N_{m-2})\,j$$

Diante disso, pode-se concluir que para a generalização da relação tridimensional de Narayana, tem-se que:

$$N(n,m,1) = (N_1 + N_{-1})N_n(N_m + N_{m-2}) + (N_1 + N_{-1})N_m(N_n + N_{n-2})i + N_1(N_n + N_{n-2})(N_m + N_{m-2})\,j$$

$$N(n,m,2) = (N_2 + N_0)N_n(N_m + N_{m-2}) + (N_2 + N_0)N_m(N_n + N_{n-2})i + N_2(N_n + N_{n-2})(N_m + N_{m-2})\,j$$

$$N(n,m,3) = (N_3 + N_1)N_n(N_m + N_{m-2}) + (N_3 + N_1)N_m(N_n + N_{n-2})i + N_3(N_n + N_{n-2})(N_m + N_{m-2})\,j$$

$$\vdots = \vdots$$

$$N(n,m,p) = N_n(N_m + N_{m-2})(N_p + N_{p-2}) + (N_n + N_{n-2})N_m(N_p + N_{p-2})i + (N_n + N_{n-2})(N_m + N_{m-2})N_p . j$$

4 Conclusão

A sequência de Narayana é uma sequência recorrente e linear de 3ª ordem. Esta sequência recebeu esse nome em função de um matemático indiano chamado Narayana Pandita (1340-1400) que propôs o seguinte problema relacionado à reprodução de vacas: Uma vaca dá a luz a um bezerro todos os anos. Por sua vez, o bezerro dá à luz a outro bezerro quando tem três anos de idade. Qual o número de bezerros produzidos por uma vaca durante 20 anos?

O problema proposto por Narayana deu origem à seguinte sequência: (0,1,1,1,2,3,4,6,9,13,19, 28...) que pode ser definida por $N_{n+1} = N_n + N_{n-2}$,com $n \geq 2$ e $N_0 = 0, N_1 = N_2 = 1$ sendo seus termos iniciais.

Neste trabalho, apresenta-se uma discussão direcionada ao processo de complexificação da sequência de Narayana, através de investigações em torno da inserção da unidade imaginária, do aumento dimensional e de suas correspondentes representações algébricas.

Partindo do modelo recursivo unidimensional $N_{n+1} = N_n + N_{n-2}$, com $n \geq 2$ e $N_0 = 0, N_1 = N_2 = 1$ sendo seus termos iniciais são exploradas as relações recorrentes bidimensionais e tridimensionais, a fim de compreender aspectos relevantes sobre a complexificação da sequência de Narayana através de propriedades matemáticas inerentes aos números $N(n,m)$, com $n,m \geq 0$ e $N(n,m,p)$ com $n,m,p \geq 0$ na forma complexa.

Destacamos que a sequência de Narayana, embora não seja tão conhecida, apresenta propriedades matemáticas importantes e se estende a dimensões superiores, o que pode proporcionar um interesse atual pelo estudo dessa sequência, como realizado no estudo de Vieira e Alves (2019) para uma outra sequência semelhante. Assim, pode-se ainda introduzir esse conteúdo para a área de ensino, aplicando determinadas metodologias de ensino e pesquisa (ALVES, 2016). Neste trabalho foram apresentadas propriedades dos números bidimensionais e tridimensionais de Narayana, com vista ao processo de complexificação dessa sequência.

5 Referências

ALVES, F. R. V. Engenharia didática para a generalização da sequência de Fibonacci: uma experiência num curso de licenciatura. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 18, n. 1, p. 61-93, 2016.

CERDA- MORALES, G. Identities involving Narayana numbers, **arXiv:1805.02255v1 [math.CO]**, 2018. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1805.02255.pdf. Acesso em: 20 jan. 2019.

HARMAN, C. J. Complex Fibonacci numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v. 19, n. 1, p. 82-86, 1981.

HORADAM, A. F. Quaternion recurrence relations. **Ulam Quarterly**, v. 2, n. 2, p. 23-33, 1993.

OLIVEIRA, R. R. de; ALVES, F. R. V.; PAIVA, R. E. B. Identidades bi e tridimensionais para os números de Fibonacci na forma complexa. **C.Q.D-Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 11, p. 91-106, 2017. Edição Iniciação Científica.

OLIVEIRA, R. R. de. **Engenharia didática sobre o modelo de complexificação da sequência generalizada de Fibonacci**: relações recorrentes n-dimensionais e representações polinomiais e matriciais**.** 2018. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará, Fortaleza, 2018.

RAMÍREZ, J. L.; SIRVEN, V. R. A note on k-narayana sequence. **Annales Mathematicae et Informaticae**, v. 45, p. 91-105, 2015.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Propriedades das extensões da Sequência de Padovan. **C.Q.D.– Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 15, p. 24-40, jul. 2019. Edição Iniciação Científica.