Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 20, jul. 2021
Iniciação Científica

A generalização dos duais e sedenios de Leonardo

The generalization of Leonardo's duals and sedenions

Milena Carolina dos Santos Mangueira
Instituto Federal de Educação e Tecnologia do Estado do Ceará
milenacarolina24@gmail.com

Renata Passos Machado Vieira
Instituto Federal de Educação e Tecnologia do Estado do Ceará
re.passosm@gmail.com

Francisco Régis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação e Tecnologia do Estado do Ceará
fregis@ifce.edu.br

Paula Maria Machado Cruz Catarino
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro - Portugal
pcatarino23@gmail.com

Resumo

Recentemente, pesquisadores tem apresentado o processo evolutivo da sequência de Leonardo. Com o intuito de dar continuidade a esse processo evolutivo, neste artigo, iremos apresentar os duais e os sedenios de Leonardo. Assim, serão estudados conceitos matemáticos inerentes a esses números, sejam eles: função geradora, fórmula de Binet, forma matricial e propriedades. E ainda, é apresentada a generalização dos duais e sedenios de Leonardo.
Palavras-chave: Forma matricial. Fórmula de Binet. Duais. Sedenios. Sequência de Leonardo.

Abstract

Recently, researchers have come to present the evolutionary process of Leonardo's sequence. In order to continue this evolutionary process, in this article, we will present Leonardo's duals and sedenions. Thus, mathematical concepts inherent to these numbers will be studied, namely: generating function, Binet formula, matrix form and properties. And yet, the generalization of Leonardo's duals and sedenions is presented.
Keywords: Matrix form. Binet formula. Duals. Sedenions. Leonardo sequence.

Artigo recebido em fev. 2021 e aceito em mar. 2021

1 Introdução

A sequência de Leonardo foi apresentada inicialmente por Catarino e Borges (2020), a qual vem sendo estudada por Alves e Vieira (2020), Alves, Vieira e Catarino (2020), Vieira, Alves e Catarino (2019), Shannon (2019), Vieira, Mangueira, Alves e Catarino (2020) apresentando uma evolução matemática desta sequência.

Dessa forma, tem-se a sequência de Leonardo satisfazendo a seguinte relação de recorrência:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} + 1, n \geq 2. \tag{1}$$

E ainda, para $n+1$ pode-se reescrever essa relação de recorrência como $L_{n+1} = L_n + L_{n-1} + 1$. Assim, subtraindo $Le_n - Le_{n+1}$ obtêm-se uma outra relação de recorrência para esta sequência.

$$\begin{aligned} L_n - L_{n+1} &= L_{n-1} + L_{n-2} + 1 - L_n - L_{n-1} - 1 \\ \\ L_{n+1} &= 2L_n - L_{n-2} \end{aligned} \tag{2}$$

onde $L_0 = L_1 = 1$ são as condições iniciais.

Com o intuito de apresentar uma evolução matemática dos números de Leonardo, neste artigo apresentaremos um estudo em torno dos números duais e sedenios de Leonardo. Assim, tem-se que os números duais foram introduzidos por Clifford (1871) e são definidos por:

$$d = a + \varepsilon a, \tag{3}$$

em que ε representa a unidade dual e $a \in \mathbb{N}$. E ainda, tem-se que $\varepsilon^2 = 0$ e $1\varepsilon = \varepsilon 1 = \varepsilon$ (SHOHAM, 2000).

Por outro lado, iremos apresentar os sedenios, denotados por $\mathbb{S}$, que foram desenvolvidos por Cayley-Dickson (BILGICI; TOKESER; UNAL, 2017), a qual a álgebra dos sedenios possui 16 dimensões e apresenta uma vasta aplicabilidades.

Assim, utilizam-se a seguinte notação para os sedenios:

$$p = \sum_{i=0}^{15} a_i \mathrm{e}_s,$$

onde o e_0 é o elemento unitário e $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3, \cdots \mathrm{e}_15$ são as unidades imaginárias. E ainda, Cawagas (2004), construiu uma tabela de multiplicação para a base $\mathbb{S}$, como mostra na Tabela 1.

Tabela 1: Multiplicação dos sedenios de $\mathbb{S}$. Fonte: (BILGICI; TOKESER; UNAL, 2017)

.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	-0	3	-2	5	-4	-7	6	9	-8	-11	10	-13	12	15	-14
2	2	-3	-0	1	6	7	-4	-5	10	11	-8	-9	-14	-15	12	13
3	3	2	-1	-0	7	-6	5	-4	11	-10	9	-8	-15	14	-13	12
4	4	-5	-6	-7	-0	1	2	3	12	13	14	15	-8	-9	-10	-11
5	5	4	-7	6	-1	-0	-3	2	13	-12	15	-14	9	-8	11	-10
6	6	7	4	-5	-2	3	-0	-1	14	-15	-12	13	10	-11	-8	9
7	7	-6	5	4	-3	-2	1	-0	15	14	-13	-12	11	10	-9	-8
8	8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	-0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	8	-11	10	-13	12	15	-14	-1	-0	-3	2	-5	4	7	-6
10	10	11	8	-9	-14	-15	12	13	-2	3	-0	-1	-6	-7	4	5
11	11	-10	9	8	-15	14	-13	12	-3	-2	1	-0	-7	6	-5	4
12	12	13	14	15	8	-9	-10	-11	-4	5	6	7	-0	-1	-2	-3
13	13	-12	15	-14	9	8	11	-10	-5	-4	7	-6	1	-0	3	-2
14	14	-15	-12	13	10	-11	8	9	-6	-7	-4	5	2	-3	-0	1
15	15	14	-13	-12	11	10	-9	8	-7	6	-5	-4	3	2	-1	-0

Com isso, a partir da definição desses números, serão apresentados conceitos matemáticos relacionando os números de Leonardo com os números duais e sedenios.

2 Os duais de Leonardo

Doravante, serão introduzidos os números duais de Leonardo, iniciando os estudos complexos em torno dessa sequência, com a inserção da unidade dual ε. Assim, retratam-se os seus respectivos aspectos matemáticos.

Definição 1 *Para $n \geqslant 0$, os duais de Leonardo são definidos por:*

$$DL_n = L_n + \varepsilon L_{n+1}.$$

Definição 2 *A fórmula de recorrência dos duais de Leonardo, é dada por:*

$$DL_n = 2DL_{n-1} - DL_{n-3},$$

onde $n \geqslant 3, n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1 *A função geradora dos duais de Leonardo, é dada por:*

$$g(DL_n, x) = \frac{1 + \varepsilon + (1 - \varepsilon)(-x + x^2)}{(1 - 2x - x^3)}.$$

Demonstração 1 *Baseado na função:*

$$g(DL_n, x) = DL_0 + DL_1 x + DL_2 x^2 + \ldots + DL_n x^n + \ldots$$

MANGUEIRA, M.; VIEIRA, R.; ALVES, F.; CATARINO, P. A generalização dos duais e sedenios de Leonardo. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 20, p. 13–27, jul. 2021. Edição Iniciação Científica.
DOI: 10.21167/cqdvol20ic202123169664mcsmrpmvfrvapmmcc1327 Disponível em: www.fc.unesp.br/departamentos/matematica/revista-cqd

Pode-se realizar a multiplicação dessa função por $2x$ *e* x^3*, resultando:*

$$2xg(DL_n,x) = 2DL_0x + 2DL_1x^2 + 2DL_2x^3 + \ldots + 2DL_{n-1}x^n + \ldots$$
$$x^3g(DL_n,x) = DL_0x^3 + DL_1x^4 + DL_2x^5 + \ldots + DL_{n-3}x^n + \ldots$$

Realizando $g(DL_n,x) - 2xg(DL_n,x) - x^3g(DL_n,x)$*, tem-se que:*

$$(1-2x-x^3)g(DL_n,x) = DL_0 + (DL_1 - 2DL_0)x + (DL_2 - 2DL_1)x^2 + (DL_n - 2DL_{n-1} - DL_{n-3})x^n + \ldots$$

Com base na fórmula de recorrência dos duais de Leonardo (ver Definição 2), pode-se então simplificar a equação, obtendo:

$$\begin{aligned}
(1-2x-x^3)g(DL_n,x) &= DL_0 + (DL_1 - 2DL_0)x + (DL_2 - 2DL_1)x^2\\
(1-2x-x^3)g(DL_n,x) &= 1+\varepsilon - (1-\varepsilon)x + (1-\varepsilon)x^2\\
(1-2x-x^3)g(DL_n,x) &= 1+\varepsilon + (1-\varepsilon)(-x+x^2)\\
g(DL_n,x) &= \frac{1+\varepsilon + (1-\varepsilon)(-x+x^2)}{(1-2x-x^3)}.
\end{aligned}$$

Teorema 2 *A fórmula de Binet dos duais de Leonardo, com* $n \in \mathbb{Z}$*, é dada por:*

$$DL_n = A_g(1+\varepsilon r_1)r_1^n + B_g(1+\varepsilon r_2)r_2^n + C_g(1+\varepsilon r_3)r_3^n,$$

em que r_1, r_2, r_3 *são as raízes do polinômio característico* $r^3 - 2r^2 + 1 = 0$*,*

$$A_g = \frac{(x_2-1)(x_3-1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, B_g = \frac{(x_1-1)(x_3-1)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, C_g = \frac{(x_1-1)(x_2-1)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Demonstração 2 *Por meio da fórmula de Binet* $DL_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n + \gamma r_3^n$ *e da recorrência dos duais de Leonardo* $DL_n = L_n + \varepsilon L_{n+1}$*, com os valores iniciais* $DL_0 = 1+\varepsilon$*,* $DL_1 = 1+3\varepsilon$ *e* $DL_2 = 3+5\varepsilon$*, é possível obter o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases}
\alpha+\beta+\gamma &= 1+\varepsilon\\
\alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 &= 1+3\varepsilon\\
\alpha r_1^2 + \beta r_2^2 + \gamma r_3^2 &= 3+5\varepsilon
\end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{(3+5\varepsilon) + (-r_2-r_3)(1+3\varepsilon) + r_2r_3(1+\varepsilon)}{r_1^2 - r_1r_2 - r_1r_3 + r_2r_3},\\
\beta &= \frac{(3+5\varepsilon) + (-r_1-r_3)(1+3\varepsilon) + r_1r_3(1+\varepsilon)}{r_2^2 - r_2r_3 - r_1r_2 + r_1r_3},\\
\gamma &= \frac{(3+5\varepsilon) + (-r_1-r_2)(1+3\varepsilon) + r_1r_2(1+\varepsilon)}{r_3^2 + r_1r_2 - r_1r_3 - r_2r_3}.
\end{aligned}$$

Através das relações de Girard: $x_1x_2x_3 = -1, x_1+x_2+x_3 = 2$ *e* $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 0$*, é fácil ver que:*

$$\begin{aligned}
\alpha_g &= \frac{(r_2r_2 - r_2 - r_3 + 1)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}(1+\varepsilon r_1) = \frac{(r_2-1)(r_3-1)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)}(1+\varepsilon r_1) = A_g(1+\varepsilon r_1),\\
\beta_g &= \frac{(r_1r_3 - r_1 - r_3 + 1)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}(1+\varepsilon r_2) = \frac{(r_1-1)(r_3-1)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)}(1+\varepsilon r_2) = B_g(1+\varepsilon r_2),\\
\gamma_g &= \frac{(r_1r_2 - r_1 - r_2 + 1)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}(1+\varepsilon r_3) = \frac{(r_1-1)(r_2-1)}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)}(1+\varepsilon r_3) = C_g(1+\varepsilon r_3).
\end{aligned}$$

Baseado no trabalho de Vieira, Mangueira, Alves e Catarino (2020), pode-se estabelecer a forma matricial da sequência de Leonardo na forma complexa.

Propriedade 1 *Para $n \geq 1$ e $n \in \mathbb{N}$, a forma matricial dos duais de Leonardo é dada por:*

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-1 & 0 & 0\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}1+2\varepsilon & \varepsilon & 0\\0 & 1 & \varepsilon\\-\varepsilon & 0 & 1\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}L_{n+2} & L_{n+1} & L_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+2\varepsilon & \varepsilon & 0\\0 & 1 & \varepsilon\\-\varepsilon & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}DL_{n+2} & DL_{n+1} & DL_n\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Demonstração 3 *Pelo princípio da indução finita, tem-se que para $n = 1$:*

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+2\varepsilon & \varepsilon & 0\\0 & 1 & \varepsilon\\-\varepsilon & 0 & 1\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}5 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+2\varepsilon & \varepsilon & 0\\0 & 1 & \varepsilon\\-\varepsilon & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}5+9\varepsilon & 3+5\varepsilon & 1+3\varepsilon\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}DL_3 & DL_2 & DL_1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Assim, assumindo que vale para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-1 & 0 & 0\end{bmatrix}^k\begin{bmatrix}1+2\varepsilon & \varepsilon & 0\\0 & 1 & \varepsilon\\-\varepsilon & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}DL_{k+2} & DL_{k+1} & DL_k\end{bmatrix}.$$

Por fim, verifica-se a validade para $n = k+1$:

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{k+1}\begin{bmatrix}1+2\varepsilon & \varepsilon & 0\\0 & 1 & \varepsilon\\-\varepsilon & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}L_{k+2} & L_{k+1} & L_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\-1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+2\varepsilon & \varepsilon & 0\\0 & 1 & \varepsilon\\-\varepsilon & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}L_{k+3} & L_{k+2} & L_{k+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+2\varepsilon & \varepsilon & 0\\0 & 1 & h\\-\varepsilon & 0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}L_{k+3}+2\varepsilon L_{k+3}-\varepsilon L_{k+1} & \varepsilon L_{k+3}+L_{k+2} & \varepsilon L_{k+2}+L_{k+1}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}L_{k+3}+\varepsilon L_{k+4} & DL_{k+2} & DL_{k+1}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}DL_{k+3} & DL_{k+2} & DL_{k+1}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

3 A generalização dos duais de Leonardo

A seguir, será analisado o comportamento dos termos com índices inteiros não positivos dos duais de Leonardo.

Definição 3 *Para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, a fórmula de recorrência dos duais de Leonardo para índice inteiro não positivo, é dada por:*

$$DL_{-n} = 2DL_{-n+2} - DL_{-n+3},$$

com os respectivos valores iniciais: $DL_{-2} = 1-\varepsilon, DL_{-1} = -1+\varepsilon$ e $DL_0 = 1+\varepsilon$.

Propriedade 2 *A função geradora dos duais de Leonardo para índice inteiro não positivo, é expressa por:*

$$g(DL_{-n},x) = \frac{1+\varepsilon+(-1+\varepsilon)x+(-1-3\varepsilon)x^2}{x^3-2x^2+1}.$$

Demonstração 4 *Realizando a multiplicação da função por $2x^2$ e x^3, tem-se que:*

$$\begin{aligned} g(DL_{-n,x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} DL_{-n}x^n = DL_0 + DL_{-1}x + DL_{-2}x^2 + \ldots + DL_{-n}x^n + \ldots \\ 2x^2 g(DL_{-n},x) &= 2DL_0x^2 + 2DL_{-1}x^3 + 2DL_{-2}x^4 + \ldots + 2DL_{-n-2}x^n + \ldots \\ x^3 g(DL_{-n},x) &= DL_0x^3 + DL_{-1}x^4 + DL_{-2}x^5 + \ldots + DL_{-n-3}x^n + \ldots \end{aligned}$$

Assim, ao realizar a operação $x^3g(DL_{-n},x) - 2x^2g(DL_{-n},x) + g(DL_{-n},x)$, tem-se que:

$$(x^3-2x^2+1)g(DL_{-n},x) = DL_0 + DL_{-1}x + (-2DL_0 + DL_{-2})x^2 + (DL_{-n} - 2DL_{-n-2} - DL_{-n-3})x^n + \ldots$$

Diante da fórmula de recorrência dos duais de Leonardo para índice inteiro não positivo (ver Definição 3), pode-se simplificar a equação, obtendo:

$$\begin{aligned} (x^3-2x^2+1)g(DL_{-n},x) &= DL_0 + DL_{-1}x + (-2DL_0 + DL_{-2})x^2 \\ (x^3-2x^2+1)g(DL_{-n},x) &= 1+\varepsilon+(-1+\varepsilon)x+(-1-3\varepsilon)x^2 \\ g(DL_{-n},x) &= \frac{1+\varepsilon+(-1+\varepsilon)x+(-1-3\varepsilon)x^2}{x^3-2x^2+1} \end{aligned}$$

Propriedade 3 *Para $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, a forma matricial dos duais de Leonardo, com índice inteiro não positivo, é dada por:*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1+2\varepsilon & & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_{-n+2} & L_{-n+1} & L_{-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+2\varepsilon & h & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} DL_{-n+2} & DL_{-n+1} & DL_{-n} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Demonstração 5 *De modo similar à demonstração realizada no Teorema 1, pode-se validar esta propriedade.*

4 Os sedenios de Leonardo

Nesta seção, serão estudados os sedenios de Leonardo, abordando os seus respectivos aspectos matemáticos.

Definição 4 *Para $n \geqslant 0$, os sedenios de Leonardo são definidos por:*

$$SL_n = \sum_{s=0}^{15} L_{n+s}\mathrm{e}_s,$$

Definição 5 *A fórmula de recorrência dos sedenios de Leonardo, é dada por:*

$$SL_n = 2SL_{n-1} - SL_{n-3},$$

onde $n \geqslant 3, n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3 *A função geradora dos sedenios de Leonardo,* SL_n*, é dada por:*

$$g(SL_n, x) = \frac{1}{(1 - 2x - x^3)} \sum_{s=0}^{15} (L_s + L_{s-2}x + L_{s-1}x^2)\mathrm{e}_\mathrm{s}.$$

Demonstração 6 *Baseado na função:*

$$g(SL_n, x) = SL_0 + SL_1x + SL_2x^2 + \ldots + SL_nx^n + \ldots$$

Pode-se realizar a multiplicação dessa função por $2x$ *e* x^3*, resultando:*

$$\begin{aligned} 2xg(SL_n, x) &= 2SL_0x + 2SL_1x^2 + 2SL_2x^3 + \ldots + 2SL_{n-1}x^n + \ldots \\ x^3g(SL_n, x) &= SL_0x^3 + SL_1x^4 + SL_2x^5 + \ldots + SL_{n-3}x^n + \ldots \end{aligned}$$

Realizando $g(SL_n, x) - 2xg(SL_n, x) - x^3g(SL_n, x)$*, tem-se que:*

$$(1 - 2x - x^3)g(SL_n, x) = SL_0 + (SL_1 - 2SL_0)x + (SL_2 - 2SL_1)x^2 + (SL_n - 2SL_{n-1} - SL_{n-3})x^n + \ldots$$

Com base na fórmula de recorrência dos sedenios de Leonardo (ver Definição 5), pode-se simplificar a equação, obtendo:

$$\begin{aligned} (1 - 2x - x^3)g(SL_n, x) &= SL_0 + (SL_1 - 2SL_0)x + (SL_2 - 2SL_1)x^2 \\ g(SL_n, x) &= \frac{1}{(1 - 2x - x^3)} \sum_{s=0}^{15} (L_s + L_{s-2}x + L_{s-1}x^2)\mathrm{e}_\mathrm{s}. \end{aligned}$$

Teorema 4 *A fórmula de Binet dos sedenios de Leonardo, com* $n \in \mathbb{Z}$*, é dada por:*

$$SL_n = \alpha_l r_1^n + \beta_l r_2^n + \gamma_l r_3^n,$$

em que r_1, r_2, r_3 *são as raízes do polinômio característico* $r^3 - 2r^2 + 1 = 0$,

$$\begin{aligned} &A_l = \frac{(x_2 - 1)(x_3 - 1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}, B_l = \frac{(x_1 - 1)(x_3 - 1)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}, C_l = \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}, \\ &\alpha_{ol} = \sum_{s=0}^{15} x_1^s \mathrm{e}_\mathrm{s}, \beta_{ol} = \sum_{s=0}^{15} x_2^s \mathrm{e}_\mathrm{s}, \gamma_{ol} = \sum_{s=0}^{15} x_3^s \mathrm{e}_\mathrm{s}, \\ &\alpha_l = A_l\alpha_{ol}, \beta_l = B_l\beta_{ol}, \gamma_l = C_l\gamma_{ol}. \end{aligned}$$

Demonstração 7 *Por meio da fórmula de Binet* $SL_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n + \gamma r_3^n$ *e da recorrência dos sedenios de Leonardo* $SL_n = \sum_{s=0}^{15} L_{n+s}\mathrm{e_s}$*, com os valores iniciais* $SL_0 = \sum_{s=0}^{15} L_s\mathrm{e_s}$*,* $SL_1 = \sum_{s=0}^{15} L_{s+1}\mathrm{e_s}$ *e* $SL_2 = \sum_{s=0}^{15} L_{s+2}\mathrm{e_s}$*, é possível obter o seguinte sistema de equações:*

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = \displaystyle\sum_{s=0}^{15} L_s\mathrm{e_s} \\ \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 & = \displaystyle\sum_{s=0}^{15} L_{s+1}\mathrm{e_s} \\ \alpha r_1^2 + \beta r_2^2 + \gamma r_3^2 & = \displaystyle\sum_{s=0}^{15} L_{s+2}\mathrm{e_s} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se que:

$$\alpha = \frac{\left(\sum_{s=0}^{15} L_{s+2}\mathrm{e_s}\right) + (-r_2 - r_3)\left(\sum_{s=0}^{15} L_{s+1}\mathrm{e_s}\right) + r_2r_3\left(\sum_{s=0}^{15} L_s\mathrm{e_s}\right)}{r_1^2 - r_1r_2 - r_1r_3 + r_2r_3},$$

$$\beta = \frac{\left(\sum_{s=0}^{15} L_{s+2}\mathrm{e_s}\right) + (-r_1 - r_3)\left(\sum_{s=0}^{15} L_{s+1}\mathrm{e_s}\right) + r_1r_3\left(\sum_{s=0}^{15} L_s\mathrm{e_s}\right)}{r_2^2 - r_2r_3 - r_1r_2 + r_1r_3},$$

$$\gamma = \frac{\left(\sum_{s=0}^{15} L_{s+2}\mathrm{e_s}\right) + (-r_1 - r_2)\left(\sum_{s=0}^{15} L_{s+1}\mathrm{e_s}\right) + r_1r_2\left(\sum_{s=0}^{15} L_s\mathrm{e_s}\right)}{r_3^2 + r_1r_2 - r_1r_3 - r_2r_3}.$$

Através das relações de Girard: $x_1x_2x_3 = -1, x_1 + x_2 + x_3 = 2$ *e* $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 0$*, é fácil ver que:*

$$\alpha_l = \frac{(r_2r_2 - r_2 - r_3 + 1)}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)} \sum_{s=0}^{15} r_1^s\mathrm{e_s} = \frac{(r_2 - 1)(r_3 - 1)}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)} \sum_{s=0}^{15} r_1^s\mathrm{e_s} = A_l \sum_{s=0}^{15} r_1^s\mathrm{e_s},$$

$$\beta_l = \frac{(r_1r_3 - r_1 - r_3 + 1)}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)} \sum_{s=0}^{15} r_2^s\mathrm{e_s} = \frac{(r_1 - 1)(r_3 - 1)}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)} \sum_{s=0}^{15} r_2^s\mathrm{e_s} = B_l \sum_{s=0}^{15} r_2^s\mathrm{e_s},$$

$$\gamma_l = \frac{(r_1r_2 - r_1 - r_2 + 1)}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)} \sum_{s=0}^{15} r_3^s\mathrm{e_s} = \frac{(r_1 - 1)(r_2 - 1)}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)} \sum_{s=0}^{15} r_3^s\mathrm{e_s} = C_l \sum_{s=0}^{15} r_3^s\mathrm{e_s}.$$

Definindo $\alpha_{ol} = \sum_{s=0}^{15} r_1^s\mathrm{e_s}, \beta_{ol} = \sum_{s=0}^{15} r_2^s\mathrm{e_s}$ *e* $\gamma_{ol} = \sum_{s=0}^{15} r_3^s\mathrm{e_s}$*, é fácil ver que:*

$$\alpha_l = A_l\alpha_{ol}, \beta_l = B_l\beta_{ol}, \gamma_l = C_l\gamma_{ol}.$$

A forma matricial dos sedenios de Leonardo é realizada com base no trabalho de Vieira, Mangueira, Alves e Catarino (2020), em que realiza um estudo referente à forma matricial da sequência de Leonardo unidimensional.

Propriedade 4 *Para $n \geqslant 2$ e $n \in \mathbb{N}$, a forma matricial dos sedenios de Leonardo é dada por:*

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} SF_2 & SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{n+2}} \\ \frac{SLF_{-2}}{L_{n+1}} & SF_{-1} & SF_0 \\ -SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_n} & SF_{-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_{n+2} & L_{n+1} & L_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SF_2 & SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{n+2}} \\ \frac{SLF_{-2}}{L_{n+1}} & SF_{-1} & SF_0 \\ -SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_n} & SF_{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} SL_{n+2} & SL_{n+1} & SL_n \end{bmatrix},\end{aligned}$$

em que $SLF_n = SL_n - SF_n$.

Demonstração 8 *Pelo princípio da indução finita, tem-se que para $n = 2$:*

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} SF_2 & SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_4} \\ \frac{SLF_{-2}}{L_3} & SF_{-1} & SF_0 \\ -SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_2} & SF_{-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 9 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SF_2 & SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{9} \\ \frac{SLF_{-2}}{5} & SF_{-1} & SF_0 \\ -SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{3} & SF_{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9SF_2 - 3SF_0 + SLF_{-2} & 9SF_0 + 5SF_{-1} + SLF_{-2} & SLF_{-2} + 5SF_0 + 3SF_{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} SL_4 & SL_3 & SL_2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Assim, assumindo que vale para qualquer $n = k$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} SF_2 & SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{k+2}} \\ \frac{SLF_{-2}}{L_{k+1}} & SF_{-1} & SF_0 \\ -SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_k} & SF_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SL_{k+2} & SL_{k+1} & SL_k \end{bmatrix}.$$

Por fim, verifica-se a validade para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} \begin{bmatrix} SF_2 & SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{k+3}} \\ \frac{SLF_{-2}}{L_{k+2}} & SF_{-1} & SF_0 \\ -SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{k+1}} & SF_{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_{k+2} & L_{k+1} & L_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SF_2 & SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{k+3}} \\ \frac{SLF_{-2}}{L_{k+2}} & SF_{-1} & SF_0 \\ -SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{k+1}} & SF_{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_{k+3} & L_{k+2} & L_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SF_2 & SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{k+3}} \\ \frac{SLF_{-2}}{L_{k+2}} & SF_{-1} & SF_0 \\ -SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{k+1}} & SF_{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} L_{k+3}SF_{-2} - L_{k+1}SF_0 + SLF_{-2} & L_{k+3}SF_0 + L_{k+2}SF_{-1} + SLF_{-2} & L_{k+2}SF_0 + L_{k+1}SF_{-1} + SLF_{-2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} SL_{k+3} & SL_{k+2} & SL_{k+1} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

5 A generalização dos sedenios de Leonardo

A seguir, será analisado o comportamento dos termos com índices inteiros não positivos dos sedenios de Leonardo.

Definição 6 *Para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, a fórmula de recorrência dos sedenios de Leonardo para índice inteiro não positivo, é dada por:*

$$SL_{-n} = 2SL_{-n+2} - SL_{-n+3}.$$

Definição 7 *Para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, o sedenios de Leonardo, para índice inteiro não positivo, é definido pela equação:*

$$SL_{-n} = \sum_{s=0}^{15} L_{-n+s}\mathrm{e_s}.$$

Propriedade 5 *A função geradora dos sedenios de Leonardo para índice inteiro não positivo, é expressa por:*

$$g(SL_{-n}, x) = \frac{SL_0 + SL_{-1}x + (-2SL_0 + SL_{-2})x^2}{x^3 - 2x^2 + 1},$$

com os respectivos valores iniciais: $SL_{-2} = \sum_{s=0}^{15} L_{-2+s}\mathrm{e_s}$, $SL_{-1} = \sum_{s=0}^{15} L_{-2+s}\mathrm{e_s}$ *e* $SL_0 = \sum_{s=0}^{15} L_s\mathrm{e_s}$.

Demonstração 9 *Realizando a multiplicação da função por $2x^2$ e x^3, tem-se que:*

$$\begin{aligned}
g(SL_{-n,x}) &= \sum_{n=0}^{\infty} SL_{-n}x^n = SL_0 + SL_{-1}x + SL_{-2}x^2 + \ldots + SL_{-n}x^n + \ldots\\
2x^2 g(SL_{-n}, x) &= 2SL_0x^2 + 2SL_{-1}x^3 + 2SL_{-2}x^4 + \ldots + 2SL_{-n-2}x^n + \ldots\\
x^3 g(SL_{-n}, x) &= SL_0x^3 + SL_{-1}x^4 + SL_{-2}x^5 + \ldots + SL_{-n-3}x^n + \ldots
\end{aligned}$$

Assim, ao realizar a operação $x^3g(SL_{-n}, x) - 2x^2g(SL_{-n}, x) + g(SL_{-n}, x)$, tem-se que:

$$(x^3 - 2x^2 + 1)g(SL_{-n}, x) = SL_0 + SL_{-1}x + (-2SL_0 + SL_{-2})x^2 + (SL_{-n} - SL_{-n-2} - SL_{-n-3})x^n + \ldots$$

De posse da fórmula de recorrência dos sedenios de Leonardo para índice inteiro não positivo (ver Definição 6), pode-se simplificar a equação, obtendo:

$$\begin{aligned}
(x^3 - 2x^2 + 1)g(SL_{-n}, x) &= SL_0 + SL_{-1}x + (-2SL_0 + SL_{-2})x^2\\
g(SL_{-n}, x) &= \frac{SL_0 + SL_{-1}x + (-2SL_0 + SL_{-2})x^2}{x^3 - 2x^2 + 1}
\end{aligned}$$

Com os valores iniciais: $SL_{-2} = \sum_{s=0}^{15} L_{-2+s}\mathrm{e_s}$, $SL_{-1} = \sum_{s=0}^{15} L_{-2+s}\mathrm{e_s}$ *e* $SL_0 = \sum_{s=0}^{15} L_s\mathrm{e_s}$.

Propriedade 6 *Para $n > 0$, a forma matricial dos sedenios de Leonardo, com índice inteiro não negativo, é dada por:*

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} SF_2 & SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{-n+2}} \\ \frac{SLF_{-2}}{L_{-n+1}} & SF_{-1} & SF_0 \\ -SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{-n}} & SF_{-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} L_{-n+2} & L_{-n+1} & L_{-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SF_2 & SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{-n+2}} \\ \frac{SLF_{-2}}{L_{-n+1}} & SF_{-1} & SF_0 \\ -SF_0 & \frac{SLF_{-2}}{L_{-n}} & SF_{-1} \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} SL_{-n+2} & SL_{-n+1} & SL_{-n} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

em que $SLF_{-n} = SL_{-n} - SF_{-n}$.

Demonstração 10 *De modo similar à demonstração realizada na Propriedade 4, pode-se validar esta propriedade.*

6 Propriedades dos duais e sedenios de Leonardo

A seguir, são estudadas algumas propriedades inerentes aos duais e sedenios de Leonardo.

Propriedade 7 *A soma dos n primeiros números dos duais de Leonardo é dada por:*

$$\sum_{m=3}^{n} DL_m = 2DL_{n-2} + 2DL_{n-1} - (DL_0 + DL_1) + \sum_{s=2}^{n-3} DL_s$$

Demonstração 11 *Utilizando a relação de recorrência dos duais de Leonardo, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:*

$$DL_n = 2DL_{n-1} - DL_{n-3} \tag{4}$$

Assim, avaliando a relação dada na Equação 4, em valores de $n \geq 3$, obtemos:

$$\begin{aligned}
DL_3 &= 2DL_2 - DL_0 \\
DL_4 &= 2DL_3 - DL_1 \\
DL_5 &= 2DL_4 - DL_2 \\
DL_6 &= 2DL_5 - DL_3 \\
DL_7 &= 2DL_6 - DL_4 \\
&\vdots \\
DL_{n-2} &= 2DL_{n-3} - DL_{n-5} \\
DL_{n-1} &= 2DL_{n-2} - DL_{n-4} \\
DL_n &= 2DL_{n-1} - DL_{n-3}
\end{aligned}$$

Através de cancelamentos sucessivos, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=3}^{n} DL_m &= DL_2 - DL_0 + DL_3 - DL_1 + DL_4 + \cdots + DL_{n-3} + 2DL_{n-2} + 2DL_{n-1} \\
&= 2DL_{n-2} + 2DL_{n-1} - (DL_0 + D_1) + \sum_{s=2}^{n-3} DL_s
\end{aligned}$$

Propriedade 8 *A soma dos números de índices pares dos duais de Leonardo é dada por:*

$$\sum_{m=3}^{n} DL_{2m} = 2DL_{2n-1} - DL_1 + \sum_{s=3}^{2n-3} DL_s$$

Demonstração 12 *Utilizando a relação de recorrência dos duais de Leonardo, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:*

$$DL_n = 2DL_{n-1} - DL_{n-3}$$

Assim, avaliando a relação de recorrência, em valores de $n \geq 3$, obtemos:

$$\begin{aligned} DL_4 &= 2DL_3 - DL_1 \\ DL_6 &= 2DL_5 - DL_3 \\ DL_8 &= 2DL_7 - DL_5 \\ &\vdots \\ DL_{2n-2} &= 2DL_{2n-3} - DL_{2n-5} \\ DL_{2n} &= 2DL_{2n-1} - DL_{2n-3} \end{aligned}$$

Através de cancelamentos sucessivos, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \sum_{m=3}^{n} DL_{2m} &= DL_3 - DL_1 + DL_5 + \cdots + DL_{2n-3} + 2DL_{2n-1} \\ &= 2DL_{2n-1} - DL_1 + \sum_{s=3}^{2n-3} DL_s \end{aligned}$$

Propriedade 9 *A soma dos números de índices ímpares dos duais de Leonardo é dada por:*

$$\sum_{m=3}^{n} DL_{2m-1} = 2DL_{2n-2} - DL_0 + \sum_{s=2}^{2n-4} DL_s$$

Demonstração 13 *Utilizando a relação de recorrência dos duais de Leonardo, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:*

$$DL_n = 2DL_{n-1} - DL_{n-3}$$

Assim, avaliando a relação de recorrência, em valores de $n \geq 3$, obtemos:

$$\begin{aligned} DL_3 &= 2DL_2 - DL_0 \\ DL_5 &= 2DL_4 - DL_2 \\ DL_7 &= 2DL_6 - DL_4 \\ &\vdots \\ DL_{2n-3} &= 2DL_{2n-4} - DL_{2n-6} \\ DL_{2n-1} &= 2DL_{2n-2} - DL_{2n-4} \end{aligned}$$

Através de cancelamentos sucessivos, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \sum_{m=3}^{n} DL_{2m-1} &= DL_2 - DL_0 + DL_4 + \cdots + DL_{2n-4} + 2DL_{2n-2} \\ &= 2DL_{2n-2} - DL_0 + \sum_{s=2}^{2n-4} DL_s \end{aligned}$$

Propriedade 10 *A soma dos n primeiros números dos sedenios de Leonardo é dada por:*

$$\sum_{m=3}^{n} SL_m = 2SL_{n-2} + 2SL_{n-1} - \sum_{s=0}^{15} (L_{s+0} + L_{s+1})\mathrm{e_s} + \sum_{s=2}^{n-3} SL_s$$

Demonstração 14 *Utilizando a relação de recorrência dos sedenios de Leonardo, com* $n \in \mathbb{N}$*, tem-se que:*

$$SL_n = 2SL_{n-1} - SL_{n-3} \tag{5}$$

Assim, avaliando a relação dada na Equação 5, em valores de $n \geq 3$*, obtemos:*

$$\begin{aligned}
SL_3 &= 2SL_2 - SL_0 \\
SL_4 &= 2SL_3 - SL_1 \\
SL_5 &= 2SL_4 - SL_2 \\
SL_6 &= 2SL_5 - SL_3 \\
SL_7 &= 2SL_6 - SL_4 \\
&\vdots \\
SL_{n-2} &= 2SL_{n-3} - SL_{n-5} \\
SL_{n-1} &= 2SL_{n-2} - SL_{n-4} \\
SL_n &= 2SL_{n-1} - SL_{n-3}
\end{aligned}$$

Através de cancelamentos sucessivos, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
\sum_{m=3}^{n} SL_m &= SL_2 - SL_0 + SL_3 - SL_1 + SL_4 + \cdots + 2SL_{n-2} + 2SL_{n-1} \\
&= 2SL_{n-2} + 2SL_{n-1} - (SL_0 + SL_1) + \sum_{s=2}^{n-3} SL_s
\end{aligned}$$

Considerando os valores iniciais através da Definição 4, conclui-se que:

$$2SL_{n-2} + 2SL_{n-1} - \sum_{s=0}^{15} (L_{s+0} + L_{s+1})\mathrm{e_s} + \sum_{s=2}^{n-3} SL_s$$

Propriedade 11 *A soma dos números de índices pares dos sedenios de Leonardo é dada por:*

$$\sum_{m=3}^{n} SL_{2m} = 2SL_{2n-1} - \sum_{s=0}^{15} L_{s+1}\mathrm{e_s} + \sum_{s=3}^{2n-3} SL_s$$

Demonstração 15 *Utilizando a relação de recorrência dos octônios de Leonardo, com* $n \in \mathbb{N}$*, tem-se que:*

$$SL_n = 2SL_{n-1} - SL_{n-3}$$

Assim, avaliando a relação de recorrência, em valores de $n \geq 3$*, obtemos:*

$$\begin{aligned}
SL_4 &= 2SL_3 - SL_1 \\
SL_6 &= 2SL_5 - SL_3 \\
SL_8 &= 2SL_7 - SL_5 \\
&\vdots \\
SL_{2n-2} &= 2SL_{2n-3} - SL_{2n-5} \\
SL_{2n} &= 2SL_{2n-1} - SL_{2n-3}
\end{aligned}$$

Através de cancelamentos sucessivos, obtêm-se:

$$\begin{aligned}\sum_{m=3}^{n} SL_{2m} &= SL_3 - SL_1 + SL_5 + \cdots + SL_{2n-3} + 2SL_{2n-1} \\ &= 2SL_{2n-1} - SL_1 + \sum_{s=3}^{2n-3} SL_s\end{aligned}$$

Considerando os valores iniciais através da Definição 4, conclui-se que:

$$2SL_{2n-1} - \sum_{s=0}^{15} L_{s+1}\mathrm{e_s} + \sum_{s=3}^{2n-3} SL_s$$

Propriedade 12 *A soma dos números de índices ímpares dos sedenios de Leonardo é dada por:*

$$\sum_{m=3}^{n} SL_{2m-1} = 2SL_{2n-2} - \sum_{s=0}^{15} L_{s+0}\mathrm{e_s} + \sum_{s=2}^{2n-4} SL_s$$

Demonstração 16 *Utilizando a relação de recorrência dos sedenios de Leonardo, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:*

$$SL_n = 2SL_{n-1} - SL_{n-3}$$

Assim, avaliando a relação de recorrência, em valores de $n \geq 3$, obtemos:

$$\begin{aligned}SL_3 &= 2SL_2 - SL_0 \\ SL_5 &= 2SL_4 - SL_2 \\ SL_7 &= 2SL_6 - SL_4 \\ &\vdots \\ SL_{2n-3} &= 2SL_{2n-4} - SL_{2n-6} \\ SL_{2n-1} &= 2SL_{2n-2} - SL_{2n-4}\end{aligned}$$

Através de cancelamentos sucessivos, obtêm-se:

$$\begin{aligned}\sum_{m=3}^{n} SL_{2m-1} &= SL_2 - SL_0 + SL_4 + \cdots + SL_{2n-4} + 2SL_{2n-2} \\ &= 2SL_{2n-2} - SL_0 + \sum_{s=3}^{2n-4} SL_s\end{aligned}$$

Considerando os valores iniciais através da Definição 4, conclui-se que:

$$2SL_{2n-2} - \sum_{s=0}^{15} L_{s+0}\mathrm{e_s} + \sum_{s=2}^{2n-4} SL_s$$

7 Conclusão

Este trabalho apresentou o processo de complexificação dos números de Leonardo, exibindo os números duais e sedenios de Leonardo, bem como sua extensão para os números inteiros não positivos, generalizando assim os números duais e sedenios de Leonardo. Em torno desses números foram estudados suas respectivas fórmulas de Binet, funções geradoras, formas matriciais e propiedades.

Por fim, este artigo contribuiu no âmbito matemático apresentando uma complexificação desses números e, para trabalhos futuros, pretende-se estudar aplicabilidades desses números.

8 Agradecimentos

A parte de desenvolvimento da pesquisa no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Cientifico e Tecnológico – CNPq e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES.

A parte de desenvolvimento da pesquisa em Portugal é financiado por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia. I. P, no âmbito o projeto UID/CED/00194/2020.

9 Referências Bibliográficas

ALVES, F. R. V.; VIEIRA, R. P. M. The Newton fractal's Leonardo sequence study with the Google Colab. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 15, n. 2, p. 1-9, 2020.

ALVES, F. R. V.; VIEIRA, R. P. M.; CATARINO, P. M. M. C. Visualizing the Newtons fractal from the recurring linear sequence with Google Colab: an example of Brazil X Portugal research. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 15, n. 3, p. 1-19, 2020.

BILGICI, G.; TOKESER, U.; UNAL, Z. Fibonacci and Lucas sedenions. **Journal of Integer Sequences**, v. 20, p. 1-11, 2017.

CATARINO, P.; BORGES, A. On Leonardo numbers. **Acta Mathematica Universitatis Comenianae**, v. 89, n. 1, p. 75-86, 2020.

CAWAGAS, R. E. On the structure and zero divisors of the Cayley-Dickson sedenion algebra. **Discussiones Mathematicae - General Algebra and Applications**, v. 24, p. 251-265, 2004.

CLIFFORD, M. A. Preliminary sketch of bi-quaternions. **Proceedings of the London Mathematical Society**, v. s1-4, n. 1, p. 381-395, 1871.

SHANNON, A. G. A note on generalized Leonardo numbers. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 25, n. 3, p. 97-101, 2019.

SHOHAM, M. On Grassmann's products and Clifford's dual unit. *In*: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON HISTORY OF MACHINES AND MECHANISMS, 2000, Cassino, Italy. **Proceedings** [...]. Dordrecht: Springer, 2000. p. 173-180.

VIEIRA, R. P. M.; MANGUEIRA, M. C. dos S.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A forma matricial dos números de Leonardo. **Ciência e Natura**, v. 42, 2020.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Relações bidimensionais e identidades da sequência de Leonardo. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 4, n. 2, p. 156-173, 2019.