

**Revista Eletrônica  
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664  
Volume 18, jul. 2020  
Iniciação Científica

**Ricardo Campanha Almagro**

Campus Sorocaba  
Universidade Federal de São Carlos  
ralmagro86@gmail.com

**Graciele Paraguaia Silveira**

Campus Sorocaba  
Universidade Federal de São Carlos  
gracimat@gmail.com

## **Um estudo sobre a interação entre lobos e alces via modelagem matemática e equações diferenciais**

A study on the interaction between wolves and elks by  
mathematical modeling and differential equations

### **Resumo**

A modelagem matemática das interações entre espécies, via sistemas de equações diferenciais, é uma importante aliada em processos de tomada de decisão, como por exemplo para controle biológico. Os objetivos deste trabalho foram estudar o modelo presa-predador de Lotka-Volterra, investigar analiticamente o perfil de suas soluções, implementar o método de Euler e aplicar no problema da reinserção de lobos no Parque Nacional de Yellowstone, como medida para controlar uma crescente população de alces. Simulações numéricas foram executadas a partir de planilhas eletrônicas e os resultados mostraram-se satisfatórios e coerentes com dados reais.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática. Equação Diferencial. Presa-Predador. Método de Euler.

### **Abstract**

The mathematical modeling of the interactions between species, via differential equations systems, is an important ally in decision-making processes, such as for biological control. The objectives of this work were to study the prey-predator model of Lotka-Volterra, to investigate analytically the profile of its solutions, to implement the Euler method and to apply to the problem of wolves reinsertion in Yellowstone National Park, as a measure to control a growing population of elks. Numerical simulations were performed using spreadsheets and the results were satisfactory and consistent with real data.

**Keywords:** Mathematical Modeling. Differential equation. Predator-prey. Euler method.



# 1 Introdução

A Biomatemática é uma área em franca expansão, capaz de proporcionar uma riquíssima oportunidade de aplicar conceitos e ideias matemáticas para compreender, analisar e modelar diferentes problemas biológicos. Não é incomum que tais problemas sejam muitas vezes complexos e demandem habilidades e conhecimentos especializados em diferentes áreas para serem solucionados, de forma a conciliarem desde a linguagem até a definição de prioridades e limitações na estratégia de resolução.

Segundo Bassanezi (2010), a modelagem matemática é uma técnica utilizada para se obter alguma explicação ou entendimento de determinadas situações reais. As equações diferenciais, aliadas aos avanços computacionais e numéricos, se destacam por viabilizar estudos e simulações de diversos fenômenos, inclusive biológicos, o que pode auxiliar em tomadas de decisões.

O presente trabalho foi motivado pela disciplina “Tópicos de Matemática” ministrada no segundo semestre letivo de 2019, pela segunda autora deste artigo, no curso de Licenciatura Plena em Matemática. Uma das atividades realizadas consistiu em escolher algum problema prático e mostrar o processo de modelagem matemática via equações diferenciais, segundo as concepções metodológicas discutidas nas aulas da disciplina. A proposta de tal tarefa fez com que o primeiro autor deste artigo, que foi aluno da disciplina mencionada, se recordasse de um trabalho realizado em outra disciplina da graduação, a saber “Fundamentos de Ecologia”, cursada no segundo semestre de 2016. Trata-se de um caso de inserção de lobos em um ambiente (no qual estavam extintos), com a finalidade de controlar biologicamente uma população crescente de alces. Este fato trouxe resultados profundos ao ecossistema, ocasionando até a mudança do curso de um rio.

Neste sentido, os objetivos desta pesquisa foram estudar o modelo presa-predador de Lotka-Volterra aplicado ao problema; fazer um estudo analítico do perfil das soluções; compreender o comportamento das populações de lobos e alces ao longo do tempo e como essas duas populações interagem entre si e, por fim, comparar os resultados do modelo com dados observados na realidade. Simulações numéricas foram implementadas via planilhas eletrônicas, configuradas para resolver o sistema de equações diferenciais pelo método de Euler.

Nas próximas seções encontram-se detalhes do problema investigado, do modelo matemático empregado e dos resultados obtidos.

## 2 Descrição do problema

O Parque Nacional de Yellowstone, com aproximadamente 6000 quilômetros quadrados, está localizado nos estados americanos de Wyoming, Montana e Idaho. Seu território conta com uma densa concentração de gêiseres, poças de lama, fontes de vapor e fontes termais. Trata-se do mais antigo parque natural do mundo e não se observava há muito tempo a presença de lobos nas suas dependências, considerados extintos da região há cerca de 70 anos. Apesar dos esforços infrutíferos para conter o aumento descontrolado do número de alces na região, alguns desequilíbrios ocorreram como redução de parte da vegetação, especialmente ribeirinha, além da limitação da oferta de alimento para outras espécies (ODUM, 1988; RICKLEFS, 2003).

Em 1995 um projeto ambiental fez a reintrodução da espécie de lobos típica da região (ver Figura 1), trazendo resultados impactantes e ao mesmo tempo inesperados. Como os lobos são os predadores naturais dos alces (ver Figura 2) nesse habitat, a presença dos lobos reduziu a população de alces pela predação e também fez com que os alces evitassem determinadas áreas, como os vales, para não se exporem facilmente aos lobos (BEGON; TOWNSEND; HARPER, 2007).

De acordo com Ripple *et al* (2014), a reinserção dos lobos no parque atuou em dois sentidos:

- Aumentando a oferta de alimento (vegetação) para outras espécies, especialmente os castores que agem como “engenheiros silvícolas” construindo diques nos rios. Isso permitiu que outros animais de pequeno porte como anfíbios, roedores, peixes, patos e outras aves se adequassem ao local, o que tornou a fauna muito mais rica nessa região;
- Algumas áreas não mais frequentadas pelos alces passaram a se recuperar, o que minimizou muito a erosão do leito do rio e permitiu a formação de piscinas naturais. Em locais específicos, a altura das árvores quintuplicou em apenas 6 anos.



Figura 1: Lobo do Parque Nacional de Yellowstone.

Fonte: <<https://digitalmedia.fws.gov/digital/collection/natdiglib/id/203>>. Acesso em: 15 de mar. 2020.



Figura 2: Alce do Parque Nacional de Yellowstone.

Fonte: <<https://digitalmedia.fws.gov/digital/collection/natdiglib/id/10900>>. Acesso em: 15 de mar. 2020.

Em suma, os recursos hídricos da região mudaram e se adaptaram em resposta a reinserção dos lobos, e a razão foi que a regeneração da floresta os estabilizou, mantendo-os fixos em seus cursos. O fato surpreendeu diversos especialistas, entre eles o próprio Serviço Nacional de Parques, até então temerários de que o programa de reintrodução fosse trazer um novo desequilíbrio ecológico.

O Parque Nacional de Yellowstone fez ao longo do processo uma série de medições populacionais listadas a seguir (ZILL, 2016):

- Nos 10 anos anteriores à introdução dos lobos, de 1985 a 1995, observou-se um aumento da população de alces em 40%, partindo de 13.000 em 1985 para 18.000 em 1995;
- Em 1995, 21 lobos foram incorporados no parque e se constatou que em 2007 existiam cerca de 171 lobos no parque;
- Paralelamente, a população de alces que era de 18.000 em 1995, caiu para 7.000 em 2009.

Com base nas informações apresentadas, um modelo matemático do tipo presa-predador foi considerado para o caso da reinserção de lobos no Parque Nacional de Yellowstone, com a finalidade de compreender o comportamento das populações de lobos e alces ao longo do tempo e como essas duas populações interagem entre si, além de comparar os resultados do modelo com dados reais observados ao longo dos anos.

Um estudo analítico das trajetórias das soluções foi realizado. Soluções numéricas foram obtidas e para a implementação computacional do modelo presa-predador foram utilizadas planilhas eletrônicas configuradas para resolver o sistema de equações diferenciais pelo método de Euler.

### 3 Modelagem matemática

#### 3.1 Modelo presa-predador

As equações diferenciais ordinárias que representam o modelo de Lotka-Volterra ou presa-predador são dadas por:

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = aP_1 - \alpha P_1 P_2 \\ \frac{dP_2}{dt} = -bP_2 + \beta P_1 P_2 \end{cases}, \quad (1)$$

em que  $P_1$  é a população de presas em um ambiente em que há condições suficientes para o crescimento das presas, a uma taxa representada por  $a$ ,  $P_2$  é a população de predadores que se alimentam de  $P_1$  e por esse motivo se beneficiam do encontro entre  $P_1$  e  $P_2$ , representado pela multiplicação  $P_1 P_2$ , e conseqüentemente, limitam o crescimento indefinido de  $P_1$ . O coeficiente  $a$  é a taxa de crescimento das presas, na ausência de predadores. Logo,  $a > 0$ . O parâmetro  $b$ , ( $b > 0$ ), é a taxa de mortalidade dos predadores,  $\alpha$  a taxa de mortes no encontro entre  $P_1$  e  $P_2$  e  $\beta$  a taxa com que o alimento influencia no crescimento de  $P_2$  (GARCIA; SILVEIRA, 2018).

As equações do Sistema (1) foram desenvolvidas por Lotka, biofísico americano, em 1925 e por Volterra, matemático italiano em 1926. Na literatura sobre modelagem de fenômenos biológicos, o modelo presa-predador é adaptado à várias situações, levando em consideração fatores como os efeitos da variação da temperatura do ambiente ou presença de determinadas substâncias ou emissões energéticas, que afetam a taxa de crescimento das populações. Isso é modelado por meio da variação dos parâmetros ao longo de um ciclo, que pode ser de dias, anos, ou outra unidade temporal. Assim, em tais modelos de dependência sazonal, as taxas de variações das populações tornam-se dependentes das variações de outros fatores, como a temperatura.

Ao analisar o sistema é usual que se trabalhe com três gráficos: o de variação das presas ao longo do tempo, o de variação dos predadores ao longo do tempo e a variação conjunta presa-predador. Nos dois primeiros, é possível verificar um comportamento oscilatório, em que inicialmente a população de presas cresce e, com a maior disponibilidade de alimento, a população de predadores

também cresce. Em seguida, devido a maior predação, a população de presas diminui, e a população de predadores atinge o máximo suportado pelo sistema e, posteriormente, por falta de alimento, começa a diminuir. Enfim, com a diminuição da população de predadores, a população de presas volta a crescer e ciclo repete-se. Dessa forma o sistema oscila indefinidamente. Por outro lado, existem sistemas do tipo predador-presa que apresentam outros tipos de comportamentos, além do comportamento oscilatório, evoluindo para populações assintoticamente estáveis ou sistemas em que populações se extinguem.

### 3.2 Comportamento das soluções

O Sistema (1) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dP_1}{dt} = P_1(a - \alpha P_2) \\ \frac{dP_2}{dt} = P_2(-b + \beta P_1) \end{cases}, \quad (2)$$

com  $a, b, \alpha, \beta$  constantes positivas.

Os pontos críticos do sistema geral (2) são as soluções de

$$P_1(a - \alpha P_2) = 0 \quad \text{e} \quad P_2(-b + \beta P_1) = 0,$$

isto é,  $(0, 0)$  e  $(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha})$ . O objetivo é examinar as soluções do sistema linear correspondente próximo a cada ponto crítico (BOYCE; DIPRIMA, 2017).

Em uma vizinhança da origem, o sistema linear correspondente é dado por

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

#### Observação

Um sistema de  $n$  equações diferenciais lineares homogêneas de primeira ordem tem a forma

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}. \quad (4)$$

Na notação matricial tem-se  $x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$  como componentes de um vetor  $\mathbf{x} = \phi(t)$ . Desse modo, o Sistema (4) pode ser escrito como  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ . Buscando-se soluções da forma  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}e^{rt}$ , em que o expoente  $r$  e o vetor  $\boldsymbol{\varphi}$  devem ser determinados, obtém-se  $r\boldsymbol{\varphi}e^{rt} = A\boldsymbol{\varphi}e^{rt}$ . Logo,  $A\boldsymbol{\varphi} = r\boldsymbol{\varphi}$  ou  $(A - rI)\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{0}$ . Isso implica que para resolver o Sistema (4), é necessário encontrar os autovalores e autovetores da matriz dos coeficientes  $A$ , concluindo-se aqui a Observação.

De volta ao Sistema (3), tomando como base as ideias apresentadas na Observação anterior, o cálculo dos autovalores e autovetores da matriz dos coeficientes fornece

$$r_1 = a, \quad \boldsymbol{\varphi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_2 = -b, \quad \boldsymbol{\varphi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a solução geral é

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{at} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-bt}. \quad (5)$$

Como os autovalores são reais e com sinais distintos, a origem é um ponto de sela e, consequentemente, instável.

Agora considere o ponto crítico  $(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha})$ . A matriz jacobiana correspondente ao Sistema (2), é dada por

$$J = \begin{pmatrix} a - \alpha P_2 & -\alpha P_1 \\ \beta P_2 & -b + \beta P_1 \end{pmatrix}.$$

Calculando  $J$  em  $(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha})$ , tem-se o sistema linear aproximado

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha b/\beta \\ \beta a/\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (6)$$

em que  $u = P_1 - \frac{b}{\beta}$  e  $v = P_2 - \frac{a}{\alpha}$ . Os autovalores do Sistema (6) são  $r = \pm i\sqrt{ab}$ , de forma que o ponto crítico é um centro estável para o sistema (BOYCE; DIPRIMA, 2017). Para encontrar as trajetórias, pode-se dividir a segunda equação pela primeira, em (6), obtendo

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv/dt}{du/dt} = -\frac{(\beta a/\alpha)u}{(\alpha b/\beta)v}$$

ou

$$\beta^2 a u dv + \alpha^2 b v du = 0. \quad (7)$$

Resolvendo a equação diferencial (7) via método das equações separáveis, a solução é dada por

$$\beta^2 a u^2 + \alpha^2 b v^2 = K, \quad (8)$$

onde  $K$  é uma constante de integração não negativa. Logo, as trajetórias do sistema linear (6) são elipses.

Voltando ao Sistema (2), não linear, note que o mesmo pode ser reduzido a uma única equação

$$\frac{dP_2}{dP_1} = \frac{dP_2/dt}{dP_1/dt} = \frac{P_2(\beta a/\alpha)}{P_1(\alpha b/\beta)}, \quad (9)$$

que é separável e tem solução

$$a \ln P_2 - \alpha P_2 + b \ln P_1 - \beta P_1 = C,$$

em que  $C$  é uma constante de integração. É possível mostrar que o gráfico da solução é uma curva fechada (ciclo-limite) em torno do ponto crítico  $(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha})$ , para  $C$  fixo (BASSANEZI, 2011). Portanto, esse ponto crítico também é um centro para o sistema não linear.

### 3.3 Análise do problema

Com a informação do aumento da população de alces anterior à inserção da população de lobos, podemos calcular a taxa de crescimento da população de presas  $a$ , utilizando um modelo mais

simples de equação diferencial para dinâmica populacional. Assim, neste caso tomando por  $E$  a população de alces em milhares e  $t$  em anos, tem-se:

$$\begin{cases} \frac{dE}{dt} = aE \\ E(0) = 13,00 \\ E(10) = 18,00 \end{cases} \quad (10)$$

Resolvendo o problema de valor inicial, segue que:

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} = aE(t) &\Rightarrow \int \frac{dE(t)}{E(t)} = \int a dt \\ &\Rightarrow E(t) = e^{at+C} = e^{at} \underbrace{e^C}_{=K} \\ \therefore E(t) &= Ke^{at}. \end{aligned}$$

Utilizando os valores iniciais  $E(0) = 13,00$  e  $E(10) = 18,00$ , temos:

$$E(0) = 13,00 \Rightarrow E(0) = Ke^{a0} = k \cdot 1 = 13,00 \Rightarrow K = 13,00,$$

$$E(10) = 18,00 \Rightarrow E(10) = Ke^{10a} = 18,00 \Rightarrow a = \frac{1}{10} \ln \left( \frac{18,00}{13,00} \right) \approx 0,032542.$$

Para os outros parâmetros, em razão da falta de dados quantitativos anteriores à inserção dos lobos no parque, assumiu-se os valores empregados em Zill (2016), que considera aspectos biológicos e comportamentais das espécies e do local, que interferem na taxa de crescimento do predador e nas taxas de mortalidade da presa e do predador para definição dos parâmetros. Portanto, foram considerados  $b = 0,6$ ,  $\alpha = 0,8$  e  $\beta = 0,05$ .

Assim, pressupondo a população de alces como sendo  $A(t)$  e a população de lobos como  $L(t)$ , o modelo presa-predador fica da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = aA - \alpha AL \\ \frac{dL}{dt} = -bL + \beta AL \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dA}{dt} = 0,032542A - 0,8AL \\ \frac{dL}{dt} = -0,6L + 0,05AL \end{cases} \quad (11)$$

As condições iniciais foram atribuídas levando-se em conta as informações sobre as medições populacionais realizadas no Parque Nacional de Yellowstone, presentes em Zill (2016) e já comentadas anteriormente. Logo,  $A(0) = 18$  e  $L(0) = 21/1000$ , onde  $t = 0$  corresponde ao ano de 1995.

Com relação ao Sistema (11), há algumas considerações interessantes à serem feitas:

- A primeira equação mostra, em seu primeiro termo, que na ausência de lobos, a população de alces crescerá exponencialmente;
- Ainda nesta equação, o termo não-linear ( $-0,8AL$ ) representa um impacto negativo sobre a taxa de crescimento da população de alces, visto que quantifica a interação entre presa e predador, interação esta que beneficia o predador;

- Na segunda equação do Sistema (11), o termo  $(-0,6L)$  mostra que a própria população de lobos causa um impacto negativo sobre seu crescimento, uma vez que a presença de mais lobos intensifica a competição por alimento;
- Em paralelo, o termo  $(0,05AL)$  na segunda equação do referido sistema, que denota a interação entre as populações de lobos e alces, tem um impacto positivo já que os lobos estão encontrando mais alimento.

Quanto ao comportamento das soluções do Sistema (11), uma breve análise pode ser feita a partir dos conceitos apresentados na Subseção 3.2.

Reescrevendo o sistema na forma

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = A(0,032542 - 0,8L) \\ \frac{dL}{dt} = L(-0,6 + 0,05A) \end{cases}, \quad (12)$$

obtém-se os pontos críticos  $(0,0)$  e  $(12,0,0406775)$ .

O sistema linear correspondente, em uma vizinhança da origem, fica

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,032542 & 0 \\ 0 & -0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

cujos autovalores e autovetores são

$$r_1 = 0,032542, \quad \varphi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_2 = -0,6, \quad \varphi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

resultando na solução geral

$$\begin{pmatrix} A \\ L \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{0,032542t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0,6t}. \quad (14)$$

Assim, a origem é um ponto de sela e, conseqüentemente, instável.

Com respeito ao ponto crítico  $(12,0,0406775)$ , considere a matriz jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} 0,032542 - 0,8L & -0,8A \\ 0,05L & -0,06 + 0,05A \end{pmatrix}.$$

Logo, o sistema linear aproximado é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -9,6 \\ 2,033 \times 10^{-3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (15)$$

donde  $u = A - 12$  e  $v = L - 0,0406775$ , implicando nos autovalores  $r = \pm 0,14i$ .

Desse modo, no plano  $uv$  as trajetórias são elípticas e definidas pela expressão

$$8,1355 \times 10^{-5}u^2 + 0,384v^2 = K.$$

Voltando ao plano  $xy$ , conforme visto na Subseção 3.2, tem-se uma curva fechada (ciclo-limite)

$$0,032542 \ln y - 0,8y + 0,6 \ln x - 0,05x = C. \quad (16)$$

Substituindo as condições iniciais, a solução do PVI torna-se

$$0,0325421ny - 0,8y + 0,6lnx - 0,05x = 0,7. \quad (17)$$

A Figura 3 mostra um plano de fase para o Sistema (11), com a trajetória (17). Note que de fato possui trajetórias fechadas, demonstrando que as populações de presas e predadores oscilam, sendo que a oscilação da população predadora vem depois da oscilação de presas. Iniciando em um estado no qual ambas as populações, de predadores e de presas, são relativamente pequenas, há primeiro um aumento no número de presas, uma vez que há poucos predadores. Com comida abundante, a população de predadores também cresce. Isso leva ao aumento da caça e a população de presas tende a diminuir. Finalmente, a população de predadores também diminui devido a menor disponibilidade de alimento e o sistema volta ao seu estado original.

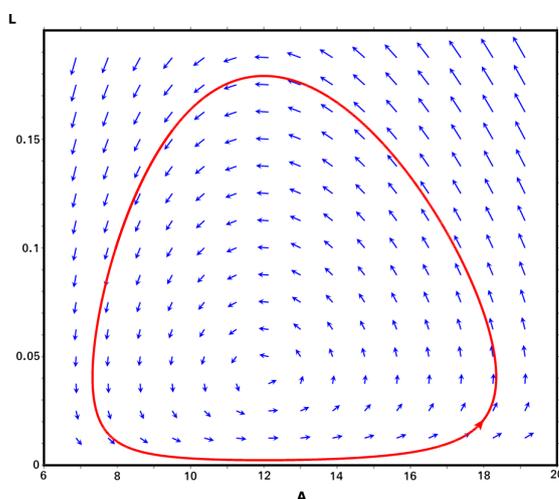


Figura 3: Plano de fase do sistema de equações diferenciais (11), graficado com o auxílio do software Maxima.

Após essas considerações sobre o modelo matemático construído para descrever a interação entre as populações de lobos e alces no Parque Nacional de Yellowstone, os próximos passos consistem em apresentar o método numérico escolhido para resolver o sistema, bem como os resultados alcançados.

## 4 Implementação computacional e resultados

### 4.1 Método de Euler

Considere um Problema de Valor Inicial (PVI), conhecido como problema de *Cauchy*, definido por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), & t \in I \subset \mathbb{R} \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad (18)$$

em que  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função conhecida e  $x = x(t)$ ,  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ , é a função a ser encontrada (RUGGIERO; LOPES, 1996).

Para o método numérico adotado neste estudo, método de Euler, optou-se pela seguinte discretização. Considere um PVI conforme apresentado em (18), definido para  $t \in [0, t_f] \subset \mathbb{R}$ . Seja

$$\Pi : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$$

uma partição regular de  $[0, t_f]$  com  $N$  subintervalos e espaçamento  $h = (t_f - t_0)/N$ . Quando for possível, denota-se a solução exata em um ponto  $t = t_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , por  $x_i = x(t_i)$  e por  $\xi_i$  a solução aproximada, que é fornecida por algum esquema numérico específico (SILVEIRA; GARCIA, 2020).

No esquema de Euler explícito de primeira ordem, a solução aproximada  $\xi_{i+1}$  é definida por

$$\xi_{i+1} = \xi_i + hf(t_i, \xi_i), \quad i = 0, \dots, N - 1. \quad (19)$$

O intervalo de estabilidade absoluta  $J$  de um método numérico pode ser obtido ao aplicá-lo em um PVI (18), cuja função  $f$  é definida por  $f(t, x) = \lambda x(t)$ , com  $\lambda < 0$ . Se a solução numérica encontrada satisfaz a condição  $\lim \xi_n = 0$  para  $\lambda h \in J$ , então  $J$  é o intervalo de estabilidade do método em questão. Para o método de Euler tem-se  $J = (-2, 0)$  (BUCHANAN; TURNER, 1992).

Adaptando o Sistema (11) para o método escolhido, obtém-se:

$$\begin{cases} A_{i+1} = A_i + h(aA_i - \alpha A_i L_i) \\ L_{i+1} = L_i + h(\beta A_i L_i - bL_i) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_{i+1} = A_i + h(0,032542A_i - 0,8A_i L_i) \\ L_{i+1} = L_i + h(0,05A_i L_i - 0,6L_i) \end{cases}. \quad (20)$$

## 4.2 Simulações

Conforme mencionado, o método numérico escolhido para encontrar soluções aproximadas do Sistema (11) foi o método de Euler. Para a discretização considerou-se  $A(0) = 18,00$ ,  $L(0) = 0,021$  e  $t \in [0, 100]$ . Além disso, foi escolhido o seguinte conjunto de subintervalos:  $N = 400$ ,  $N = 10.000$  e  $N = 25.000$ , com implementações computacionais executadas em planilhas eletrônicas.

As Figuras 4 e 5 mostram a evolução das populações de presas e predadores, respectivamente, ao longo do tempo para  $N = 400$ . Já a Figura 6 ilustra a trajetória no plano de fase entre as duas populações.

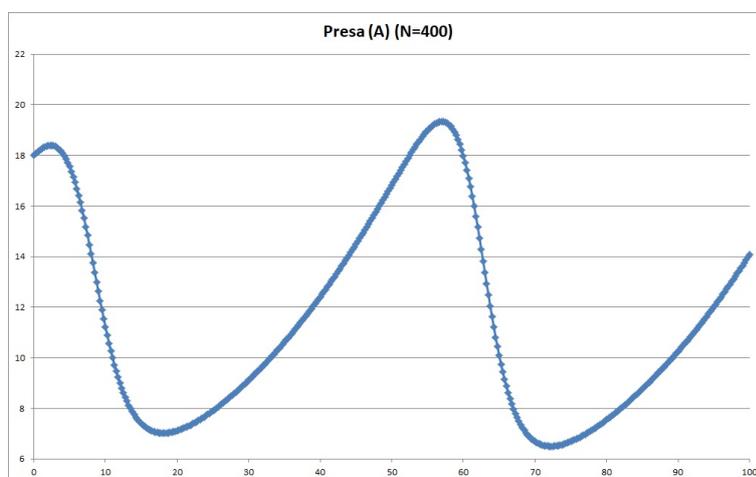


Figura 4: Gráfico da quantidade de presas  $A(t)$  versus  $t$  para  $N = 400$ .

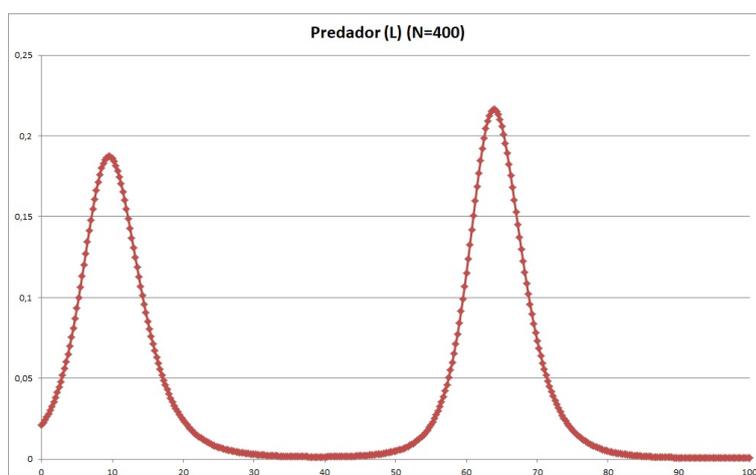


Figura 5: Gráfico da quantidade de predadores  $L(t)$  versus  $t$  para  $N = 400$ .

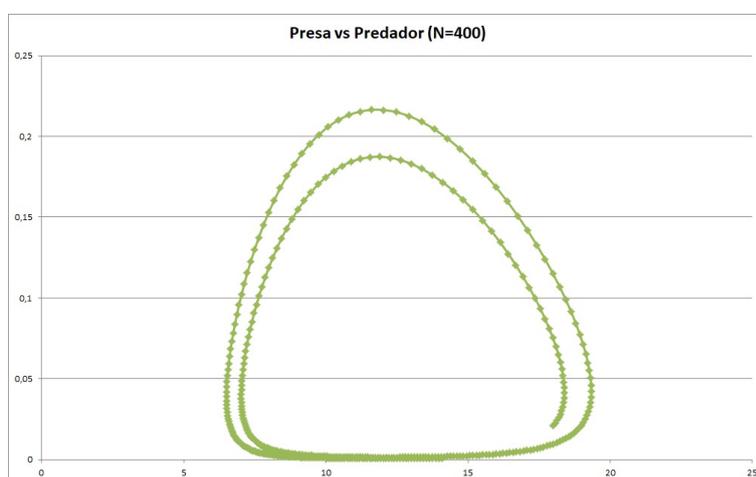


Figura 6: Gráfico das quantidades de presas  $A(t)$  versus predadores  $L(t)$  para  $N = 400$ .

Observa-se que os fenômenos são oscilatórios e em ambos os gráficos das Figuras 4 e 5, as amplitudes dos picos vão aumentando com o passar do tempo. Isso fica evidenciado na Figura 6, onde o comportamento oscilatório é visível e possui a forma de espiral divergindo.

No entanto, de acordo com o estudo analítico realizado previamente, esperava-se obter trajetórias com perfil de ciclo-limite. Desse modo, esta ainda não constitui uma solução satisfatória.

Aumentando a quantidade de subintervalos na discretização temporal para  $N = 10.000$ , a implementação computacional forneceu os gráficos das Figuras 7, 8 e 9.

Nas Figuras 7 e 8 é possível observar comportamentos oscilatórios das populações de presas e predadores, respectivamente, ao longo do tempo. Contudo, nota-se que as amplitudes dos picos permanecem visualmente constantes. Conforme revela a Figura 9, neste caso a trajetória no plano de fase mostra um ciclo-limite (curva fechada), compatível com os resultados do estudo analítico.

O aumento da quantidade de subintervalos para  $N = 25.000$ , tem-se os gráficos das Figuras 10, 11 e 12. As soluções aproximadas tanto para a população de presas, quanto para a população de predadores, praticamente não apresentam diferenças em relação às soluções implementadas para  $N = 10.000$ . Conclui-se que há convergência numérica, isto é, as soluções numéricas encontram-se suficientemente próximas da solução analítica.

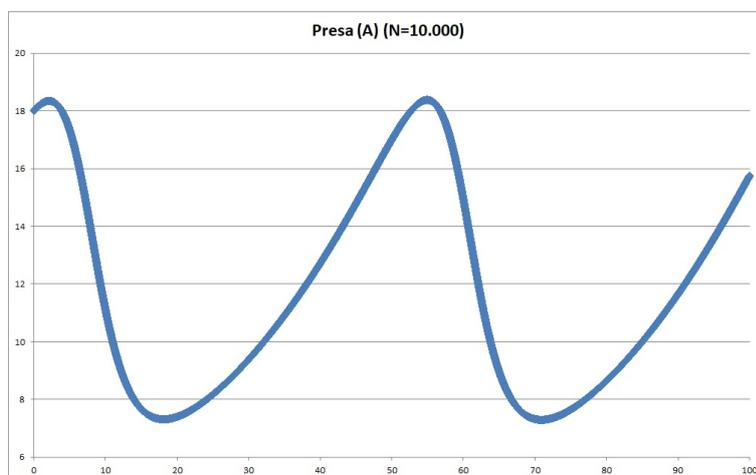


Figura 7: Gráfico da quantidade de presas  $A(t)$  versus  $t$  para  $N = 10.000$ .

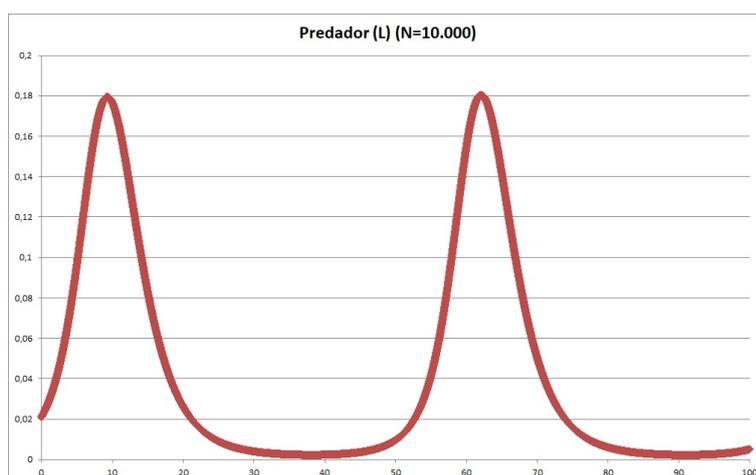


Figura 8: Gráfico da quantidade de predadores  $L(t)$  versus  $t$  para  $N = 10.000$ .

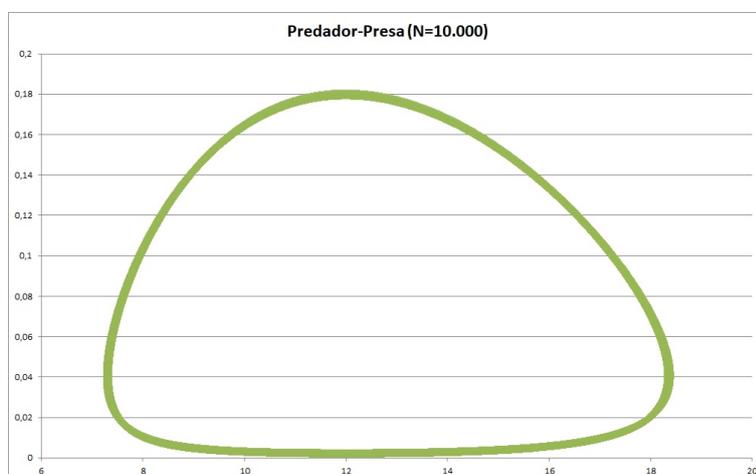


Figura 9: Gráfico das quantidades de presas  $A(t)$  versus predadores  $L(t)$  para  $N = 10.000$ .

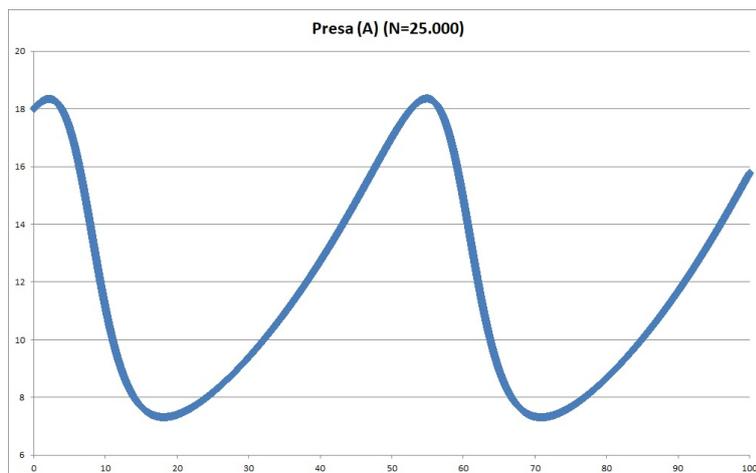


Figura 10: Gráfico da quantidade de presas  $A(t)$  versus  $t$  para  $N = 25.000$ .

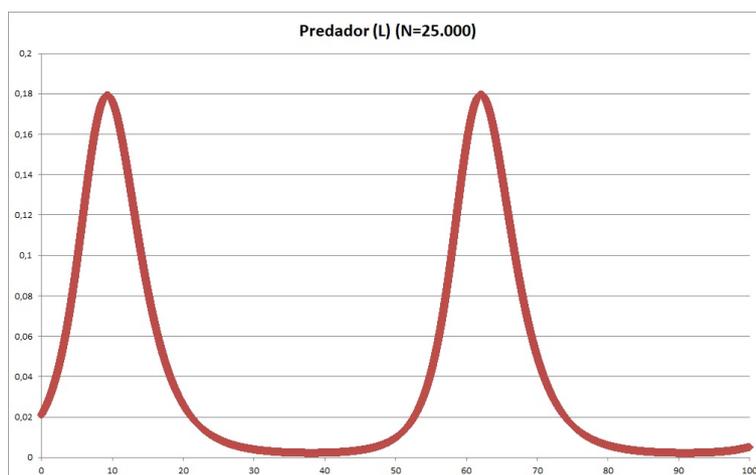


Figura 11: Gráfico da quantidade de predadores  $L(t)$  versus  $t$  para  $N = 25.000$ .

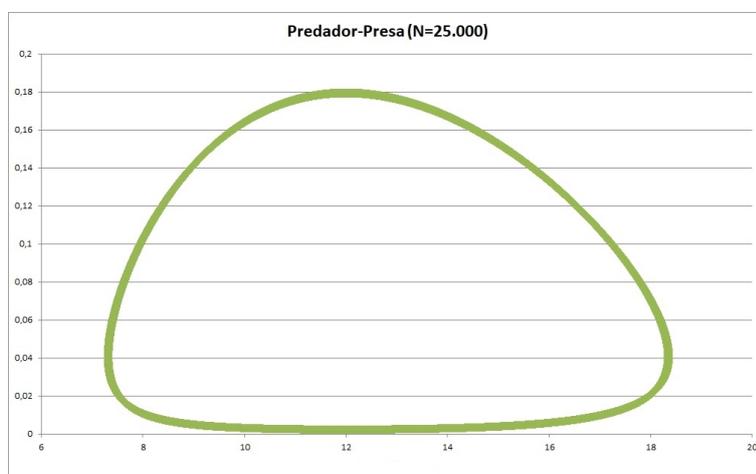


Figura 12: Gráfico das quantidades de presas  $A(t)$  versus predadores  $L(t)$  para  $N = 25.000$ .

Os exemplos tratados evidenciam que à medida que o número de subintervalos aumenta, a periodicidade dos gráficos fica mais clara. Isso é característico de métodos numéricos consistentes e estáveis, como é o caso do método de Euler. Desde que a capacidade computacional comporte, pode-se obter resultados mais precisos com este procedimento.

A comparação entre os dados das medições populacionais realizadas no Parque Nacional de Yellowstone, com os valores obtidos pelo modelo, pode ser vista na Tabela 1.

Tabela 1: Comparação entre os dados reais e os resultados do modelo.

Presa				
Ano	Realidade	Modelo	Erro absoluto	Erro relativo
2009	7	7,673532	9,622%	8,777%
Predador				
Ano	Realidade	Modelo	Erro absoluto	Erro relativo
2007	0,171	0,145077	15,160%	17,868%

O modelo presa-predador foi utilizado nesta pesquisa em sua versão mais simplificada, envolvendo apenas a interação entre presa (alce) e predador (lobo). Além disso, os parâmetros do sistema foram considerados constantes. Mesmo neste contexto, o modelo foi capaz de produzir soluções satisfatórias, com erros relativamente pequenos e que proporcionam uma boa noção da evolução temporal da interação entre as duas espécies.

A inserção de outros fatores na modelagem poderia contribuir para elevar a precisão dos resultados, ou diminuição dos erros, como por exemplo:

- Interações com outras espécies;
- Alterações climáticas e estações sazonais;
- Ciclo reprodutivo de cada espécie;
- Adaptabilidade dos lobos inseridos ao novo ambiente.

Entretanto, não é uma tarefa simples. Isso demandaria uma pesquisa mais profunda na busca por mais dados reais, nem sempre disponíveis ou acessíveis, além de aumentar a complexidade do sistema de equações.

## 5 Considerações finais

A modelagem de fenômenos biológicos é um bom exemplo de aplicação das equações diferenciais, que extrapola o simples exercício de resolver uma EDO, mas permite um trabalho de desenvolvimento prático que é muito enriquecedor. Os propósitos deste trabalho foram estudar o modelo presa-predador de Lotka-Volterra, investigar analiticamente o comportamento de suas soluções, implementar um método numérico (método de Euler) e por fim aplicar em um problema real.

O modelo presa-predador empregado no estudo da interação entre alces e lobos, no Parque Nacional de Yellowstone, se mostrou bastante próximo à realidade, mesmo trabalhando com poucos dados e com parâmetros constantes, o que demonstra que tem potencial para ser aperfeiçoado. As simulações numéricas, realizadas via planilhas eletrônicas, forneceram soluções aproximadas



adequadas ao problema e que estão de acordo com os resultados apontados no estudo analítico do sistema de equações diferenciais.

Do ponto de vista biológico, pode-se concluir que a reinserção de lobos no parque funcionou como medida de controle para a crescente população de alces. Os gráficos das trajetórias dos planos de fase exibem ciclos-limites, que indicam que enquanto a população de alces estiver em equilíbrio dinâmico com a população de lobos, esta permanecerá controlada.

Conclui-se portanto, que é possível desenvolver modelos matemáticos alinhados com a realidade, que abordam assuntos acessíveis para alunos de graduação, fazendo-se uso de softwares livres e que enriquecem a formação acadêmico-científica.

## 6 Referências Bibliográficas

- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2010.
- BASSANEZI, R. C. **Equações diferenciais ordinárias: um curso introdutório**. Santo André: UFABC, 2011.
- BEGON, M.; TOWNSEND, C. R.; HARPER, J. L. **Ecologia de indivíduos a ecossistemas**. 4. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.
- BUCHANAN, J. L.; TURNER, P. R. **Numerical methods and analysis**. New York: McGraw Hill, 1992.
- GARCIA, R. O.; SILVEIRA, G. P. Soluções numéricas de EDO's aplicadas no estudo de dinâmica populacional. **C.Q.D.- Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 13, p. 46-69, 2018. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/revista-cqd>. Acesso em: 19 mar. 2020.
- ODUM, E. P. **Ecologia**. Rio de Janeiro: Guanabara, 1988.
- RICKLEFS, R. E. **A economia da natureza**. 5. ed. Rio de Janeiro: Guanabara-Koogan, 2003.
- RIPPLE, W. et al. Status and ecological effects of the world's largest carnivores. **Science**, v. 343, n. 6167, p. 151-163, 2014.
- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson, 1996.
- SILVEIRA, G. P.; GARCIA, R. O. Análise das soluções numéricas do modelo do tipo presa-predador de Holling-Tanner. **C.Q.D.- Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 84-96, 2020. Edição Ermac. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/revista-cqd>. Acesso em: 19 mar. 2020.
- ZILL, D. Z. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.