

**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 18, jul. 2020

Érika Capelato

Faculdade de Ciências e Letras
UNESP - Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
erika.capelato@unesp.br

Julia Marcucci Schmidt

Faculdade de Ciências e Letras
UNESP - Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
juliamschmidt@yahoo.com.br

Um estudo sobre a centralidade em rede temática de monografias em ciências econômicas

A study on the centrality in thematic network of monographs
in economic sciences

Resumo

O estudo de redes tem se mostrado uma metodologia muito eficaz uma vez que pode modelar diversas situações de natureza real. Para analisarmos as propriedades estruturais de um grafo podemos utilizar as medidas de centralidade, as quais são capazes de medir a influência dos vértices na estrutura da rede. O objetivo deste artigo é apresentar as medidas de centralidade do grau e do autovetor e fazer uma aplicação delas na rede formada pelas 203 monografias desenvolvidas no período de 2011 a 2017 pelos alunos do curso de Ciências Econômicas da Unesp. Duas monografias (vértices) foram ligadas por uma aresta se elas pertencessem a uma mesma subárea da Economia. Esta relação foi feita a partir das suas palavras-chave. Usando as medidas de centralidade, tanto do grau quanto do autovetor, identificamos que os vértices centrais eram monografias com temáticas em economia do bem-estar social; economia internacional; crescimento, flutuações e planejamento econômico e economia dos recursos humanos.

Palavras-chave: Grafos. Medidas de Centralidade. Monografia. Ciências Econômicas.

Abstract

The study of networks has proven to be a very effective methodology as it can model many situations of real nature. To analyze the structural properties of a graph we can use the measures of centrality, which are able to measure the influence of vertices on the lattice structure. The aim of this paper is to present the degree and eigenvector centrality measures and apply them to the network of 203 monographs developed from 2011 to 2017 by students of the Economics course at Unesp. Two monographs (vertices) were joined by an edge if they belonged to the same subarea of Economics. This relationship was made from your keywords. Using the measures of centrality, both degree and eigenvector, we identified that the central vertices were monographs on social welfare economics; international economy; growth, fluctuations and economic planning and human resource economics.

Keywords: Graphs. Centrality Measures. Monography. Economic Sciences.



1 Introdução

Podemos entender o grafo como um objeto matemático formado por dois conjuntos: o conjunto dos vértices e o conjunto das arestas, estas devem representar as relações entre os vértices. Podemos considerar como vértices, por exemplo: alunos, cidades, instituições, entre outros, e como arestas as seguintes inter-relações: amizade, rodovias, colaboração científica entre outras.

Com o estudo da teoria dos grafos é possível, entre tantas coisas, determinar os pontos centrais de um grafo, ou seja, localizar o(s) vértice(s), em relação à rede total, identificando-o(s) como fundamental(is) na conexão da rede. Uma das maneiras de identificação dos pontos centrais em um grafo se dá pelo cálculo das medidas de centralidade que são subdivididas entre medidas espectrais e medidas não espectrais. Entre as não espectrais, as mais conhecidas, são as medidas de centralidade do grau (degree centrality), também chamada de medida de informação, a centralidade de proximidade (closeness centrality) e a centralidade de intermediação (betweenness centrality). No trabalho de Bonacich (1987) o autor propõe uma medida de centralidade a partir de um autovetor associado ao índice do grafo, conhecida como centralidade de autovetor, a qual é uma medida espectral. Neste artigo vamos definir as medidas de centralidade de grau e de autovetor, as quais serão utilizadas na aplicação. As demais medidas citadas podem ser estudadas, por exemplo, nos trabalhos de Freeman (1977), Freeman (1978) e Sabidussi (1966).

As aplicações da teoria dos grafos são inúmeras, seja na área das ciências exatas, biológica ou humanas. Por exemplo, nas ciências sociais aplicadas, por volta de 1950, surge a ideia de Rede Social, a qual também tem como ferramenta a Teoria dos Grafos. Nas análises de Redes Sociais por meio de grafos, os vértices são chamados atores e as arestas de ligações. Assim, nestes estudos os atores são identificados como: pesquisadores, instituições científicas, países, entre outras. As ligações são, por exemplo: frequências de coautorias, ocorrência de palavras, existência de importação, entre outros. Nesta forma de se conceber rede como configurações de relacionamentos, podemos citar um exemplo importante de rede de colaboração formada para a elaboração de textos científicos, esta refere-se ao matemático húngaro Paul Erdős (1913-1996) que escreveu e publicou mais de 1500 artigos em conjunto com diferentes coautores, BATAGELJ e MRVAR (2004).

Recentemente, outro fenômeno social foi abordado na pesquisa de Ribeiro *et al* (2018). Em seu trabalho os autores estudam os escândalos de corrupção política documentados no Brasil nos últimos vinte e sete anos e discutem a importância dos grafos no estudo da rede de corrupção política.

No trabalho de Duarte (2011) o autor buscou responder a seguinte pergunta: que conexões temáticas existem entre docentes a partir de experiências desenvolvidas nas áreas de Ciência e Gestão da Informação? Para responder a esta pergunta os autores mapearam a produção científica, durante o período de 2005 a 2010, dos docentes dos programas de pós-graduação em Ética, Gestão e Políticas de Informação do PPGCI/UFPB e Gestão, Mediação e Uso da Informação, do PPGCI/UNESP-Marília que possuíam currículo *lattes* no Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq. As análises possibilitaram identificar pesquisadores que atuam em temas comuns e com isso proporcionar uma relação social com o objetivo de compartilharem o fazer científico e construir coletivamente o conhecimento.

Assim, a motivação deste artigo está relacionada com a literatura com o objetivo de contribuir para a discussão das aplicações da matemática usando as medidas de centralidade do grau e de autovetor como forma de conhecer as temáticas centrais numa rede formada pelos trabalhos de conclusão de curso de graduação (monografias) desenvolvidos pelos alunos do curso de Ciências Econômicas da Faculdade de Ciências e Letras da Unesp entre os anos de 2011 a 2017.

As monografias constituem-se de um trabalho obrigatório para a integralização do curso. No curso de Ciências Econômicas da Unesp elas devem ser feitas de forma individual, sob a orientação

de um professor e, o tema, pode ser escolhido pelo aluno em concordância com seu orientador. Segundo o CNPq a área de Economia possui dez subáreas temáticas: Teoria Econômica; Métodos Quantitativos em Economia; Economia Monetária e Fiscal; Crescimento, Flutuações e Planejamento Econômico; Economia Internacional; Economia Industrial; Economia dos Recursos Humanos; Economia Regional e Urbana; Economia do Bem-Estar Social e Economia Agrária e dos Recursos Naturais.

Considerando que os alunos fazem a escolha de seus temas levando em conta diversos fatores como: as habilidades e competências desenvolvidas durante a graduação, os grupos de pesquisa dos professores, o contexto político e social que vivem, as oportunidades de emprego ou carreira após formados, a influência de colegas e docentes, entre outros, conjecturamos que esta escolha temática seja um fenômeno que ocorre em forma de rede. Assim, visualizar esta rede e encontrar a estrutura central dela permitirá conhecer o perfil dos estudantes e professores do curso de Ciências Econômicas da Unesp, no que diz respeito às preferências e/ou tendências de temáticas abordadas durante o período analisado.

Neste contexto, cada vértice do grafo será uma monografia e as ligações entre elas serão realizadas se houver elementos de uma mesma subárea da economia. Estes elementos serão as palavras-chave pertencentes a cada monografia.

Além desta introdução, este artigo está organizado da seguinte maneira. Na Seção 2 apresentamos os principais conceitos e resultados para entendermos a estrutura de um grafo, bem como as medidas de centralidade do grau e de autovetor. Na Seção 3 fazemos o estudo de caso, apresentando a base de dados, como ela foi organizada e as análises obtidas. Finalmente, na Seção 4 apresentamos as considerações finais deste trabalho.

2 Grafos e medidas de centralidade

Nesta seção faremos uma apresentação das terminologias básicas de grafos, bem como da teoria espectral de grafos que são necessárias para este trabalho. Em seguida apresentaremos as medidas de centralidade do grau e de autovetor, as quais serão utilizadas no estudo de caso deste trabalho. As principais referências desta seção são Abreu *et al* (2014) e Jurkiewicz (2009).

2.1 Noções da teoria espectral de grafos

Um grafo $G = (V(G), E(G))$ é uma estrutura consistindo de um conjunto finito e não vazio $V = V(G)$ cujos elementos são denominados de *vértices*, e um conjunto $E = E(G)$ formado por pares de elementos de V , denominado *arestas*. Indicamos por $|V|$ e $|E|$ o número de vértices e arestas, respectivamente, de G . Se v e u pertencem ao conjunto V e $e = \{v, u\} \in E$, dizemos que a aresta e *incide* em v e u . O *grau de um vértice* v , denotado por $d(v)$, é o número de arestas incidentes em v . Vértices ligados por arestas são chamados *vértices adjacentes*. Quando V é um conjunto unitário e $E = \emptyset$, dizemos que G é um grafo *trivial*.

Uma aresta incidente a apenas um vértice é chamada de *laço* e duas ou mais arestas incidentes ao mesmo par de vértices são chamadas *arestas múltiplas*. Grafos sem orientação, sem laços ou arestas múltiplas são chamados de *grafos simples*.

A Figura 1 é um exemplo de grafo simples. O conjunto $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, portanto $|V| = 5$ e $|E| = 6$. As arestas são $e_1 = \{v_1, v_2\}$, $e_2 = \{v_2, v_3\}$, $e_3 = \{v_2, v_5\}$, $e_4 = \{v_4, v_5\}$, $e_5 = \{v_1, v_4\}$ e $e_6 = \{v_1, v_5\}$. Os vértices v_2 e v_5 são adjacentes, mas v_2

e v_4 são não adjacentes. Os graus dos vértices são $d(v_1) = 3, d(v_2) = 3, d(v_3) = 1, d(v_4) = 2$ e $d(v_5) = 3$.

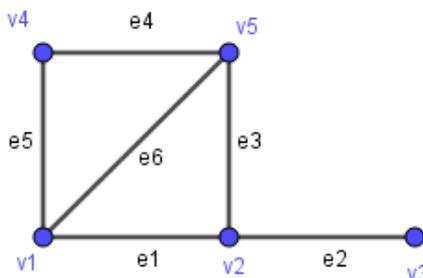


Figura 1: Grafo simples

Uma sequência finita v_1, v_2, \dots, v_k de vértices de um grafo $G(V, E)$ é chamada *cadeia* de v_1 a v_k quando $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ para $1 \leq i \leq k - 1$. Dizemos que v_1, v_2, \dots, v_k é uma *cadeia fechada* (respectivamente, *cadeia aberta*) quando $v_1 = v_k$ (respectivamente, $v_1 \neq v_k$). Um *caminho* é uma cadeia em que todos os vértices são distintos. O grafo no qual existe um caminho ligando cada par de vértices é chamado *conexo*, caso contrário, o grafo é denominado *desconexo*. Na Figura 2 o grafo G é conexo e o grafo H desconexo.

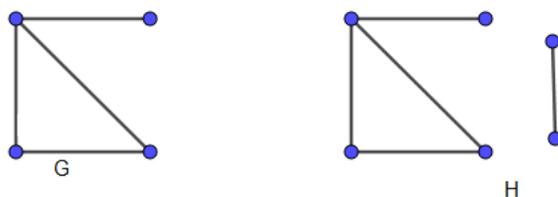


Figura 2: G é grafo conexo e H desconexo

Seja $G(V, E)$ um grafo, podemos definir o *grau mínimo* de G por $\delta = \min\{d(v) : v \in V\}$. O número $\Delta = \max\{d(v) : v \in V\}$ é chamado *grau máximo* de G .

O grafo da Figura 1 tem $\delta = 1$ e $\Delta = 3$. Além disso, também podemos observar no grafo da Figura 1 o seguinte resultado clássico: dado um grafo G , com m arestas, a soma do grau dos vértices de G é sempre o dobro do número de arestas, ou seja,

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m. \quad (1)$$

Uma das formas mais comuns de descrever a estrutura de um grafo para o computador é usando uma matriz. A *matriz de adjacência* é a matriz de zeros e uns que se constrói naturalmente a partir das relações de adjacência entre os vértices do grafo.

Seja G um grafo simples com n vértices, a matriz de adjacência de G , denotada por $A(G)$, é uma matriz quadrada de ordem n cujas entradas são

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in E, \text{ para } v_i, v_j \in V \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2)$$

A definição dada em (2) implica que a matriz adjacência de um grafo é simétrica, ou seja, $A(G) = A(G)^T$, onde $A(G)^T$ denota a matriz $A(G)$ transposta.

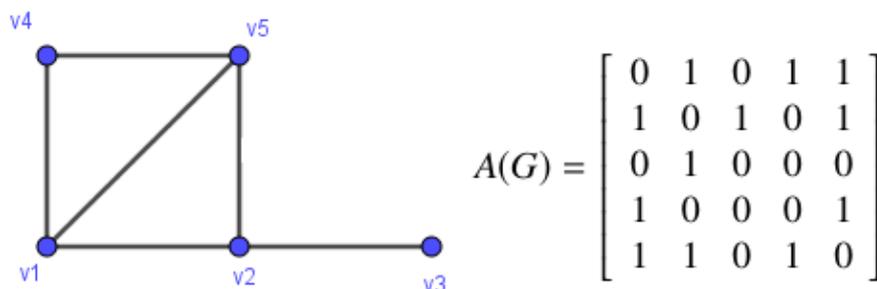


Figura 3: Grafo e matriz adjacência

A Figura 3 traz o exemplo de um grafo G e sua respectiva matriz de adjacência $A(G)$. Note, primeiramente, que a matriz $A(G)$ é simétrica. Além disso, a soma das entradas de cada linha da matriz $A(G)$ é igual ao grau do vértice correspondente. Por exemplo, o grau do vértice v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 é, respectivamente, $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 1$, $d(v_4) = 2$ e $d(v_5) = 3$. A soma dos números da primeira, segunda e quinta linhas da matriz $A(G)$ é três e a soma das entradas da quarta linha da matriz $A(G)$ é dois e a soma das entradas da terceira linha da matriz é um.

Dada uma matriz quadrada A de ordem $n \times n$, um escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ é um *autovalor* de A se existir um vetor não nulo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Av = \lambda v \quad (3)$$

o vetor v é chamado de *autovetor* associado a λ . A equação (3) é equivalente a

$$(\lambda I - A)v = 0, \quad (4)$$

onde I é a matriz identidade de ordem $n \times n$. Assim, o sistema dado pela equação (4) tem solução não nula se $\det(\lambda I - A) = 0$. O polinômio obtido calculando o determinante $\det(\lambda I - A(G))$ é chamado *polinômio característico* da matriz A .

Logo, o polinômio característico da matriz de adjacência $A(G)$ de um grafo G é definido por $\det(\lambda I - A(G))$ e λ é dito um autovalor do grafo G quando é raiz do polinômio característico.

Se $A(G)$ possui n autovalores distintos $\lambda_1 > \dots > \lambda_n$ o *espectro do grafo* G , denotado por $spect(G)$, é definido como a matriz $2 \times n$, onde a primeira linha é constituída pelos autovalores distintos de $A(G)$ dispostos em ordem decrescente e a segunda, pelas suas respectivas multiplicidades algébricas. Ou seja,

$$spect(G) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ m(\lambda_1) & \dots & m(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

O polinômio característico da matriz de adjacência $A(G)$ da Figura 3 é $-\lambda^5 + 6\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 2$. Logo, seu espectro é

$$spect(G) = \begin{pmatrix} 2,64 & 0,72 & -0,59 & -1 & -1,77 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

O maior autovalor de G é denominado *índice* de G e denotado por $ind(G)$. O raio espectral de um grafo G , denotado por $\rho(G)$, é o número real não negativo $\rho(G) = \max_i |\lambda_i|$, onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de G . Neste exemplo, temos $ind(G) = \rho(G) = 2,6419$.

Em Apostol (1969) podemos encontrar a seguinte definição: se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os autovalores do polinômio característico da matriz A de ordem $n \times n$, então o traço de A , denotado por $tr(A)$, é a soma dos autovalores, ou seja,

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

O autor também mostra o seguinte resultado para o traço de uma matriz A :

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii},$$

ou seja, o traço de A também é igual a soma dos elementos da diagonal principal de A . Logo, no caso da matriz de adjacência de um grafo simples G , como o $tr(A(G)) = 0$, então seus autovalores somam zero. Observe que obtemos o valor zero quando somamos os autovalores do $spect(G)$ em (5).

O teorema a seguir é importante para o estudo da matriz adjacência de um grafo uma vez que esta é uma matriz real e simétrica. Sua demonstração pode ser encontrada em Araujo (2014).

Teorema 1 *Se A é uma matriz real simétrica, então seus autovalores são reais.*

Quando usamos grafos para modelar redes, a pergunta natural é: como identificar os vértices mais importantes (ou centrais) no modelo? Esta importância está relacionada com o tipo de relação estabelecida, que são representadas pelas arestas do grafo, e é avaliada através das *medidas de centralidade*, as quais trataremos a seguir.

2.2 Centralidade do grau e de autovetor

Em Freeman (1977) o autor escreve que a ideia do vértice central foi introduzida por Bavelas (1948). Esta ideia sugere que uma pessoa está na posição central se ela está estrategicamente localizada no caminho de comunicação mais curto que conecta um par de outras pessoas. Esta mesma ideia foi usada no trabalho de Shaw (1954) e, de acordo com Freeman (1978), foi Nieminen (1974) que nomeou esta medida como *centralidade do grau* e a generalizou como segue:

Seja $G = G(V, E)$ um grafo com n vértices e $v_i \in V$. A centralidade de grau do vértice v_i , denotada por $C_d(v_i)$, é o número de arestas incidentes de v_i , isto é

$$C_d(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij},$$

onde a_{ij} são os elementos da matriz adjacência $A(G)$. Considerando esta medida, o centro de G é o vértice que possui o maior grau.

Já a medida espectral de autovetor, proposta por Bonacich (1987) para grafos conexos, analisa a estrutura dos vértices de um grafo usando os autovalores e autovetores associados da matriz adjacência. Antes de apresentarmos a definição desta medida de centralidade, vamos nos recordar de alguns resultados relacionados a matrizes simétricas e do Teorema de Perron-Frobenius, o qual garante a definição desta medida.

Dada a matriz $A = (a_{ij})$ e $\rho : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ uma permutação, denotamos por A_ρ a matriz $(a_{\rho(i), \rho(j)})$. Se P é uma matriz obtida permutando-se as linhas da matriz identidade de

acordo com ρ então $A_\rho = PAP^T$; segue que A_ρ e A possuem os mesmos autovalores e se v é um autovetor de A então v_ρ é um autovetor de A_ρ .

Dizemos que uma matriz C é *não-negativa* (respectivamente, *positiva*) quando suas entradas são não-negativas. Indicamos isto escrevendo $C \geq 0$ (respectivamente, $C > 0$).

Dizemos que a matriz simétrica A é *irredutível* se não existe permutação ρ tal que

$$A_\rho = \begin{bmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{bmatrix},$$

onde X e Y são matrizes quadradas. Caso contrário, A é dita uma matriz *redutível*.

As demonstrações dos resultados a seguir podem ser encontrados em Abreu (2014).

Proposição 2 *Seja G um grafo conexo com n vértices e A sua matriz de adjacência então A é irredutível.*

Teorema 3 (Perron-Frobenius) *Suponhamos que A seja matriz não-negativa, irredutível e com autovalores $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Então*

1. $\lambda_1 > 0$ e existe um autovetor associado positivo;
2. $\lambda_1 > \lambda_2$;
3. $|\lambda_i| \leq \lambda_1$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Considerando G um grafo conexo, sua matriz adjacência é irredutível, e o teorema de Perron-Frobenius, garante que o raio espectral é o índice do grafo, ou seja, $ind(G) = \rho(G) = \lambda_1$. Temos também que $\rho(G)$ tem multiplicidade algébrica igual a 1 e, portanto, multiplicidade geométrica igual a 1, isto é, o espaço gerado pelos autovetores associados ao índice é unidimensional. Assim, o teorema da Perron-Frobenius garante ainda que existe um autovetor associado ao índice com todas as coordenadas positivas. Logo, podemos enunciar a seguinte definição:

A *centralidade de autovetor* do vértice v_i do grafo G é a i -ésima coordenada x_i do autovetor unitário positivo $x = (x_1, \dots, x_n)$ associado ao índice do grafo, $\lambda_1 = ind(G)$, ou seja, é o número

$$x_i = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j,$$

onde os a_{ij} são as entradas da matriz de adjacência do grafo.

Nota-se que como a multiplicidade do raio espectral é 1 qualquer autovetor não negativo fornece a mesma ordenação para os vértices. Na prática, para encontrarmos a centralidade de autovetor, o primeiro passo é encontrar os autovalores da matriz $A(G)$ associada ao grafo G , posteriormente encontramos os autovetores associados a cada autovalor de $A(G)$ e tomamos o autovetor associado ao maior autovalor e o normalizamos.

Voltando ao exemplo do grafo da Figura 3, vimos que $\rho(G) = ind(G) = 2,64$. Um autovetor unitário associado a ele é $(0,53, 0,48, 0,18, 0,41, 0,53)$. Embora os vértices v_1, v_2 e v_5 tenham o mesmo grau e, portanto, a mesma centralidade de grau, os vértices v_1 e v_5 tem centralidade de autovetor maior do que a do vértice v_2 .

Esta medida avalia o grau de influência de um vértice na rede, considerando além do grau do próprio, também o grau dos vértices vizinhos, dos vizinhos de seus vizinhos e assim por diante. Esta afirmação decorre do Método da Potência, da Álgebra Linear, aplicado à matriz de adjacência A . É possível verificar que A multiplicada pelo vetor $\mathbf{1} = [1 \dots 1]^T$ fornece o vetor de grau dos vértices,

que $A^2 \cdot \mathbf{1}$ fornece o vetor da soma dos graus dos vizinhos de cada vértice, e assim por diante. O Método da Potência diz que $(A^n \cdot \mathbf{1})_n$ converge para um autovetor associado a λ_1 quando $n \rightarrow \infty$. (ABREU *et al*, 2014, p. 37). Para o autor, esta é portanto, uma medida conveniente quando se estuda a propagação de um fenômeno em rede.

3 Estudo de caso

Para integralizar o curso de Ciências Econômicas da Unesp cada aluno é obrigado a realizar individualmente, com a supervisão de um professor orientador, um trabalho de conclusão de curso, que chamamos neste texto de *monografia*. Este trabalho é desenvolvido em uma temática escolhida pelo aluno e seu orientador. Para o período compreendido entre os anos de 2011 a 2017 há na base de dados do Departamento de Economia da Unesp 514 monografias, entretanto, em apenas 203 encontramos palavras-chaves citadas. A Tabela 1 mostra, dentre estas, a quantidade encontrada por ano.

Tabela 1: Quantidade de monografias no período

Ano	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Quantidade de monografias	39	38	33	29	29	25	10

Fonte: Elaboração dos autores

As subáreas de pesquisa em Economia são classificadas, segundo o CNPq, em dez: Teoria Econômica; Métodos Quantitativos em Economia; Economia Monetária e Fiscal; Crescimento, Flutuações e Planejamento Econômico; Economia Internacional; Economia Industrial; Economia dos Recursos Humanos; Economia Regional e Urbana; Economia do Bem-Estar Social e Economia Agrária e dos Recursos Naturais.

Porém, ao analisarmos as palavras-chave das 203 monografias, observamos dois pontos: o primeiro é que além das dez subáreas citadas acima, encontramos outras sete subáreas, dada a contemporaneidade dos temas abordados nos trabalhos pelos alunos. Estas outras são: economia do crime; economia ambiental; mercado financeiro e finanças; economia comportamental; economia da informação; economia criativa e solidária e economia do esporte. O segundo ponto é que cada trabalho possuía sua temática desenvolvida em até três subáreas.

Na Tabela 2 apresentamos algumas palavras-chave que encontramos nas monografias e que foram categorizadas nas subáreas: métodos quantitativos em economia; crescimento flutuações e planejamento econômico; economia internacional; economia do bem-estar social e economia dos recursos humanos. Para proporcionar uma leitura mais objetiva deste texto, não colocamos nesta tabela as 17 (dezesete) subáreas com as respectivas palavras-chaves encontradas.

Considerando cada vértice do grafo uma monografia as ligações (as arestas) entre elas ocorreram caso houvessem em ambas, ao menos uma subárea em comum. Por exemplo, a monografia 1 (vértice 1) possui palavras-chave das subáreas métodos quantitativos em economia e economia industrial. Já as palavras-chave da monografia 2 (vértice 2) são das subáreas economia internacional, economia industrial e economia agrária e dos recursos naturais. Na monografia 69 (vértice 69) as palavras-chave eram das subáreas métodos quantitativos em economia, economia monetária e fiscal e economia regional e urbana. Assim, entre os vértices 1 e 2 e entre os vértices 1 e 69 há uma aresta, já entre os vértices 2 e 69 não há aresta, veja Figura 4.

Seguindo esta análise para as 203 monografias do período, construímos a matriz adjacência de ordem 203×203 a qual não será descrita neste texto pois é uma matriz com 41.209 entradas.

Tabela 2: Categorização das palavras-chave

Subáreas	palavras-chave
Métodos Quantitativos em Economia	modelos; índice; indicadores econômicos; análise envoltória de dados; eficiência; determinantes; indicadores; processos estocásticos; movimento browniano; distribuição gaussiana; índices financeiros; custo social; produtividade total dos fatores; teoria das filas; métodos quantitativos.
Crescimento Flutuações e Planejamento Econômico	regulamentação e desregulamentação econômica; metas de inflação; índice de preço; crescimento econômico; recessão; inflação; subdesenvolvimento; política de preços; programas de estabilização; ciclos políticos econômicos; eleição; desenvolvimento econômico e social; PIB; investimento.
Economia Internacional	exportações; União Europeia; América do Sul; finanças globalizadas; relações bilaterais; barreiras comerciais; internacionalização; investimento direto estrangeiro; ONU; PNUD; comércio exterior; globalização; fundo monetário internacional; comércio sino-brasileiro; política cambial; cadeias globais de valor.
Economia do Bem-estar social	políticas de transferência de renda; programa bolsa família; políticas sociais; gastos sociais; programa Chile solidário; programas sociais.
Economia dos Recursos Humanos	contrato padrão; geração de empregos; salários; capital humano; mercado de trabalho informal; distribuição de renda; desenvolvimento humano; nova classe média brasileira; emprego; reforma social; escravidão; direitos humanos; responsabilidade social; terceirização.

Fonte: Elaboração dos autores

3.1 Análise dos dados

Para obtermos a centralidade do grau utilizamos o *software Excel*, já para o cálculo da centralidade de autovetor usamos o *software* livre *Octave*.

Considerando a centralidade do grau, os maiores graus foram das monografias (vértices) 136 e 180. Na monografia 136 a temática pertencia às subáreas: economia dos recursos humanos e economia do bem-estar social. Na monografia 180 a temática estava nas subáreas: economia internacional; crescimento, flutuações e planejamento econômico e economia dos recursos humanos.

Assim, segundo esta medida de centralidade, economia internacional; crescimento, flutuações e planejamento econômico; economia dos recursos humanos e economia do bem-estar social são as subáreas centrais da rede temática formada pelas monografias no período de 2011 a 2017.

Na centralidade de autovetor observamos que o maior termo do autovetor unitário associado ao

maior autovalor da matriz adjacência corresponde, assim como na medida de centralidade do grau, às monografias (vértices) das posições 136 e 180. Ou seja, esta medida aponta as mesmas subáreas centrais na rede temática.

Finalizamos este trabalho apresentando o grafo que representa a rede temática das monografias do curso de Ciências Econômicas da Unesp para o período de 2011 a 2017, ver Figura 4. Ele foi construído usando o *software* livre *Gephi*. Observe que os vértices centrais, segundo as duas medidas de centralidade utilizadas neste artigo, receberam a cor vermelha.

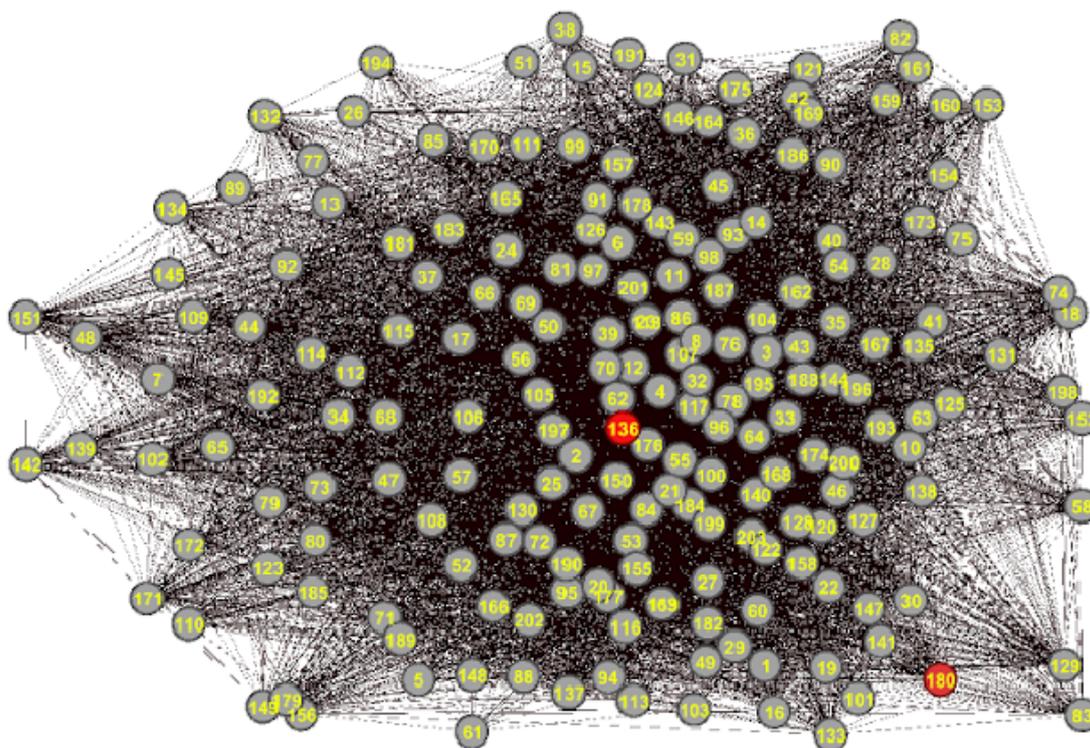


Figura 4: Grafo da rede de monografias com os vértices centrais

4 Considerações finais

Considerando a importância de identificar os vértices mais influentes na conexão da rede formada pela propagação de um fenômeno, neste trabalho apresentamos os estudos iniciais sobre a teoria espectral em grafos, com a qual é possível discutirmos a centralidade em grafos.

Na construção deste trabalho, estudamos as medidas de centralidade do grau e do autovetor e, a partir destas, investigamos a rede temática de monografias (trabalhos de conclusão de curso) dos estudantes do curso de Ciências Econômicas da Unesp para o período de 2011 a 2017.

Os resultados da pesquisa indicaram que, tanto na medida de centralidade do grau quanto na medida de centralidade do autovetor, as monografias que ocupam os vértices centrais desta rede temática pertenciam às subáreas: economia internacional; crescimento, flutuações e planejamento econômico; economia dos recursos humanos e economia do bem-estar social.

Ainda que este trabalho não investigue as causas que levaram às escolhas das temáticas identificadas como centrais, ele traz uma contribuição ao introduzir uma outra metodologia para analisar



o conjunto das monografias do curso de Ciências Econômicas da Unesp. Além disso, os resultados da análise podem servir de base para que o Departamento de Economia analise questões como subáreas predominantes e/ou menos predominante nos trabalhos desenvolvidos, a preferência dos alunos nas subáreas da Economia, o impacto da formação dos professores na escolha dos temas das monografias, entre outras coisas.

Como toda pesquisa, esta também tem limitações. Uma destas limitações diz respeito ao banco de dados utilizado na construção da rede, pois das 514 monografias encontradas para o período, apenas 203 haviam palavras-chave e, somente estas, foram analisadas no período. Outra limitação diz respeito à categorização das palavras-chave nas respectivas subáreas. Esta foi feita pelos autores podendo haver mudanças se for feita por outros pesquisadores.

Estudos futuros poderiam aprofundar a análise desta rede considerando outras medidas de centralidade ou ainda, estabelecer outras relações para determinar as ligações entre as monografias.

5 Referências bibliográficas

ABREU, Nair. *et al.* **Teoria espectral de grafos**: uma introdução. Minicurso apresentado no 3º Colóquio de Matemática da Região Sul, Florianópolis, 2014.

APOSTOL, Tom M. **Calculus**: multivariable calculus and linear algebra, with applications to differential equations and probability. New York: John Wiley & Sons, 1969. v. 2.

ARAUJO, Telmo de. **Álgebra linear**: teoria e aplicações. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

BATAGELJ, Vladimir; MRVAR, Andrej. Some analyses of Erdős collaboration graph. **Social networks**, v. 22, n. 2, p. 173-186, 2000. Disponível em: <http://vlado.fmf.uni-lj.si/pub/networks/doc/erdos/erdos.pdf>. Acesso em: 15 dez. 2019.

BAVELAS, Alex. A mathematical model for group structures. **Human organization**, v. 7, n. 3, p. 16-30, 1948.

BONACICH, Phillip. Power and centrality: a family of measures. **American Journal of Sociology**, v. 92, n. 5, p. 1170-1182, 1987.

DUARTE, Emeide Nóbrega. Conexões temáticas em gestão da informação e do conhecimento no campo da ciência da informação. **Informação & Sociedade**, v. 21, n. 1, p. 159-173, jan./abr. 2011.

FREEMAN, Linton C. A set of measures of centrality based on betweenness. **Sociometry**, v. 40, n. 1, p. 35-41, 1977.

FREEMAN, Linton C. Centrality in social networks conceptual clarification. **Social networks**, v. 1, n. 3, p. 215-239, 1978.

JURKIEIWICZ, Samuel. **Grafos**: uma introdução. Rio de Janeiro: OBMEP, 2009. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila5.pdf>. Acesso em: 15 dez. 2019.



NIEMINEN, Juhani. On the centrality in a graph. **Scandinavian Journal of Psychology**, v. 15, n. 1, p. 332-336, 1974.

RIBEIRO, Haroldo V. *et al.* The dynamical structure of political corruption networks. **Journal of Complex Networks**, v. 6, n. 6, p. 989-1003, 2018.

SABIDUSSI, Gert. The centrality index of a graph. **Psychometrika**, v. 31, n. 4, p. 581-603, 1966.

SHAW, Marvin E. Group structure and the behavior of individuals in small groups. **The Journal of Psychology**, v. 38, n. 1, p. 139-149, 1954.