



**Revista Eletrônica  
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664  
Volume 18, jul. 2020

**Bruno Donadelli Trajano  
Mattos**

Secretaria da Educação de SP  
b.donadelli@hotmail.com

## **Um olhar analítico sobre o teorema de Tales e a área do círculo**

An analytical look at the Tales theorem and the circle area.

### **Resumo**

Este artigo procura provar, do ponto de vista do Cálculo Diferencial e da Análise Matemática, o Teorema de Tales e a existência única do valor da área de um círculo qualquer. Nele, o leitor poderá entender e preencher as lacunas criadas pelas literaturas nacionais no ensino deste tema. Embora as ferramentas aqui presentes sejam mais sofisticadas, sua escrita volta-se principalmente para o professor de Matemática do ensino básico. Sendo assim, as etapas presentes nas demonstrações dos teoremas são transparentes e bem argumentadas. Preserva-se, portanto, a lucidez e rigor exigido nesta disciplina.

**Palavras-chave:** Teorema de Tales. Existência e unicidade. Área do círculo.

### **Abstract**

This paper seeks to prove, from the point of view the Differential Calculus and Mathematical Analysis, the Tales Theorem, and unique existence of the value of the area of any circle. In it, the reader will be able to understand and fill in the gaps created by the national literature in the teaching of this theme. Although the tools here are more sophisticated, their writing is mainly for the primary school math teacher. Thus, the stages present in the theorem demonstrations are transparent and well argued. Therefore, the lucidity and rigor required in this discipline is preserved.

**Keywords:** Tales theorem. Existence and oneness. Area of the circle.



# 1 Introdução

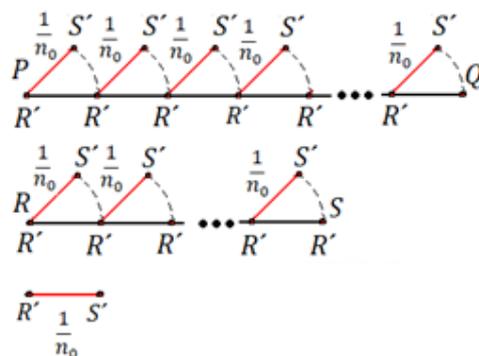
Nos últimos anos, o ensino de Matemática na educação básica tem sido abusivamente direcionado às resoluções de problemas contextualizados. O exame nacional do ensino médio (ENEM) transpõe bem este fato nas diversas áreas do conhecimento, inclusive nas ciências exatas. Estruturado em forma de longos textos, o modelo adotado para as avaliações vem levantando debates aos especialistas, vide [1]. Discute-se, principalmente, até que ponto a leitura interpretativa deva ser enfatizada pois, da forma como é proposta, algumas disciplinas como, por exemplo, Física, Química e Matemática perdem ênfase ao formalismo técnico e estrutural.

Autores de livros didáticos nacionais têm buscado estruturar suas obras nos moldes cobrados pelo ENEM. Daí, percebe-se a similaridade existente entre os diversos textos nacionais voltado a esse público.

Pesquisadores, professores e autores relatam, cada vez mais, a precariedade existente no que diz respeito aos fundamentos lógicos apresentados pelo modelo atual de educação (consulte [1]). Questionam-se, nos espaços promovidos a debates educacionais, os possíveis efeitos colaterais que serão gerados nos estudantes contemporâneos.

Procurando compreender alguns temas mais complexos presentes na matemática do ensino básico como, por exemplo, números irracionais, Teorema de Tales, áreas, exponenciais e logaritmos pudemos perceber, após diversas consultas a obras nacionais consagradas, a quantidade exorbitante de lacunas existentes nos moldes axiomáticos de cada um deles. Tratando-se de conteúdos com características próprias decidimos compartilhar, neste artigo, os conhecimentos que pudemos adquirir pesquisando a respeito da demonstração do Teorema de Tales e, também, a existência única da área de um círculo. Diferente das abordagens clássicas apresentadas pelas fontes disponíveis no mercado nacional, expomos o assunto em sua forma mais técnica, a fim de sanar as possíveis dúvidas existentes entre alunos e professores dos anos iniciais da educação básica. No entanto, o texto aqui exposto poderá contribuir a universitários que pretendem exercer futuramente a carreira docente. Esperamos, portanto, contribuir no enriquecimento cultural dos leitores que buscam maior solidez no estudo dos temas aqui presentes.

Para a melhor compreensão da leitura que aqui será apresentada, iremos supor como conhecidas as ideias básicas sobre geometria, trigonometria e limites de uma variável. Em geometria ressaltamos as notações  $XY$  e  $\overline{XY}$  que aqui serão utilizadas. A primeira delas refere-se ao *segmento de reta* definido pelos pontos extremos  $X$  e  $Y$  já, a segunda indica a *medida* do segmento  $XY$ . Finalmente, ainda no contexto da geometria, recorda-se que um segmento  $PQ$  é *comensurável* a outro  $RS$ , chamado *unidade de medida* (com  $\overline{RS} = 1$ ), se existir um terceiro segmento  $R'S'$  que seja submúltiplo comum de  $PQ$  e  $RS$ . Caso contrário, dizemos que  $PQ$  e  $RS$  são segmentos *incomensuráveis*. A Figura 1 exemplifica segmentos comensuráveis.



**Figura 1** – Segmento  $PQ$  comensurável a  $RS$ .

## 2 Definições e teoremas auxiliares

Apresentaremos, nesta seção, uma série de definições, postulados e teoremas que serão utilizados na caminhada teórica deste artigo.

**Definição 2.1.** Um subconjunto  $C$  não vazio dos números reais é *limitado inferiormente* se existir um real  $L$  de tal forma que  $L \leq x$ , para qualquer que seja o elemento  $x$  pertencente a  $C$ .

**Definição 2.2.** Dizemos que um subconjunto  $C$  não vazio dos números reais é *limitado superiormente* se existir um real  $M$  de tal forma que  $x \leq M$ , para todo  $x$  pertencente a  $C$ .

**Definição 2.3.** Dizemos que subconjunto  $C$  não vazio dos números reais é *limitado* se for limitado inferiormente e superiormente.

Perceba, pelas definições 2.1 e 2.2, que o valor concedido para  $L$  ou  $M$  *não necessita ser único*. Tome, por exemplo, o conjunto  $C = \{x \in \mathbb{R}; x < 7\}$ . Nele  $M = 7$  satisfaz a Definição 2.2 uma vez que  $x \leq 7$  para cada real assumido por  $x$  em  $C$ . Porém, note também que qualquer candidato numérico acima de sete pode ser escolhido para exercer o papel de  $M$ . Assim, 7 é o menor elemento dos reais que pode ser atribuído para  $M$ .

É costume nas literaturas nacionais designar o valor de  $L$ , da Definição 2.1, como sendo uma *cota inferior*. Da mesma forma, utiliza-se a nomenclatura *cota superior* para os valores de  $M$  que satisfazem a Definição 2.2. Neste artigo, iremos preservar estas denominações.

**Definição 2.4.** Seja  $C$  um subconjunto não vazio dos números reais. O *maior valor* de  $L$ , que verifica a Definição 2.1 é chamado de *ínfimo* do conjunto  $C$ , notação:  $L = \inf(C)$ .

A Definição 2.4, embora didática para fins pedagógicos, não é viável do ponto de vista da formalização matemática para provar teoremas. Contornaremos este impasse através da

**Definição 2.4.** Um número  $L$  é chamado de *ínfimo* de um subconjunto  $C$ , não vazio dos reais, se satisfazer as seguintes condições:

- 1)  $L \leq x$ , para qualquer que seja o elemento  $x$  do conjunto  $C$ ,
- 2) Se  $L_1 \leq x$  para todo  $x$  pertencente a  $C$ , então  $L_1 \leq L$ .



Por esta definição, podemos afirmar que o ínfimo  $L$  de um conjunto  $C$  é sempre *único*, já que se  $L = \inf(C)$  e  $\bar{L} = \inf(C)$  então, pelo item 2 da Definição 2.4 teríamos que  $\bar{L} \leq L$  e  $L \leq \bar{L}$  implicando, portanto, que  $\bar{L} = L$ .

**Definição 2.5.** Considere um subconjunto  $C$  não vazio dos reais. O *menor valor* de  $M$ , que satisfaz a Definição 2.2 é denominado *supremo* do conjunto  $C$ , notação:  $M = \sup(C)$ .

Ressaltamos a possibilidade da transcrição da Definição 2.5 de forma análoga a realizada para a Definição 2.4. Propomos ao leitor realizá-la para que, em seguida, possa provar a *existência única* do supremo.

**Postulado 2.1 (transporte de segmentos).** Considere  $\alpha$  um plano que contém todos os objetos matemáticos descritos a seguir. Sejam  $A$  e  $B$  dois pontos distintos responsáveis pela determinação *única* do segmento  $AB$ . Se escolhermos dois pontos aleatórios  $A'$  e  $X$  em  $\alpha$ , de tal modo que  $A' \neq X$ , então a semi-reta  $A'X$  determinará um *único* ponto  $B'$  que tornará  $A'B'$  congruente a  $AB$ .

Finalmente, conforme relatado anteriormente, enunciaremos a seguir vários teoremas. Contudo, procurando evitar uma abordagem extremamente extensiva, sugerimos que os interessados consultem as referências citadas abaixo para constatarem as demonstrações omitidas.

**Teorema 2.1 (princípio da Boa Ordem).** Todo subconjunto *não vazio* dos naturais possui um menor elemento.

Demonstração. Veja [2].

**Teorema 2.2 (do supremo).** Todo subconjunto de números reais, não vazio e limitado superiormente, admite supremo.

Demonstração. Consulte [2].

**Nota:** Analogamente a demonstração do Teorema 2.2, pode-se provar que:

*“Todo subconjunto de números reais, não vazio e limitado inferiormente, admite ínfimo.”*

**Teorema 2.3 (do confronto).** Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  três seqüências e suponhamos que exista um natural  $n_0$  tal que

$$a_n \leq b_n \leq c_n,$$

para todo  $n \geq n_0$ . Nestas condições, se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n,$$

então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L.$$



Demonstração. Veja [3]

**Teorema 2.4 (limite fundamental trigonométrico).** Se  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = \frac{\operatorname{sen}x}{x}$ , então

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

Demonstração. Consulte [3].

**Teorema 2.5 (de Arquimedes).** Se  $x$  e  $y$  são valores reais quaisquer, *estritamente* positivos, então existe pelo menos um natural  $n$  tal que  $n \cdot x > y$ .

Demonstração. Veja [3].

**Nota:** Pelo Teorema 2.1 podemos afirmar que o conjunto  $A = \{n \in \mathbb{N}; n \cdot x > y\}$  (satisfazendo as hipóteses do Teorema 2.5) terá, *necessariamente*, um natural mínimo  $n_0$  verificando a condição  $n_0 \cdot x > y$ . Inferese daí que  $A = \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, n_0 + 3, \dots\}$ .

### 3 As sutilezas presentes na demonstração do Teorema de Tales

Abaixo, enunciaremos e provaremos um teorema que será fundamental para auxiliar-nos na demonstração do Teorema 3.2 e, também, na demonstração da existência e unicidade na área do círculo. Por não ser *referenciado* pelos livros presentes na formação básica, iremos demonstrá-lo.

**Teorema 3.1** Seja  $n$  um número pertencente ao conjunto  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ . Sejam, ainda, os conjuntos *não vazios*  $A = \{v_i, i \in \mathbb{N}\}$  e  $B = \{V_j, j \in \mathbb{N}\}$  tais que todo elemento  $v_i$  de  $A$  seja *estritamente* menor do que qualquer elemento  $V_j$  de  $B$ . Se para cada real  $\varepsilon > 0$  existir um natural  $n_0 \in A$  que satisfaça a implicação

$$n > n_0 \Rightarrow V_n - v_n < \varepsilon,$$

então *existirá e, será único*, o real  $\alpha$  que verifica a condição

$$v_i \leq \alpha \leq V_j,$$

para  $i$  e  $j$  pertencentes a  $\mathbb{N}$ .

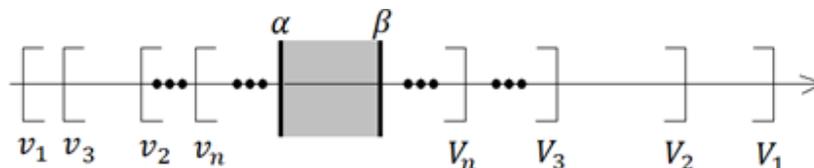
Demonstração. Inicialmente, façamos a prova da existência e, em seguida, mostraremos a unicidade.

A princípio podemos inferir que  $v_i \leq V_1$  e  $v_1 \leq V_j$  pois, por hipótese, temos que  $v_i < V_j$  para todo  $i$  e  $j$  pertencentes a  $\mathbb{N}$ . Daí, pelo Teorema 2.2, o conjunto  $A$  admitirá um *único* supremo  $\alpha$  e, o conjunto  $B$ , admitirá um *único* ínfimo  $\beta$ ; temos, portanto, que

$$v_i \leq \alpha \text{ e } \beta \leq V_j, \tag{1}$$

para quaisquer  $i$  e  $j$  em  $\mathbb{N}$ .

Mediante as informações presentes no parágrafo anterior, mostremos que  $\alpha = \beta$ . Para tanto, vamos supor, por absurdo, que  $\alpha \neq \beta$ . Posto isto, pela tricotomia dos números reais teremos as possibilidades *excludentes*:  $\alpha < \beta$  ou  $\alpha > \beta$ . Tratando-se de provas análogas, demonstraremos apenas o caso em que  $\alpha < \beta$  e, deixaremos a cargo do leitor, o caso restante.



**Figura 2** – Representação geométrica de  $\alpha < \beta$ .

Pela hipótese apresentada em (1), juntamente com a desigualdade  $\alpha < \beta$ , é correto deduzirmos as implicações:

$$\begin{aligned} v_i \leq \alpha < \beta \leq V_j &\Rightarrow \begin{cases} v_i \leq \alpha < V_j \\ v_i < \beta \leq V_j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_i \leq \alpha \leq V_j \\ v_i \leq \beta \leq V_j \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} v_i \leq \beta \leq V_j \\ -V_j \leq -\alpha \leq -v_i \end{cases} \end{aligned}$$

Na última delas, fazemos a soma dos membros obtidos em ambas as desigualdades. Justificamos, desta forma, a validade implicativa

$$-(V_j - v_i) \leq \beta - \alpha \leq V_j - v_i \Rightarrow V_j - v_i \geq \beta - \alpha, \quad (2)$$

para  $i$  e  $j$  elementos de  $\mathbb{N}$ . Contudo, a hipótese da proposição nos permite atribuímos a  $\varepsilon$  qualquer valor positivo, inclusive o da diferença  $\beta - \alpha$ . Se assim o fizermos, será possível garantirmos a existência de um natural  $n_0$  em  $\mathbb{N}$  de tal forma que verifique a sentença

$$n > n_0 \Rightarrow V_n - v_n < \beta - \alpha.$$

Esta, contradiz a desigualdade  $V_j - v_i \geq \beta - \alpha$  obtida em (2), pois para  $i = n (> n_0) = j$  temos que  $V_n - v_n \geq \beta - \alpha$ . Daí, não restará dúvidas de que  $v_i \leq \alpha = \beta \leq V_j$  para  $i$  e  $j$  pertencentes a  $\mathbb{N}$ .

Por fim, mostraremos a unicidade de  $\alpha$ . Para tanto, vamos supor que existam dois valores  $\alpha$  e  $\bar{\alpha}$  que verifiquem, simultaneamente, as condições  $v_i \leq \alpha \leq V_j$  e  $v_i \leq \bar{\alpha} \leq V_j$ . Esta, por sua vez, poderá ser indicada como sendo  $-V_j \leq -\bar{\alpha} \leq -v_i$ . Tais fatos, nos permitem afirmarmos que

$$\begin{aligned} \begin{cases} v_i \leq \alpha \leq V_j \\ -V_j \leq -\bar{\alpha} \leq -v_i \end{cases} &\Rightarrow -(V_j - v_i) \leq \alpha - \bar{\alpha} \leq V_j - v_i \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\alpha - \bar{\alpha}| \leq V_j - v_i \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 \leq |\alpha - \bar{\alpha}| \leq V_n - v_n. \end{aligned}$$

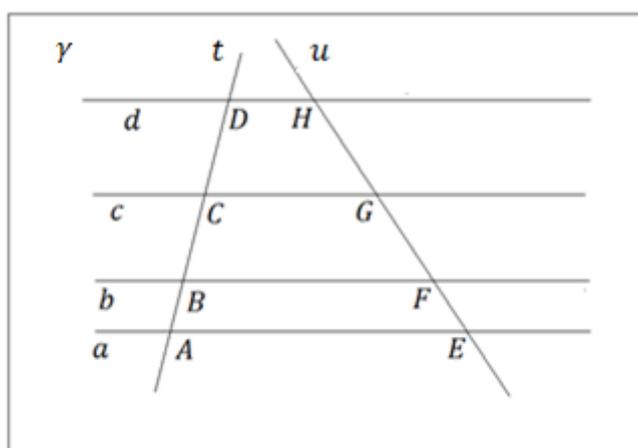
Finalmente como

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - v_n),$$

segue, pelo Teorema 2.3, que  $\alpha = \bar{\alpha}$ .

**Teorema 3.2 (de Tales).** Um feixe de retas paralelas *distintas* determina, em transversais, segmentos correspondentes proporcionais.

**Demonstração.** Procurando auxiliar-nos na demonstração, façamos a construção de uma figura geométrica ilustrativa. Para tanto, tracemos quatro retas paralelas distintas  $a, b, c$  e  $d$ , contidas em um plano  $\gamma$  (lê-se: gamma), cujas distâncias entre duas consecutivas não sejam, necessariamente, iguais entre si. Suponha que  $b$  e  $c$  estejam entre  $a$  e  $d$  com  $b$  abaixo de  $c$  e, ainda, acima de  $a$ . Em  $c$ , tomemos dois pontos distintos  $C$  e  $G$  e, por estes, façamos duas transversais  $t$  e  $u$ . Usemos a letra  $A$  para indicar a interseção de  $t$  com  $a$ , a letra  $B$  para designar a interseção de  $t$  com  $b$  e a letra  $D$  para indicar a interseção de  $t$  com  $d$ . Chamemos de  $E$  o ponto correspondente de  $A$  que esteja, simultaneamente, sobre as retas  $u$  e  $a$ . Da mesma forma, chamemos de  $F$  o correspondente de  $B$  que esteja tanto em  $b$  quanto em  $u$  e, finalmente, iremos denominar por  $H$  o correspondente de  $D$  presente tanto em  $d$  quanto em  $u$ . Descrevemos, portanto, a Figura 3 dada a seguir.



**Figura 3** - Construção no plano  $\gamma$  de um feixe de retas paralelas cortada por duas transversais.

Dentre as possibilidades existentes, provaremos apenas que a razão  $\frac{CD}{AB}$  é igual a  $\frac{GH}{EF}$ ; as demais, serão deixadas como exercícios para o leitor.

Visando encontrar os valores das medidas de  $CD$  e  $GH$ , tomaremos os segmentos distintos  $AB$  e  $EF$  como objetos de comparação, isto é, como sendo *unidades de medida*. Nestas condições, haverá dois casos a serem analisados: ou  $CD$  será comensurável com  $AB$  e  $GH$  também o será com  $EF$  ou, então,  $CD$  será incomensurável com  $AB$  e  $GH$  também o será com  $EF$ . No primeiro caso, dizemos que as razões  $\frac{CD}{AB}$  ou  $\frac{GH}{EF}$  são expressas por um *número racional* e, no segundo, por um *número irracional*. Havendo duas possibilidades a serem apuradas, façamos o estudo apenas deste último.

Supondo que o segmento  $AB$  seja a *unidade de medida* do segmento  $CD$ , é correto, pelo Teorema 2.5, afirmarmos que existe um natural  $n (> 1)$  que satisfaz a relação  $\overline{AB} > \frac{1}{n}$ ; pois, se  $\overline{AB} = 1 = \overline{AB}$ , então haverá ao menos um natural  $n$  que verifica a desigualdade  $n \cdot \overline{AB} > \overline{AB} = 1$ , isto é,  $n \cdot \overline{AB} > 1$  ou, ainda,

$$\overline{AB} = 1 > \frac{1}{n}.$$

Chamemos de  $u$  o segmento de medida  $\frac{1}{n}$ . Todavia, convêm recordarmos que esse deverá ser submúltiplo de  $AB$  mas não de  $CD$ . Nestas condições, o Teorema 2.5 em concomitância ao Postulado 2.1 nos assegura que: para todo  $u$  (dependente de  $n$ ) existe um natural *mínimo*  $m_n + 1$  (sendo  $m$  um valor constante cuja determinação estará em função  $n$ ) de tal modo que a desigualdade

$$\frac{CD}{AB} < (m_n + 1) \cdot \frac{1}{n} = \frac{m_n + 1}{n},$$

seja satisfeita. Daí, podemos afirmar que  $\frac{m_n}{n} < \frac{CD}{AB}$  pois, caso contrário, haveríamos dois tipos de contradição:  $AB$  ser comensurável com  $CD$  ou  $\frac{m_n}{n} \geq \frac{m_n + 1}{n}$  ( $= \frac{m_n}{n} + \frac{1}{n}$ ). Embasados nestas análises, é correto dizermos que

$$\frac{m_n}{n} < \frac{CD}{AB} < \frac{m_n}{n} + \frac{1}{n}, \quad (3)$$

para  $n$  em  $\mathbb{N}$ . Formemos, então, dois conjuntos  $A$  e  $B$  de elementos racionais. O primeiro será formado pelas razões  $m_1, \frac{m_2}{2}, \frac{m_3}{3}, \dots, \frac{m_i}{i}, \dots$ , isto é,  $A = \{v_i = \frac{m_i}{i}, i \in \mathbb{N}\}$  e, o segundo, pelas razões  $m_1 + 1, \frac{m_2}{2} + \frac{1}{2}, \frac{m_3}{3} + \frac{1}{3}, \dots, \frac{m_j}{j} + \frac{1}{j}, \dots$ , ou seja,  $B = \{V_j = \frac{m_j}{j} + \frac{1}{j}, j \in \mathbb{N}\}$ . Perceba que para todo  $i$  e  $j$  em  $\mathbb{N}$  teremos que  $v_i < \frac{CD}{AB} < V_j$  implicando, assim, que  $v_i < V_j$ . Além disto, dado um real  $\varepsilon (> 0)$ , existe um natural  $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$  de tal forma que as condicionais

$$n > n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} = V_n - v_n < \varepsilon,$$

sejam verdadeiras.

As hipóteses apresentadas no parágrafo anterior se encaixam naquelas exigidas pelo Teorema 3.1. Podemos, portanto, afirmar que *existe* um *único* real  $\overline{CD} = \frac{CD}{AB}$  que verifica a condição

$$\frac{m_i}{i} \leq \overline{CD} \leq \frac{m_j}{j} + \frac{1}{j},$$

para  $i$  e  $j$  pertencentes a  $\mathbb{N}$ .

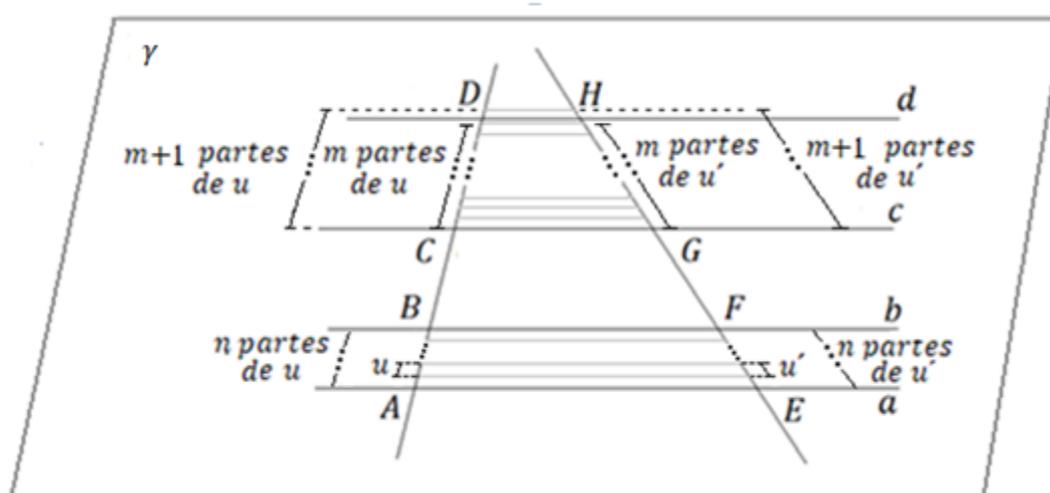
Para finalizarmos, devemos provar que  $\frac{GH}{EF} = \overline{CD} = \frac{CD}{AB}$ ; porém, faz-se por necessário lembrarmos que:

*“Seja  $\beta$  um plano ao qual todos os objetos matemáticos descritos a seguir estão inseridos. Seja, ainda,  $PQ$  o segmento cujas extremidades encontram-se nas interseções de duas retas paralelas distintas  $r$  e  $s$  com uma transversal  $y$ . Suponha que o ponto  $P$  esteja pertencente tanto a  $r$  quanto a  $y$ . Considere, também,  $w$  como sendo uma transversal distinta de  $y$ . Pela letra  $R$  indiquemos o ponto comum nas retas  $r$  e  $w$  e, usemos  $S$ , para representar o ponto simultâneo de  $s$  e  $w$ . Seleccionemos, entre  $P$  e  $Q$ ,  $k - 1$  pontos distintos  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_{k-2}$  e  $Y_{k-1}$  de tal modo que  $\overline{PY_1} = \overline{Y_1Y_2} = \overline{Y_2Y_3} = \dots = \overline{Y_{k-1}Q}$ . Se em cada um desses  $k - 1$  pontos traçarmos uma única reta paralela a  $r$ , então suas interseções a  $w$  de-*

terminará  $k - 1$  pontos  $W_1, W_2, W_3, \dots, W_{k-2}$  e  $W_{k-1}$ , correspondentes a  $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_{k-2}$  e  $Y_{k-1}$ , satisfazendo a condição  $\overline{RW_1} = \overline{W_1W_2} = \overline{W_2W_3} = \dots = \overline{W_{k-1}S}$ .”

demonstração, esta, proposta como exercício para o leitor (caso necessário consulte [4]). Com base nestas informações justificamos que: a cada um dos  $n - 1$  pontos distintos e equidistantes entre si tomados entre  $A$  e  $B$ , é possível, através de cada um deles, traçarmos  $n - 1$  retas paralelas a  $b$  obtendo, desta forma,  $n - 1$  pontos distintos e equidistantes em  $EF$ . Por conseguinte, alega-se que: para todo valor de  $n$  em  $\mathbb{N}$  associa-se um único segmento  $u$  em  $AB$  e  $u'$  em  $EF$  que satisfaz, além de (3), a sentença

$$\frac{m_n}{n} < \frac{GH}{EF} < \frac{m_n}{n} + \frac{1}{n}.$$



**Figura 4** - Ao repartirmos o segmento  $AB$  em  $n$  partes e, conseqüentemente, o correspondente  $EF$  nesta mesma quantidade, ambos tornaram-se múltiplos das unidades  $u$  e  $u'$ .

Esta sentença, conforme analisada anteriormente, satisfará as hipóteses do Teorema 3.1. Logo, concluímos que  $\frac{GH}{EF}$  existe e será unicamente determinado pelo valor real de  $\overline{CD}$  ( $= \frac{CD}{AB}$ ).

## 4 Notações importantes

No decorrer deste artigo, será frequente a aparição de dois tipos bem específicos de funções. Por este fato, será exaustivo defini-las em todas as ocasiões. De agora em diante, contornaremos este impasse deixando claro que sempre que nos referirmos as notações  $A_n^P$  e  $A_n^P$  estaremos tratando, exclusivamente, das funções:  $A^P: \mathbb{N} \setminus \{1,2\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$A_n^P = \text{Área do polígono regular de } n \text{ lados inscrito em } \mathcal{C}_1$$

e  $A^P: \mathbb{N} \setminus \{1,2\} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$A_n^P = \text{Área do polígono regular de } n \text{ lados circunscrito em } \mathcal{C}_1,$$

onde  $\mathbb{N}\setminus\{1,2\}$ ,  $\mathbb{R}$  e  $\mathcal{C}_1$  representam, respectivamente, conjunto cujos elementos são  $3,4,5,\dots$ , conjunto dos números reais e círculo de raio *unitário*  $x^2 + y^2 \leq 1$  contido no plano cartesiano  $xOy$ .

## 5 Obtenção das leis de $A_n^p$ e $A_n^p$ em função de $n$

A determinação da área de um polígono regular inscrito a  $\mathcal{C}_1$  em função do número  $n$  de lados é calculada pela fórmula apresentada na

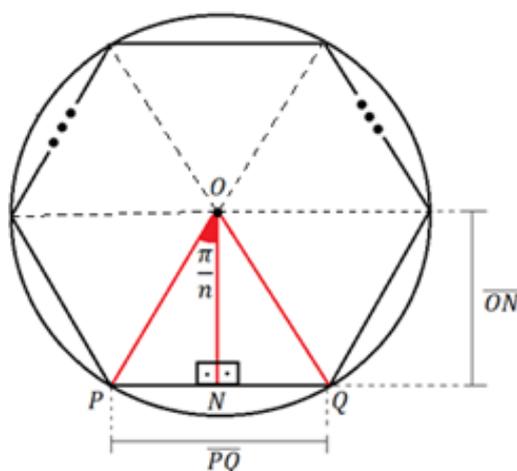
**Proposição 5.1.** Se  $n$  é um elemento do conjunto  $\mathbb{N}\setminus\{1,2\}$ , então

$$A_n^p = \frac{n}{2} \cdot \text{sen} \left( \frac{2 \cdot \pi}{n} \right).$$

**Demonstração.** Na circunferência  $\mathcal{C}_1$ , façamos a escolha de  $n$  pontos distintos de tal forma que, dois pontos adjacentes quaisquer sejam sempre equidistantes entre si. Com origem em um deles e, extremidade no seu adjacente (percorrido no sentido anti-horário), tracemos  $n$  segmentos. A união de cada um deles formará um polígono regular  $p$  de  $n$  lados inscrito em  $\mathcal{C}_1$ .

Chamemos de  $O$  o centro de  $\mathcal{C}_1$  e  $P$  e  $Q$  dois vértices consecutivos do polígono formado. Nos pontos  $O, P$  e  $Q$ , tracemos um triângulo isósceles de base  $PQ$  coincidente a um dos  $n$  lados de  $p$ . Nele, façamos a projeção ortogonal de  $O$  em  $PQ$  e usemos a letra  $N$  para indicar este novo ponto. O segmento de reta que possui as extremidades em  $O$  e  $N$ , irá repartir o triângulo  $OPQ$  em dois outros:  $OPN$  e  $OQN$ , congruentes entre si.

Se pelo centro  $O$  de  $\mathcal{C}_1$  traçarmos  $n - 2$  segmentos cujas demais extremidades sejam definidas pelos  $n - 2$  vértices de  $p$  (distintos de  $P$  e  $Q$ ), então,  $p$  ficará repartido  $n$  triângulos isósceles e congruentes entre si. Tendo em vista esta construção, inferimos que a medida do ângulo central  $POQ$  vale  $\frac{2 \cdot \pi}{n}$  radianos e, conseqüentemente, a medida do ângulo  $PON$  vale  $\frac{\pi}{n}$  radianos.



**Figura 5** - Construção de um polígono regular de  $n$  lados inscrito em  $\mathcal{C}_1$ .

Pelo fato do segmento  $PQ$  definir um dos  $n$  lados de  $p$ , usaremos a notação  $\overline{PQ} = l_n$ . Da mesma forma, indicaremos a medida do apótema  $ON$  como sendo  $a_n$ , isto é,  $\overline{ON} = a_n$ .



A forma como o triângulo retângulo  $OPN$  foi construído nos permite representar as medidas de seus catetos  $ON$  e  $PN$  como sendo  $\overline{ON} = \cos \frac{\pi}{n}$  e  $\overline{PN} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$ . Contudo, sabemos que  $\overline{PN} = \frac{1}{2} \cdot l_n$  justificando, portanto, que  $l_n = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$ . Estas informações já nos possibilita encontrarmos  $A_n^p$  pois, da geometria euclidiana, o seu valor pode ser obtido através da multiplicação do seu semiperímetro pelo seu apótema (veja [4]), ou seja,

$$A_n^p = \left(\frac{n \cdot l_n}{2}\right) \cdot a_n. \quad (4)$$

Assim, após substituirmos em (4) os valores de  $l_n$  e  $a_n$  por  $2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}$  e  $\cos \frac{\pi}{n}$ , inferimos que

$$A_n^p = n \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{\pi}{n}. \quad (5)$$

Finalmente, com o auxílio da fórmula trigonométrica  $\operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} 2\theta$  aplicada em (5) obtemos o resultado aguardado. ■

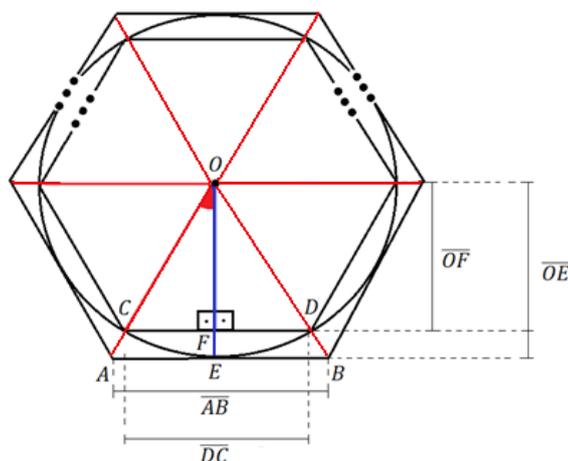
Supondo que um polígono regular de  $n$  lados esteja circunscrito a uma circunferência  $\mathcal{C}_1$  é possível obtermos uma lei, em função de  $n$ , para  $A_n^p$ . Esta, será apresentada na

**Proposição 5.2.** Se  $n$  é um elemento do conjunto  $\mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ , então

$$A_n^p = n \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{n}\right).$$

**Demonstração.** Com efeito, tomemos a circunferência  $\mathcal{C}_1$  e, sobre esta, façamos a construção de dois polígonos regulares com  $n$  lados: um inscrito  $p$  e outro circunscrito  $P$ . Contudo, façamos com que cada um dos  $n$  lados de um polígono seja paralelo aos  $n$  lados do outro. Logo após, liguemos o centro  $O$  de  $\mathcal{C}_1$  (que coincide com os centros de ambos os polígonos) com cada um dos  $n$  vértices do polígono circunscrito  $P$ . Perceba, daí, que ambos os polígonos ficaram repartidos em  $n$  triângulos isósceles disjuntos e congruentes entre si.

No polígono  $P$ , façamos a escolha de um entre os  $n$  possíveis triângulos encontrados. Chamemos de  $A$  e de  $B$  os vértices da sua base e  $C$  e  $D$  os pontos referentes aos vértices do triângulo menor pertencentes aos segmentos  $OA$  e  $OB$ . Para finalizarmos a construção, tracemos um segmento cuja primeira extremidade coincida com  $O$  e, a segunda, seja a projeção ortogonal de  $O$  sobre  $AB$ . Usemos a letra  $E$  para representá-lo e  $F$  para indicar o ponto de interseção de  $OE$  com  $CD$ . As descrições acima nos conduzem a Figura 6:



**Figura 6** - Construção de polígonos regulares circunscritos e inscritos a  $\mathcal{C}_1$ .

Dela, inferimos que os triângulos  $OAB$  e  $OCD$  são semelhantes valendo, portanto, a proporção:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OF}} \quad (6)$$

Por esta construção afirmamos que  $CD$  e  $AB$  são, na verdade, um dos  $n$  lados congruentes dos polígonos regulares  $p$  e  $P$  de  $\mathcal{C}_1$ . Assim, podemos expressar suas medidas pelas notações  $l_n$  e  $L_n$ . Analogamente, perceba que  $OF$  representa o apótema de  $p$  em  $\mathcal{C}_1$ . Daí, argumentamos que  $\overline{OF} = a_n$ . Finalmente, como  $\overline{OE}$  é o raio de  $\mathcal{C}_1$  esclarecemos, ainda, que  $\overline{OE} = 1$ . Tais informações, quando substituídas em (6) nos conduz a igualdade

$$\frac{L_n}{l_n} = \frac{1}{a_n},$$

cujo isolamento de  $L_n$  nos trás que

$$L_n = \frac{l_n}{a_n}.$$

Contudo, tais hipóteses quando agregadas com aquelas presentes na demonstração do Proposição 5.1 e, também, ao fato que

*“A área de qualquer polígono regular circunscritível em um círculo  $\lambda$  é obtida através da multiplicação do seu semiperímetro pelo raio do círculo a ele circunscrito (veja [4])”*

nos garante que

$$A_n^P = \left( \frac{n \cdot L_n}{2} \right) \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{n \cdot l_n}{a_n} \right) = n \cdot \frac{\text{sen} \frac{\pi}{n}}{\text{cos} \frac{\pi}{n}} = n \cdot \text{tg} \frac{\pi}{n},$$

encerrando, assim, a dedução da fórmula esperada. ■



## 6 Existência e unicidade da área do círculo

Para provarmos o fato presente no título acima, será imprescindível mostrarmos dois lemas. Começemos, então, comprovando o

**Lema 6.1.** Dado o real  $\varepsilon > 0$ , existe um natural  $n_0 \geq 3$  que torna a diferença  $A_n^p - A_n^p$  inferior a  $\varepsilon$ , para todo natural  $n > n_0$ .

Demonstração. O enunciado proposto acima equivale a provarmos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n^p - A_n^p) = 0. \quad (7)$$

No entanto, podemos substituir em (7) as fórmulas retratadas nas proposições 5.1 e 5.2 acarretando no

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( n \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} - \frac{n}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{2 \cdot \pi}{n} \right) = 0.$$

Este, por sua vez, estará comprovado se formos capazes de provarmos que para todo real  $x \neq 0$  a diferença  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}} \cdot \pi \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{2 \cdot \pi}{x}}{\frac{2 \cdot \pi}{x}} \cdot \pi \right)$  seja nula ou, ainda,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}} \cdot \frac{\pi}{\operatorname{cos} \frac{\pi}{x}} \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{2 \cdot \pi}{x}}{\frac{2 \cdot \pi}{x}} \cdot \pi \right) = 0.$$

Perceba que as substituições  $u = \frac{\pi}{x}$  e  $t = \frac{2 \cdot \pi}{x}$  tendem a zero a medida que  $x$  tenda a infinito. Portanto, com o auxílio do Teorema 2.4 deduzimos o resultado almejado, pois

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} u}{u} \cdot \frac{\pi}{\operatorname{cos} u} \right) - \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{sen} t}{t} \cdot \pi \right) = \pi - \pi = 0. \quad \blacksquare$$

**Lema 6.2.** Existe uma única área  $A$  de  $\mathcal{C}_1$  representada pelo valor de  $\pi$ .

Demonstração. Podemos constatar, de forma intuitiva, que a região ocupada por qualquer polígono regular  $p$ , inscrito em  $\mathcal{C}_1$ , está contida naquela ocupada por esta e, além disto, a região ocupada por  $\mathcal{C}_1$  possui todos os seus pontos pertencentes a região ocupada por qualquer polígono regular  $P$  a ela circunscrito. Tais argumentos nos permite afirmarmos que

$$A_i^p < A_j^p, \quad (8)$$

para todo  $i$  e  $j$  pertencentes a  $\mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ , pois (segundo [4])



“se um polígono  $S$  está contido em outro  $Q$ , então a área de  $S$  é menor do que a área de  $Q$ .”

O Lema 6.1, juntamente com a desigualdade obtida em (8), satisfazem as hipóteses exigidas pelo Teorema 3.1. Deste modo, concluímos que existirá uma única maneira de representarmos a área  $A$  de  $\mathcal{C}_1$  e, esse valor, satisfará a condição

$$A_i^p \leq A \leq A_j^p, \quad (9)$$

para todo  $i$  e  $j$  em  $\mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ .

A fim de comprovarmos que  $A = \pi$ , atribuímos aos índices  $i$  e  $j$  presentes em (9) o valor natural  $n$ . Logo após, façamos a subtração de  $A_n^p$  em ambos os membros de (9) obtendo

$$0 \leq A - A_n^p \leq A_n^p - A_n^p.$$

Porém

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n^p - A_n^p).$$

Daí, pelo Teorema 2.3, inferimos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (A - A_n^p) = 0,$$

isto é,

$$A = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^p = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n}{2} \cdot \text{sen} \frac{2 \cdot \pi}{n} \right),$$

encerrando, portanto, a demonstração ■

**Teorema 6.2.** Seja  $\mathcal{C}_r$  um círculo de raio  $r$  de inequação  $x^2 + y^2 \leq r^2$ . Existe uma única área  $A_r$  de  $\mathcal{C}_r$  determinada pelo produto  $\pi \cdot r^2$ .

*Demonstração.* Façamos, inicialmente, a prova da existência e unicidade da área  $A_r$ . Considere, para isso, os polígonos regulares de  $n$  ( $\geq 3$ ) lados  $P^*$  e  $P$  circunscritos a  $\mathcal{C}_r$  e  $\mathcal{C}_1$ . Considere, ainda,  $A_n^{P^*}$  o valor da área de  $P^*$ . A propriedade (consulte [4])

“A razão entre as áreas de dois polígonos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança”

quando aplicada aos polígonos semelhantes  $P^*$  e  $P$ , nos permite justificarmos que

$$\frac{A_n^{P^*}}{A_n^P} = \left( \frac{r \cdot L_n}{L_n} \right)^2 = r^2,$$

isto é,

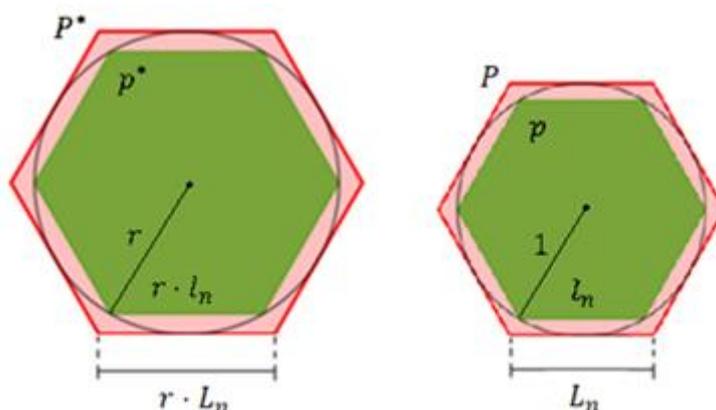
$$A_n^{P^*} = r^2 \cdot A_n^P. \quad (10)$$

Analogamente, para os polígonos regulares de  $n (\geq 3)$  lados  $p^*$  e  $p$ , inscritos em  $\mathcal{C}_r$  e  $\mathcal{C}_1$ , argumentamos que

$$\frac{A_n^{p^*}}{A_n^p} = \left(\frac{r}{1}\right)^2 = r^2,$$

ou seja,

$$A_n^{p^*} = r^2 \cdot A_n^p. \quad (11)$$



**Figura 7** - Semelhança entre os polígonos regulares inscritos e circunscritos a  $\mathcal{C}_1$  e a  $\mathcal{C}_r$ .

As expressões obtidas em (10) e (11) nos permite escrevermos a diferença  $A_n^{p^*} - A_n^p$  através do produto  $r^2 \cdot (A_n^p - A_n^p)$ . Agregando, portanto, esta informação com o Lema 6.1, obtemos as igualdades

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n^{p^*} - A_n^p) = r^2 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n^p - A_n^p) = 0. \quad (12)$$

Além disto, a propriedade citada na demonstração do Lema 6.2 (para continência entre regiões poligonais), explica o porquê de

$$A_i^{p^*} < A_j^{p^*}, \quad (13)$$

para todo  $i$  e  $j$  em  $\mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ . As hipóteses (12) e (13) nada mais são do que aquelas exigidas pelo Teorema 3.1; podemos, desta forma, garantir a *existência única*  $A_r$ .

Finalmente perceba que  $A_r = \pi \cdot r^2$ , já que a proposição (veja [5])

“A razão entre as áreas de dois círculos quaisquer estão entre si assim como os quadrados de seus raios.”,

e o Lema 6.2, nos conduzem a implicação

$$\frac{A_r}{A} = \left(\frac{r}{1}\right)^2 \Rightarrow A_r = A \cdot r^2 = \pi \cdot r^2.$$

■

## 7 Conclusão



O caminho intelectual trilhado pela educação básica nos últimos anos tem feito com que construções axiomáticas e discussões conceituais sejam consideradas como segundo plano em sala de aula. Tendo em vista a precariedade existente no contato aluno-professor, acaba-se priorizando a estruturação do conhecimento por meio de problemas contextualizados. Estes, apesar de serem voltados a representações no *dia-a-dia* dos alunos, não devem ser a única forma adotada pelo professor na transmissão do conhecimento. Ressalta-se a importância das discussões teóricas (mesmo que de forma intuitiva) a respeito de um determinado tema a ser estudado. Posto isto, é importante (ainda nos dias de hoje) preservar questões imperativas, cujos enunciados apresentam-se na forma *prove que...*, *mostre que...* ou *demonstre que...* pois, sendo assim, resgata-se definições, postulados e teoremas de relevância para a estruturação de um determinado tema na matemática.

Esperamos que o artigo apresentado possa enriquecer culturalmente professores e alunos sobre um ponto de vista mais abrangente do tema escolhido.

## 8 Referências

- [1] MACHADO, N. J. **ENEM: A geladeira que virou aquecedor**. São Paulo. 2016. Disponível em: <https://www.nilsonjosemachado.net/?s=enem>. Acesso em: 17 mar. 2020.
- [2] FERREIRA, J. **A construção dos números**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [3] GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015. v. 1.
- [4] DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005. v. 9.
- [5] LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.