

**Revista Eletrônica  
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664  
Volume 18, jul. 2020

**Rudnei Machado**

Departamento de Engenharia  
Faculdade Anhanguera de Joinville  
rudneimachado@gmail.com

**André Fabiano Steklain Lisbôa**

Departamento de Matemática  
Universidade Tecnológica Federal  
do Paraná  
steklain@utfpr.edu.br

## **Mecânica Quântica no ensino de matrizes**

Quantum Mechanics in matrices teaching

### **Resumo**

Neste trabalho apresentamos uma proposta de ensino de matrizes utilizando exemplos que envolvem a Mecânica Quântica. A proposta é baseada em uma estrutura transversal abrangendo conteúdos multidisciplinares como física, química e matemática. O objetivo é prover subsídios ao professor e motivar o estudante quanto ao estudo das matrizes através da exposição de aplicações avançadas e atuais.

**Palavras-chave:** Ensino. Matrizes. Spin. Sistemas de dois níveis. Neutrinos.

### **Abstract**

In this work we present a proposal of teaching matrices using examples involving quantum mechanics. The proposal is based on a transversal structure covering multidisciplinary contents such as physics, chemistry and mathematics. The objective is to provide subsidies to the teacher and motivate the student as to the study of matrices through the exposure of advanced and current applications.

**Keywords:** Teaching. Matrices. Spin. Two level systems. Neutrinos.



# 1 Introdução

Atualmente a Mecânica Quântica é um termo familiar no cotidiano das pessoas. No entanto, muitas vezes as pessoas associam a Mecânica Quântica à uma disciplina extremamente difícil ou a fenômenos exóticos sem qualquer relação com o senso comum. Estas duas associações são igualmente perigosas, pois levam ao surgimento da pseudociência quântica. Por outro lado, a utilização da Mecânica Quântica está cada vez mais presente em diversos ramos de trabalho que antes não a utilizavam, tais como as engenharias. A busca de novos materiais, novos componentes eletrônicos e simulações computacionais faz com que a Mecânica Quântica aos poucos tome o espaço dos antigos métodos empíricos nestas atividades.

A divulgação da Mecânica Quântica é importante tanto para afastar as ideias pseudocientíficas quanto para preparar os futuros profissionais para o aprendizado desta disciplina a nível superior. Pesquisas revelam a importância de se introduzir o conceito de física quântica no Ensino Médio, conforme Silva e Almeida (2011):

Muitos pesquisadores em Ensino de Física têm dedicado seus trabalhos a defender a tese de que se faz necessário enfrentar o desafio de inserir temas de Física Moderna e Contemporânea (FMC) no Ensino Médio (EM). Machado e Nardi (2007, p. 91) defendem a atualização curricular “(...) tendo em vista a formação de cidadãos capazes de compreender as bases de inúmeras tecnologias presentes no dia a dia, tais como os computadores, o laser e os sistemas de posicionamento global por satélite (GPS), dentre inúmeros outros.”. Seguindo a mesma linha de raciocínio, Oliveira et al (2007, p.447) dizem que o ensino de Física no nível médio “(...) não tem acompanhado os avanços tecnológicos ocorridos nas duas últimas décadas e tem se mostrado cada vez mais distante da realidade dos alunos.”. Moreira (2007, p.172) critica a falta de contemporaneidade dos conhecimentos ensinados: “(...) não tem sentido que, em pleno século XXI, a Física que se ensina nas escolas se restrinja à Física (Clássica) que vai apenas até o século XIX.”.

Porém, muitas vezes o ensino na educação básica não tem acompanhado esse desenvolvimento da ciência. Pelo contrário, o que se percebe é um ensino descontextualizado das aplicações tecnológicas, conforme Pinto e Zanetic (1999):

A Física nele desenvolvida está longe de comparecer às aulas de nossas escolas. É preciso transformar o ensino de Física tradicionalmente oferecido por nossas escolas em um ensino que contemple o desenvolvimento da Física Moderna, não como uma mera curiosidade, mas como uma Física que surge para explicar fenômenos que a Física Clássica não explica, constituindo uma nova visão de mundo. Uma Física que hoje é responsável pelo atendimento de novas necessidades que surgem a cada dia, tornando-se cada vez mais básicas para o homem contemporâneo, um conjunto de conhecimentos que extrapola os limites da ciência e da tecnologia, influenciando outras formas do saber humano. Portanto, os vários campos abertos pela física deste século devem ter sua presença garantida nos currículos de nossas escolas médias, particularmente a Física Quântica e a Física Relativística que abriram novos horizontes de exploração científica inimagináveis aos olhos dos cientistas clássicos.

Para isto também é fundamental que os estudantes disponham de ferramentas matemáticas necessárias para aprendizagem destas disciplinas. Sem conhecer estas ferramentas de forma adequada



muito provavelmente o estudante encontrará obstáculos em seus estudos posteriores, envolvam eles Mecânica Quântica ou não. Entre as ferramentas matemáticas essenciais estão as matrizes. Sem compreender corretamente o conceito, propriedades, e operações entre matrizes o estudante não possui os pré-requisitos necessários para compreender Álgebra Linear, que por sua vez dá acesso a diversos conceitos de engenharia e é fundamental para o desenvolvimento da Mecânica Quântica.

O ensino de matrizes no Ensino Médio tem sido relegado, conforme cita Borba (2011), ao cálculo de determinantes e na resolução de sistemas lineares por meio de matrizes quadradas. O uso dessas matrizes se limitam a cálculos mais simples, com números inteiros e fazendo uso de operações com matrizes. Muitas avaliações, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), por vezes se restringem a mostrar as matrizes como sendo meramente uma informação disposta numa tabela. Cada vez mais o ensino de matrizes parece estar desvinculado da necessidade de estudo, não inserido nas novas aplicações tecnológicas que fazem uso da matriz, conforme escreve Sanches (2012).

No contexto de desenvolvimento tecnológico do acesso à informação e o emprego de nomenclatura científica pelos alunos decorrente do acesso às mídias modernas, faz-se necessário ser capaz de dar uma nova roupagem ao ensino de matrizes e mostrar as diversas aplicações tecnológicas que as usam como base. Isto não significa necessariamente o uso de novas tecnologias, mas sim a correlação de matrizes com outras áreas do conhecimento, como por exemplo, física e química. A Mecânica Quântica em particular é um valioso instrumento de ensino e ao mesmo tempo, uma importante forma de promover o interesse dos alunos.

A metodologia tradicional para se ensinar Mecânica Quântica passa primeiramente pela Mecânica Clássica, abordando fenômenos clássicos do ponto de vista quântico. Esta abordagem requer que os estudantes conheçam profundamente a matemática envolvida, o que não é muito difícil fazer a nível de Ensino Médio. Contudo Feynman, em suas *Lições de Física* (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 1966) sugeriu que é possível uma abordagem diferente, na qual os fenômenos que não são explicáveis classicamente são apresentados em primeiro lugar:

(...) E a maneira usual de lidar com a mecânica quântica torna esse assunto quase inatingível para a grande maioria dos estudantes, porque eles levam muito tempo para aprender. No entanto, em suas aplicações reais - especialmente em aplicações mais complexas, como em engenharia elétrica e química - a maquinaria completa da abordagem de equações diferenciais não é realmente usada. Por isso, tentei descrever os princípios da mecânica quântica de uma maneira que não exigiria que se conhecesse primeiro a matemática das equações diferenciais parciais. Mesmo para um físico, acho que é uma coisa interessante a tentar fazer - apresentar a mecânica quântica dessa maneira inversa - por várias razões que podem ser evidentes nas próprias aulas (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 1966).

Nesta abordagem são apresentados fenômenos que não podem ser explicados do ponto de vista clássico. A abordagem então é realizada no sentido de formular uma teoria que explique estes fenômenos. A depender da escolha destes fenômenos a matemática envolvida é bastante elementar, podendo ser trabalhada no Ensino Médio.

Neste trabalho é proposta uma metodologia para trabalhar matrizes no ensino médio utilizando, para este fim, uma abordagem elementar das matrizes de spin e referente a outros sistemas de dois níveis. Esta abordagem permite apresentar as matrizes como atores dinâmicos ao invés de informações estáticas contidas em uma tabela. Através desta abordagem trataremos de algumas operações elementares e faremos a introdução do conceito de autovalor e autovetor, que serão bastante utilizados no nível superior.



Na Seção 2 apresentamos uma visão geral de como o conteúdo referente a matrizes é apresentado em sala de aula atualmente. Na Seção 3 apresentamos brevemente os postulados da Mecânica Quântica e a sua conexão com a Álgebra Linear. Na Seção 4 apresentamos brevemente o conceito de spin e como abordar este conceito utilizando matrizes de ordem 2. Na Seção 5 exploramos outros exemplos de sistemas de dois níveis que podem ser utilizados em sala de aula. Na Seção 6 apresentamos de forma simplificada oscilações de neutrinos para análise de matrizes de ordem 3. Por fim, na Seção 7 apresentamos as conclusões deste trabalho.

## 2 Matrizes no ensino médio

O conceito de matrizes permeia a ciência como um todo, desde o estudo das ciências sociais até as ciências exatas e da terra, sendo, segundo Santos (2013), "muito utilizadas para representar dados, permitindo uma visualização prática e com maior clareza das informações expostas, além de facilitar a resolução de alguns cálculos complexos, o que podemos considerar ser sua importância em várias áreas". Aplicações que envolvam o conceito de matrizes aparecem na computação, na engenharia, na área de saúde, na química, na economia, na física e em muitas outras disciplinas. Todas essas aplicações, demonstram conforme Pinto (2017), "a importância do conhecimento matemático como linguagem que, em diálogo com outros conhecimentos, amplia a compreensão do homem em relação ao mundo físico e social, aspecto que permite a resolução de situações-problemas e transformação da realidade".

A ideia de matrizes é extremamente antiga, remonta ao século III a.C., sendo um dos registros iniciais a famosa obra "Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática" conforme relata Silva (2014), porém a representação atual de matrizes e determinantes foi uma construção coletiva de diversos agentes, destacando-se: Seki Kowa (1637-1708), que utilizou o conceito de determinantes para a resolução de problemas que envolvessem sistemas lineares; Joseph Louis Lagrange (1736-1813), com o uso da forma matricial; Augustin-Lois Cauchy (1789-1857) que conceituou as matrizes com o termo tabela; James Joseph Sylvester (1814-1897), estabeleceu o termo matrizes e, por último o matemático Arthur Cayley (1821-1895) que demonstrou a utilidade de matrizes, conforme destaca Moura (2014).

Essa construção do conceito formal de matrizes, que apenas chamamos de matrizes, na atualidade está renegada ao ensino médio como sendo um processo mecânico e, na maioria das vezes desvinculado da aplicabilidade do conceito. Outro problema, não menos importante, é a falta de novas ferramentas e recursos que sejam inovadores e facilitadores para o ensino de matrizes, que vinculem a aplicabilidade das matrizes, suas operações e também o conceito de determinantes, possibilitando ao aluno uma visão mais ampla de matrizes e, resultando ao final, numa aprendizagem significativa.

## 3 Postulados da Mecânica Quântica

Os postulados da Mecânica Quântica possuem uma estreita relação com Álgebra Linear. O estudante de Ensino Médio não possui este conhecimento, porém o professor de Matemática sim. A percepção da relação entre as duas disciplinas, mesmo a nível básico, permite que algumas situações interessantes possam ser apresentadas aos estudantes. A seguir apresentamos os principais postulados da Mecânica Quântica de uma forma sucinta, conforme apresentados no livro *Quantum Mechanics* de Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu e Frank Laloe.



### 3.1 Estado do sistema

A Mecânica Quântica possui como componente chave o conceito de *função de onda*. A função de onda de um sistema contém em si a probabilidade de cada uma das medidas possíveis de serem obtidas em um determinado instante  $t$ . Para cada tipo de medida esta função de onda é diferente, mas todas tratam-se de representações de um mesmo sistema. Portanto, estas funções de onda estão relacionadas com um ente abstrato denominado *estado do sistema*. Este, por sua vez, é um vetor de um espaço vetorial na qual está definido um produto escalar, ou seja, um espaço de Hilbert. Este é o primeiro postulado da Mecânica Quântica:

**1º Postulado:** Em um instante  $t$  o estado de um sistema físico é definido por um vetor (ket)  $|\Psi(t)\rangle$  pertencente ao espaço de estados  $\mathcal{E}$ .

A associação do estado dos sistema com um vetor permite utilizar todas as ferramentas da Álgebra Linear para descrever os processos referente à análise do sistema, como as medidas.

### 3.2 Medidas

Dado um determinado estado  $|\Psi(t)\rangle$  em um instante  $t$ , é preciso saber como efetuar uma medida. O processo de medição em Mecânica Quântica, diferentemente do que ocorre na Mecânica Clássica, causa uma alteração no estado do sistema. Temos o seguinte postulado:

**2º Postulado:** Qualquer quantidade física  $\mathcal{A}$  é descrita por um operador  $A$  atuando em  $\mathcal{E}$ . Este operador é um *observável*.

O caráter da medida é dado a partir do seguinte postulado:

**3º Postulado:** Os únicos resultados possíveis da medida da quantidade física  $\mathcal{A}$  são os autovalores do observável correspondente  $A$ .

O primeiro postulado limita a natureza matemática da medida. Ele deve ser uma transformação linear, para que a medida obedeça à sobreposição linear dos estados, e o estado resultante deve permanecer ao mesmo espaço de Hilbert, devendo portanto ser um operador linear.

O segundo postulado trata das medidas possíveis. Em particular, como o resultado de uma determinada medida deve ser um número real o operador  $A$  deve ser hermitiano, ou seja, deve ser igual ao seu operador adjunto. A quantização ou não do sistema dependerá então da base de autovetores do operador e dos autovalores associados. Se o operador admitir apenas autovalores discretos, as medidas possíveis serão discretizadas (quantizadas).

### 3.3 Probabilidades

Vamos considerar um sistema em que o estado é definido, em um dado instante, por  $|\Psi\rangle$  cuja norma seja unitária (estado normalizado). Para prevermos o resultado da medição de uma quantidade física  $\mathcal{A}$  associada ao observável  $A$ , devemos estabelecer regras que nos permitam calcular a probabilidade de obtermos cada autovalor de  $A$ . Por simplicidade neste trabalho apenas trataremos do caso em que o espectro é discreto e não degenerado. Para tanto, vamos supor que

o espectro do observável  $A$  é inteiramente discreto. Se todos os autovalores  $a_n$  de  $A$  forem não degenerados, a cada autovalor está associado um único autovetor  $|u_n\rangle$ :

$$A |u_n\rangle = a_n |u_n\rangle \quad (1)$$

Como  $A$  é um observável (hermitiano), podemos considerar o conjunto  $|u_n\rangle$  que constitui uma base ortonormal em  $\mathcal{E}$ , de forma que um vetor de estado genérico  $|\Psi\rangle$  pode ser escrito da forma

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |u_n\rangle. \quad (2)$$

As quantidades  $c_n$  estão associadas à probabilidade de se obter cada autovalor  $a_n$ . Temos então o seguinte postulado:

**4º Postulado:** Toda vez que uma quantidade física associada a um operador é medida no sistema de estado normalizado  $|\Psi\rangle$ , a probabilidade de se obter um específico autovalor  $a_n$  é dada por:  $p(a_n) = |\langle u_n | \Psi \rangle|^2$ . Onde  $|u_n\rangle$  é um autovetor normalizado associado ao autovalor  $a_n$ .

De acordo com o postulado acima, se  $|\Psi\rangle$  é dado conforme a Equação 2 a probabilidade de se obter o autovalor  $a_n$  é, portanto,  $p(a_n) = |c_n|^2$ .

### 3.4 Redução do pacote de onda

Seja um estado  $|\Psi\rangle = \sum_n c_n |u_n\rangle$  que está associado a um estado físico antes de uma medida  $\mathcal{A}$  ser realizada. Após a medição, supondo que foi obtido o autovalor  $a_{n_0}$ , o estado do sistema é alterado. Ao efetuarmos uma nova medida, imediatamente depois da primeira, devemos obter o mesmo resultado com uma probabilidade 1, ou seja, o estado do sistema é representado por  $|u_{n_0}\rangle$ . Temos, portanto, o seguinte postulado:

**5º Postulado:** Se a medida de uma quantidade física  $\mathcal{A}$  em um sistema de estado  $|\Psi\rangle$  tem como resultado  $a_n$ , o estado do sistema imediatamente após a medida é a projeção normalizada de  $|\Psi\rangle$ ,  $\frac{P_n|\Psi\rangle}{\sqrt{\langle\Psi|P_n|\Psi\rangle}}$ , no auto subespaço associado a  $a_n$ .

Este postulado está associado ao problema do *Colapso da Função de Onda*, segundo a *Interpretação de Copenhagen* e está no centro de uma das maiores polêmicas envolvendo a Mecânica Quântica.

### 3.5 Evolução temporal

Enquanto não for efetuada uma medida no sistema, ele evoluirá temporalmente. No caso da Mecânica Quântica não relativística, a evolução temporal do vetor de estado  $|\Psi\rangle$  é regida pela equação de Schrödinger, de acordo com o seguinte postulado:

**6º Postulado:** A evolução temporal do vetor de estado  $|\Psi(t)\rangle$  é governada pela Equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle,$$

onde  $H(t)$  é o observável associado ao total de energia do sistema, ou seja,  $H$  é o operador Hamiltoniano.

O operador Hamiltoniano  $H$  pode depender explicitamente do tempo. Caso esta dependência explícita não ocorra o Hamiltoniano é um observável cujos autovalores fornecem o espectro de energias possíveis do sistema. O Hamiltoniano, portanto, é um dos observáveis mais relevantes, pois define quais as energias um determinado sistema pode obter.

Estudantes de Ensino Médio não possuem os pré-requisitos necessários para compreender os postulados de forma completa. Contudo, alguns conceitos podem ser simplificados para dar aos estudantes um vislumbre dos processos envolvidos na Mecânica Quântica e ao mesmo tempo trabalhar os conceitos utilizando matrizes. Para isso, no entanto, é necessário que os estudantes façam a associação entre a medida de um estado e a aplicação de uma matriz em um vetor. É preciso tomar cuidado para evitar detalhar em demasia conceitos matemáticos como autovalores e autovetores, que serão vistos apenas no Ensino Superior.

## 4 Spin 1/2

O experimento de Stern-Gerlach (GERLACH; STERN, 1922) é um dos mais importantes da Mecânica Quântica. Em 1922 Otto Stern e Walter Gerlach mostraram que as componentes do momentum angular de um feixe de partículas não estavam distribuídas continuamente, conforme as previsões do Eletromagnetismo Clássico, mas sim distribuídas em torno de dois valores, em uma distribuição quantizada. Apesar dos resultados deste experimento terem sido publicados em 1922, apenas em 1927 Wolfgang Pauli forneceu a interpretação correta, através da introdução do conceito de *spin*.

Ao se trabalhar o conceito de spin, por exemplo, é suficiente definir o estado do sistema como uma matriz coluna  $2 \times 1$ :

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Para evitar operações com números complexos, vamos considerar, sem prejuízo desta discussão, que  $a$  e  $b$  são números reais. Para que o estado seja normalizado, o que será importante para a discussão das probabilidades, devemos ter  $a^2 + b^2 = 1$ . O processo de medida equivale matematicamente a multiplicar uma matriz  $2 \times 2$  do lado esquerdo, obtendo uma nova matriz coluna  $2 \times 1$ . Este estado final não necessariamente é igual ao primeiro, o que fornece uma representação matemática da afirmação de que a medida afeta o estado do sistema. As medidas possíveis são os valores  $\lambda$  tais que

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \quad (4)$$

para algum estado. Por exemplo, vamos fazer uma medida de spin na direção  $z$ . A matriz referente a esta medida é dada por

$$S_z = \begin{bmatrix} +\frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

É fácil verificar que, para dois tipos de vetores, temos a propriedade da Equação 4:

$$\begin{bmatrix} +\frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = +\frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} +\frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Logo, as duas medidas possíveis são  $\pm\hbar/2$ .

Suponha agora o estado  $|\psi\rangle$  dado pela Equação 3. Podemos escrever este estado da seguinte forma:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Dado que o estado está normalizado, a medida fornecerá o valor  $+\hbar/2$ , com uma probabilidade  $a^2$ , ou o valor  $-\hbar/2$ , com uma probabilidade  $b^2$ . Logo após a medida ao se obter um destes valores, digamos  $+\hbar/2$ , o estado do sistema converte-se no estado correspondente a esta medida, ou seja, o estado final será

$$|+\rangle_z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Isto implica que toda medida posterior de  $S_z$  fornecerá o mesmo resultado, neste caso,  $+\hbar/2$ , com probabilidade 1.

Suponha que tentemos realizar a medida  $S_x$ , cuja matriz correspondente é

$$S_x = \begin{bmatrix} 0 & +\frac{\hbar}{2} \\ +\frac{\hbar}{2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Novamente podemos verificar que, para dois tipos de vetores, temos a propriedade da Equação 4:

$$\begin{bmatrix} 0 & +\frac{\hbar}{2} \\ +\frac{\hbar}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = +\frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & +\frac{\hbar}{2} \\ +\frac{\hbar}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Logo, as duas medidas possíveis são novamente  $\pm\hbar/2$ . Note, no entanto, que os estados resultantes das medidas de  $S_x$  são diferentes dos resultantes da medida de  $S_z$ . Este fato traz uma importante consequência que veremos a seguir.

Para ilustrar esta situação, tome o estado da Equação 9. Vamos primeiramente medir  $S_z$  e depois  $S_x$ . Conforme a discussão anterior, temos uma probabilidade 1 de obter  $+\hbar/2$  e 0 de obter  $-\hbar/2$ . Ou seja, obteremos  $+\hbar/2$ , e o estado resultante será o mesmo. Vamos em seguida realizar a medida  $S_z$  neste estado resultante. Podemos escrevê-lo da seguinte maneira:

$$|+\rangle_z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

o que implica que temos a mesma probabilidade 1/2 de medir  $+\hbar/2$  ou  $-\hbar/2$  na componente  $x$ .

Agora vamos medir primeiramente  $S_x$  e depois  $S_z$  no estado da Equação 9. Neste caso temos:

$$|+\rangle_z = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Logo, podemos obter, para a componente  $x$ , os valores  $+\hbar/2$  e  $-\hbar/2$  com probabilidade 1/2, exatamente como no caso anterior. Supondo que o valor obtido seja  $+\hbar/2$ , o novo estado resultante será dado por

$$|+\rangle_x = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

o que implica que temos a mesma probabilidade  $1/2$  de medir  $+\hbar/2$  ou  $-\hbar/2$  na componente  $z$ . Ou seja, existe a possibilidade de obter  $-\hbar/2$  mesmo que o estado inicial indicasse que a única medida possível na componente  $z$  fosse  $+\hbar/2$ . Portanto, as probabilidades de se obter cada uma das medidas é diferente a depender da ordem em que elas são realizadas. A conclusão a que chegamos é que as medidas das componentes  $z$  e  $x$  não podem ser feitas simultaneamente, dado que, ao se realizar uma medida, temos um estado resultante que não é invariante pela outra medida. Isto guarda relação direta com o fato que a multiplicação de matrizes, em geral, não é comutativa. Ou seja, no caso das matrizes em questão,

$$S_x S_z \neq S_z S_x, \quad (16)$$

propriedade que é facilmente demonstrada.

## 5 Sistemas de dois níveis e o benzeno

Durante o Ensino Médio nas aulas de Química Orgânica o estudante estuda o benzeno, cuja fórmula é  $C_6H_6$ . A fórmula estrutural, dada pela Figura 1 é então justificada pelo fato de as ligações entre os átomos de carbono poderem mudar de posição, conforme a Figura 2. Contudo, em geral não se discute o mecanismo que permite este fenômeno.



Figura 1: Representação do anel benzênico. Fonte: Autoria própria.

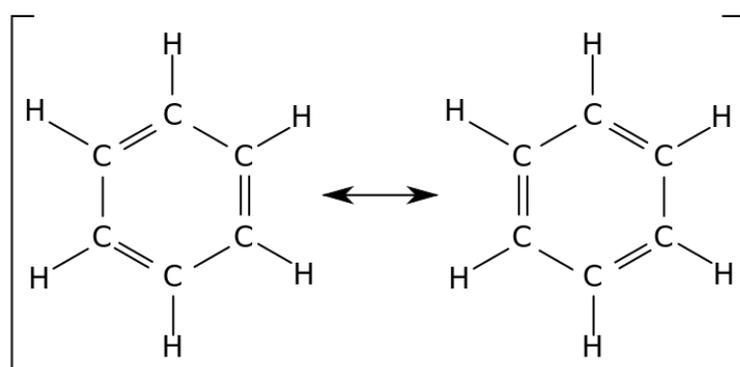


Figura 2: Representação das trocas das ligações duplas entre os átomos de carbono no benzeno. Fonte: Feynman, Leighton e Sands (1966).

Esta discussão é baseada na que é apresentada por Richard Feynman em suas *Lições de Física* (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 1966). Analisando a Figura 1, pode-se considerar a molécula da esquerda (estado 1) como o resultado das trocas das ligações duplas dos carbonos da molécula da direita (estado 2) ou, alternativamente, como uma rotação de  $60^\circ$  desta molécula. Neste caso, é

fácil se convencer que ambas devem ter a mesma energia. Vamos considerar então os dois estados como matrizes coluna  $2 \times 1$ :

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (17)$$

$$|2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

A evolução temporal de um sistema quântico está relacionada com o operador Hamiltoniano, conforme o 6<sup>o</sup> Postulado. Quando este operador não depende explicitamente do tempo, as energias permitidas ao sistema estão relacionadas com este operador. Vamos considerar que o Hamiltoniano atue apenas no sentido de relacionar o estado 1 com o estado 2. Logo, ele deve ser uma matriz  $2 \times 2$ .

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Se os estados 1 e 2 fossem fixos o Hamiltoniano seria diagonal, e os elementos da diagonal corresponderiam às energias:

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Note que as energias devem ser as mesmas para o estado 1 e para o estado 2, por causa da simetria do problema. No entanto, se houver uma probabilidade do estado 1 passar para o estado 2, deve haver um termo não diagonal que misture os estados. Portanto, o Hamiltoniano deve ter a seguinte forma:

$$H = \begin{bmatrix} E & \Delta \\ \Delta & E \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Note os dois termos fora da diagonal são iguais pelo mesmo argumento de simetria. Vamos supor  $\Delta < E$ . As medidas possíveis das energias novamente são aquelas em que

$$\begin{bmatrix} E & \Delta \\ \Delta & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Neste caso é fácil verificar a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} E & \Delta \\ \Delta & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = (E + \Delta) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} E & \Delta \\ \Delta & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = (E - \Delta) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Logo, as energias possíveis são  $E - \Delta$  e  $E + \Delta$ . A conclusão a ser obtida é que, se o sistema estiver, por exemplo, no seu estado de mais baixa energia o seu estado não será 1 nem 2, mas sim uma mistura dos dois, dado que

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

A existência deste estado pode, portanto, ser descrita matematicamente através das características do Hamiltoniano que descreve o sistema, e a sua propriedade de misturar os diferentes estados.

## 6 Oscilações de neutrinos

O neutrino é uma das partículas mais abundantes no Universo. Por outro lado, é uma das partículas mais difíceis de se detectar. Por muito tempo acreditou-se que o neutrino era uma partícula sem massa, e que existiam três tipos (sabores) separados, cada um associado, respectivamente, ao elétron, ao múon e ao tau, conforme a Tabela 1.

Partícula	Sabor
elétron ( $e^-$ )	neutrino do elétron ( $\nu_e$ )
múon ( $\mu^-$ )	neutrino do múon ( $\nu_\mu$ )
tau ( $\tau^-$ )	neutrino do tau ( $\nu_\tau$ )

Tabela 1: Família do elétron e os *sabores* de neutrinos.

Esta concepção modificou-se ao se estudar os neutrinos emitidos a partir do Sol. O modelo das reações que ocorrem no interior das estrelas fornece uma estimativa do fluxo destes neutrinos. Além disso, este modelo prevê a criação exclusiva de neutrinos associados ao elétron. Contudo, experimentos demonstraram que o número de neutrinos medidos na Terra era menor do que o esperado de acordo com este modelo. Uma das explicações propostas era que o modelo das reações no interior do Sol deveria estar incorreto. Porém, outros experimentos mostraram que esta deficiência era sanada ao se medir conjuntamente os três sabores de neutrinos. Com base neste resultado propôs-se que o modelo solar estava correto, mas que haveria um mecanismo que permitisse a transformação (oscilação) entre sabores de neutrinos. Este mecanismo de oscilação já havia sido proposto por Pontecorvo em 1967 por analogia com as oscilações do káon neutro, e foi resgatado no atualmente paradigma da matriz de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS). O fenômeno da oscilação entre neutrinos abre caminho para diversas possibilidades envolvendo novas leis da física que fogem ao Modelo Padrão. O entendimento do mecanismo das oscilações é um dos principais desafios da física atual. Vamos representar o estado de um neutrino genérico como uma combinação dos seus três sabores através de uma matriz coluna  $1 \times 3$ :

$$|\nu\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_\ell. \quad (27)$$

Nesta representação temos, para cada um dos sabores, a seguinte representação

$$|\nu_e\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_\ell, \quad |\nu_\mu\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_\ell \quad \text{e} \quad |\nu_\tau\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_\ell. \quad (28)$$

Por outro lado, podemos representar o mesmo estado como combinação de três estados com massas fixas  $m_1, m_2$  e  $m_3$

$$|\nu\rangle = \begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix}_m. \quad (29)$$

Nesta representação temos, para cada um dos estados de massa, a seguinte representação

$$|\nu_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_m, \quad |\nu_2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_m \quad \text{e} \quad |\nu_3\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_m. \quad (30)$$

É possível escrever uma representação em termos da outra, usando as seguintes relações lineares

$$|\nu_e\rangle = S_{e1} |\nu_1\rangle + S_{e2} |\nu_2\rangle + S_{e3} |\nu_3\rangle \quad (31)$$

$$|\nu_\mu\rangle = S_{\mu1} |\nu_1\rangle + S_{\mu2} |\nu_2\rangle + S_{\mu3} |\nu_3\rangle \quad (32)$$

$$|\nu_\tau\rangle = S_{\tau1} |\nu_1\rangle + S_{\tau2} |\nu_2\rangle + S_{\tau3} |\nu_3\rangle \quad (33)$$

A relação entre as representação pode ser então representada através da seguinte relação matricial

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_\ell = \begin{bmatrix} S_{e1} & S_{e2} & S_{e3} \\ S_{\mu1} & S_{\mu2} & S_{\mu3} \\ S_{\tau1} & S_{\tau2} & S_{\tau3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \\ e \end{bmatrix}_m, \quad (34)$$

sendo a matriz

$$S = \begin{bmatrix} S_{e1} & S_{e2} & S_{e3} \\ S_{\mu1} & S_{\mu2} & S_{\mu3} \\ S_{\tau1} & S_{\tau2} & S_{\tau3} \end{bmatrix} \quad (35)$$

chamada matriz PMNS. Na representação dos estados de massa a evolução temporal é dada por

$$|\nu(t)\rangle = \begin{bmatrix} c \cdot e^{iE_1 t} \\ d \cdot e^{iE_2 t} \\ e \cdot e^{iE_3 t} \end{bmatrix}_m. \quad (36)$$

Logo, se quisermos estudar a evolução dos sabores, utilizamos a matriz PMNS:

$$|\nu(t)\rangle = \begin{bmatrix} S_{e1} & S_{e2} & S_{e3} \\ S_{\mu1} & S_{\mu2} & S_{\mu3} \\ S_{\tau1} & S_{\tau2} & S_{\tau3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \cdot e^{iE_1 t} \\ d \cdot e^{iE_2 t} \\ e \cdot e^{iE_3 t} \end{bmatrix}_m. \quad (37)$$

Vamos estudar um exemplo que, apesar de não corresponder a nenhum caso físico real, é bastante ilustrativo. Tome o caso do acoplamento maximal

$$S = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{3}} & e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ 1 & e^{i\frac{4\pi}{3}} & e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Vamos tomar o caso de um neutrino o elétron que se propaga no vácuo. Com base nesta matriz, obtemos a representação nos estados de massa:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_\ell = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{3}} & e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ 1 & e^{i\frac{4\pi}{3}} & e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}_m. \quad (39)$$

A propagação no vácuo, portanto, é dada por

$$|\nu(t)\rangle = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{3}} & e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ 1 & e^{i\frac{4\pi}{3}} & e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{iE_1 t} \\ e^{iE_2 t} \\ e^{iE_3 t} \end{bmatrix}_m. \quad (40)$$

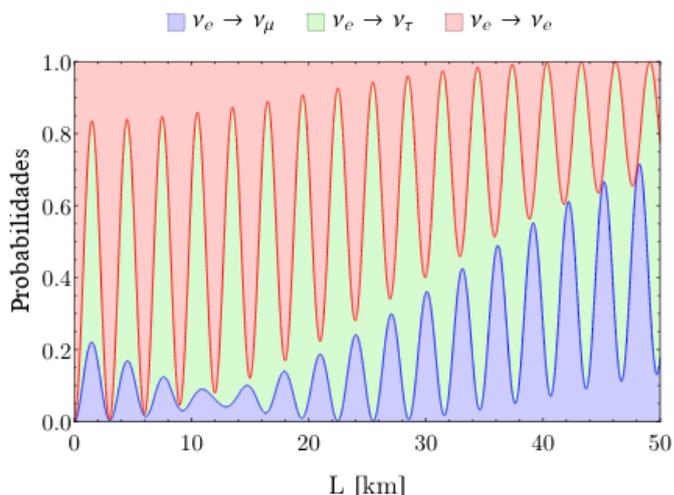


Figura 3: Probabilidade de se obter um determinado sabor de neutrino em função da distância de propagação. Note que inicialmente a partícula trata-se de um neutrino do elétron, pois existe 100% de probabilidade de medir esta partícula a uma distância 0. Modificado de Fantini *et al*, 2018.

A título de ilustração vamos supor que tenhamos  $E_1 t = 0$ ,  $E_2 t = \frac{2\pi}{3}$  e  $E_3 t = \frac{4\pi}{3}$ . Neste caso temos

$$|\nu(t)\rangle = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{3}} & e^{i\frac{4\pi}{3}} \\ 1 & e^{i\frac{4\pi}{3}} & e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ e^{i\frac{4\pi}{3}} \end{bmatrix}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_\ell, \quad (41)$$

ou seja, o neutrino do elétron torna-se um neutrino do tau. A Figura 3 mostra as probabilidades de se obter cada tipo de neutrino a partir da oscilação de um neutrino do elétron para os parâmetros conhecidos atualmente.

Este exemplo pode ser mais difícil de trabalhar com estudantes do Ensino Médio, por envolver números complexos. Contudo, é interessante por utilizar matrizes  $3 \times 3$  e justamente por ilustrar casos em que as entradas das matrizes não são números reais. O professor pode simplificar este exemplo utilizando apenas dois sabores de neutrinos, caso em que a matriz PMNS no acoplamento maximal é uma matriz  $2 \times 2$  real. O caso envolvendo 3 sabores pode ser apenas introduzido como uma ilustração.

## 7 Conclusões

Neste trabalho foram apresentados algumas possibilidades para o estudo de matrizes no Ensino Médio utilizando exemplos extraídos da Mecânica Quântica. Foram apresentados dois casos simples baseados em conteúdos normalmente apresentados em outras disciplinas do Ensino Médio. Complementarmente, adicionamos um caso envolvendo física de neutrinos, que, apesar de ser mais complexo, enriquece a discussão por se tratar de um campo de pesquisa ativo na Física. Concluimos que, com o devido cuidado, conceitos abstratos podem ser trazidos aos estudantes sem risco de repassar conceitos incorretos. Esta facilitação do acesso aos conceitos de Mecânica Quântica, por sua vez, possibilita que os estudantes possam se interessar pela ciência e se afastar da pseudociência.



## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (Capes) - Código de Financiamento 001. Agradecemos ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat. Agradecemos todos os comentários úteis de Edgard Amorim e Francisco Ganacim sobre o trabalho.

## 8 Referências Bibliográficas

- BORBA E. M. **Uma proposta para o ensino de matrizes com o apoio de tecnologia**. 2011. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/31617/000784022.pdf?sequence=1>. Acesso em: 30 out. 2018.
- COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOE, F. **Quantum mechanics**. New Jersey: Wiley, 1991. v. 1.
- FANTINI, G.; GALLO ROSSO, A.; VISSANI, F.; ZEMA, V. The formalism of neutrino oscillations: an introduction, **arXiv:1802.05781**. 2018. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1802.05781>. Acesso em: 5 nov. 2019.
- FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **Feynman lectures on physics: quantum mechanics**. Massachusetts: Addison-Wesley, 1966. v. 3.
- GERLACH, W.; STERN, O. Der experimentelle nachweis der richtungsquantelung im magnetfeld. **Zeitschrift für Physik**, v. 9, n. 1, p. 349–352, Dez. 1922.
- MOURA, I. M. **Contextualização de matrizes para o ensino médio**. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Goiás, Jataí, 2014. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/4866/5/Dissertação%20-20Iris%20Martins%20de%20Moura%20-%202014.pdf>. Acesso em: 17 dez. 2019.
- PINTO, A. C.; ZANETIC, J. É possível levar a física quântica para o ensino médio? **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, v. 16, n. 1, p. 7-34, abr. 1999. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/6873/6333>. Acesso em: 01 nov. 2018.
- PINTO, A. H. A Base Nacional Comum Curricular e o Ensino de Matemática: flexibilização ou engessamento do currículo escolar. **Bolema**, v. 31, n. 59, p. 1045-1060, dez. 2017. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/bolema/v31n59/0103-636X-bolema-31-59-1045.pdf>. Acesso em: 17 dez. 2019.
- SANCHES, M. H. F. **Efeitos de uma estratégia diferenciada do ensino dos conceitos de matrizes**. 2002. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002. Disponível em: [http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/253429/1/Sanches\\_MariaHelenaFigueiredo\\_M.pdf](http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/253429/1/Sanches_MariaHelenaFigueiredo_M.pdf). Acesso em: 18 maio 2020.



---

SANTOS, I. A. S. **O ensino e aplicações de matrizes**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2013. Disponível em: [https://sca.profmat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=47027](https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=47027). Acesso em: 30 out. 2019.

SILVA, A. C.; ALMEIDA, M. J. P. M. Física quântica no ensino médio: o que dizem as pesquisas. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 28, n. 3, p. 624-652, dez. 2011. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5165629.pdf>. Acesso em: 1º nov. 2018.

SILVA, J. V. S. **Aplicações de matrizes no ensino médio**. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014. Disponível em: <http://dspace.bc.uepb.edu.br/jspui/bitstream/123456789/9493/1/PDF%20-%20Jos%C3%A9%20Valber%20Silvino%20da%20Silva.pdf>. Acesso em: 17 dez. 2019.