Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 15, jul. 2019
Iniciação Científica

Modelagem matemática de problemas agrícolas utilizando programação linear

Mathematical modeling of agricultural problems using linear programming

Glaucia Maria Bressan
Câmpus Cornélio Procópio
Universidade Tecnológica
Federal do Paraná
glauciabressan@utfpr.edu.br

Daniely Cristiny Lucas Reghim
Câmpus Cornélio Procópio
Universidade Tecnológica
Federal do Paraná
danielyreghim@alunos.
utfpr.edu.br

Elenice Weber Stiegelmeier
Câmpus Cornélio Procópio
Universidade Tecnológica
Federal do Paraná
elenicew@utfpr.edu.br

Resumo

Os setores agroindustriais têm buscado o aprimoramento e o conhecimento tecnológico de suas áreas de atuação, devido à acirrada concorrência no mercado. Esse fato motiva o desenvolvimento de ações que busquem otimizar os processos, tais como produzir alimentos evitando-se desperdício de matéria prima e insumos, ou preservar o meio ambiente, aumentando a área plantada. A produção agrícola, por sua vez, tem adaptado antigas práticas às mais atuais tecnologias de produção com o objetivo de aumentar a produtividade, cultivando produtos mais saudáveis e reduzindo impactos ambientais. Assim, o objetivo deste trabalho é a formulação matemática de problemas utilizando programação linear em problemas agrícolas. Os estudos de caso apresentados envolvem a maximização de lucros de uma produção agrícola e de uma propriedade de reflorestamento. Os problemas foram resolvidos com apoio computacional para obtenção das soluções através do método SIMPLEX, buscando a eficiência no planejamento da rotação de culturas em propriedades agrícolas.
Palavras-chave: Programação Linear; Método Simplex; Produção Agrícola; Problema de Reflorestamento.

Abstract

The agroindustrial sectors have been seeking the improvement and the technological knowledge of their expertise areas, due to the strong competition in the market. This fact motivates the development of actions that optimize processes, such as to produce food avoiding waste of raw materials and inputs, or preserve the environment, by increasing the planted area. Agricultural production, in its turn, has adapted old practices to more current production technologies with the goal of increasing productivity, cultivating healthier products and reducing environmental impacts. Thus, the goal of this work is to formulate problems using linear programming in agricultural problems. The presented case studies involve the maximization of profits of an agricultural production and of a reforestation property. The problems were solved with computational support in order to obtain the solutions by running the SIMPLEX method, providing efficiency in the planning of cultures rotation in agricultural properties.
Keywords: Linear Programming. Simplex Method. Agricultural Production. Reforestation Problem.

Artigo recebido em set. 2018 e aceito em maio 2019.

1 Introdução

O agronegócio tem se afirmado como setor de importância na economia do país. Desde os anos 90, sua produtividade vem crescendo rapidamente e as reduções de custos de produção vêm sendo repassadas ao consumidor na forma de preços mais acessíveis (ORMOND; PAULA; FAVERET FILHO; ROCHA, 2002). Na tentativa de proteger o nicho de mercado no qual se pretende localizar, cada grupo procura diferenciar a sua produção com um conjunto de conceitos próprios, que incluem desde filosofia até a definição do tipo de insumo utilizado. Na realidade, quase sempre se trata de um esforço de caracterização de processos de produção e de produtos com o objetivo de aumentar a parcela de mercado (ORMOND; PAULA; FAVERET FILHO; ROCHA, 2002).

De acordo com Martini e Leite (1988), entre os anos 69 a 89, a floresta brasileira evoluiu consideravelmente. À medida que a área plantada expandiu-se, elevou-se o nível técnico dos profissionais e das empresas florestais. Esta evolução técnica, aliada à escassez de recursos, evidenciou a necessidade do planejamento e do controle da produção, tornando imprescindível a busca por soluções que otimizem o processo produtivo, para uma adequada gestão dos recursos.

No contexto do estudo de problemas agrícolas, o estado do Paraná tem uma grande concentração de propriedades rurais, especificamente pequenas e médias, que se mostram menos favorecidas no mercado em termos de gestão (RIBEIRO; FORTES, 2015). Muitas propriedades se deparam com a dúvida de quais culturas devem produzir naquele ano agrícola e, dessa forma, buscam por soluções que otimizem os processos produtivos, reduzam os custos e evitem o desperdício (RIBEIRO; FORTES, 2015).

A Programação Matemática, por sua vez, consiste em uma das técnicas da Pesquisa Operacional que envolve vários modelos matemáticos de otimização. Com a utilização dos meios de processamento automático de dados, os chamados programas de Programação Matemática podem examinar inúmeras configurações viáveis do problema proposto pelo tomador de decisão e selecionar, sob certos critérios, as "melhores" soluções (GOLDBARG; LUNA, 2005). E é fortemente direcionada ao apoio da tomada de decisão no gerenciamento de sistemas de grande porte, especialmente, no que diz respeito ao tratamento de variáveis quantificadas. A técnica permite a modelagem de inter-relações entre variáveis que dificilmente seriam visíveis de forma intuitiva. Na Programação Linear, os problemas são formulados matematicamente utilizando equações e inequações do tipo lineares. No âmbito da otimização de processos, a Pesquisa Operacional pode ser definida como uma ciência que aplica métodos científicos a problemas envolvendo o controle de sistemas, fornecendo soluções mais eficientes que maximizam lucros e produções, respeitando as restrições do local em estudo.

Na situação econômica brasileira, a agricultura conta com recursos limitados, com a competição no mercado externo e com a falta de política agrícola estável. Isto torna necessário o adequado planejamento das atividades na propriedade agrícola, tendo como princípio a obtenção de soluções ótimas para os processos produtivos de planejamento e escolha de culturas agrícolas (RIBEIRO; FORTES, 2015). A modelagem e a resolução de problemas auxiliam na tomada de decisão, indicando ao produtor rural a quantidade a ser produzida de cada produto, constituindo-se num valioso instrumento de capacitação para implantação de novas tecnologias e descartes daquelas já ultrapassadas.

Dentre alguns trabalhos mais recentes que empregaram a Programação Linear em problemas agrícolas, no trabalho de Balsan, Fabbrin e Ruppenthal (2016) foram analisadas as culturas que otimizariam o lucro naquele ano agrícola, em uma propriedade da região noroeste do Rio Grande do Sul. Foi realizado um levantamento da receita bruta por hectare plantado em 3 culturas (milho, painço e soja). A Programação Linear foi aplicada para verificar qual área deve ser destinada para

o plantio de cada cultura, maximizando o lucro. Além deste, Souza, Ferreira, Ponciano e Brito (2008) utilizaram a programação linear para formular sistemas de produção agrícola capazes de otimizar os recursos de agricultores familiares das regiões Norte e Noroeste Fluminense. Os resultados indicaram que os sistemas de produção envolvendo o cultivo simultâneo de maracujá e goiaba, principalmente, propiciaram significativa redução dos riscos, sem grave comprometimento da renda gerada (SOUZA; FERREIRA; PONCIANO; BRITO, 2008).

Tendo como princípio a obtenção de soluções ótimas para os processos agro-industriais de planejamento e escolha de culturas agrícolas, Oliszeski (2011) realizou a construção de modelos de otimização que devem ser considerados para que haja a maximização de lucros em propriedades agrícolas, com melhor aproveitamento de terras, capital e mão-de-obra nos sistemas de produção propostos, bem como a maximização do sucesso de se escolher por determinadas culturas.

Diante desse contexto, o objetivo desse trabalho é a formulação matemática de problemas agrícolas utilizando a programação linear para maximizar o lucro da produção, respeitando as limitações do solo e do local em estudo, a fim de atender a demanda. Dois estudos de caso são apresentados, o primeiro se trata de uma produção agrícola de legumes em uma propriedade da região de Uraí, PR, e o segundo se trata de um problema de reflorestamento do município de Cornélio Procópio, PR. No caso do problema de reflorestamento, cerca de 7.3 milhões de florestas são destruídas a cada ano. Florestas tropicais costumavam cobrir cerca de 15% da área terrestre do planeta. Atualmente cobrem 6% a 7% (CLIMATEMPO, 2016). Desta forma, os processos de otimização podem ser aplicados a fim de aumentar a lucratividade do produtor, porém, reduzindo o impacto ambiental representado por restrições na modelagem matemática que devem respeitar as características e as limitações do solo e da propriedade agrícola. O Método Simplex é aplicado para a obtenção das soluções dos problemas formulados como Problemas de Programação Linear (PPL) (GOLDBARG; LUNA, 2005). A principal contribuição deste trabalho é apresentar resultados de forma simples e objetiva para que o produtor agrícola possa, a partir das soluções obtidas, tomar decisões relativas à sua produção com significativos impactos no seu lucro e preservando o meio ambiente.

2 Formulação matemática de um problema de programação linear (PPL) e o Método Simplex

A abordagem de resolução de um problema por meio da Programação Linear envolve definir os objetivos e os parâmetros. Primeiramente, é necessário definir os objetivos do problema, ou seja, o que se deseja maximizar ou minimizar. Em seguida, os recursos devem ser definidos e o problema é formulado matematicamente como um Problema de Programação Linear (PPL). Depois disso, determinar a quantidade de cada recurso disponível para o processo de modelagem, considerando que os recursos são limitados. Por fim, a Formalização do Modelo, verificar se o modelo proposto representa o comportamento real da situação (GOLDBARG; LUNA, 2005).

Na formulação geral de um PPL, se existem n decisões quantificáveis a serem tomadas, então, pode-se associar a cada decisão uma variável do modelo denominada de *variável de decisão*. Desta forma, as variáveis de decisões são representadas por x_i com $i = 1, 2, ..., n$ e, ao aplicar um método de solução, os valores numéricos dessas variáveis são determinados. O objetivo principal do problema é aquilo que se pretende maximizar (lucros, receitas, vendas) ou minimizar (custos, perdas, recursos). Para isso, uma função numérica das variáveis de decisão, chamada de *função objetivo*, é estruturada como $f(x_1, ..., x_n)$. Em programação linear, esta função deve apresentar

um comportamento linear. Deve-se, também, analisar quais são as limitações de recursos impostas ao problema. Tais limitações devem ser expressas matematicamente por meio de equações e/ou inequações lineares e são chamadas de *restrições* do problema. Inerente aos problemas de Programação Linear, está a condição de que todas as variáveis de decisão devem ser maiores ou iguais a zero: $x_i \geq 0$, é chamada de *condição de não negatividade*.

Considere o problema primal de otimização linear escrito na forma padrão (GOLDBARG; LUNA, 2005):

$$\begin{gathered} \min f(x) = c^T x \\ s.a : Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{gathered}$$

em que a matriz de restrições $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e, sem perda de generalidade, assuma que posto $(A) = m$. O vetor $x = (x_1, ..., x_n)^T$ é um vetor coluna de n componentes que representa as variáveis de decisão; $b = (b_1, ..., b_m)^T$ é o vetor dos recursos ou termos independentes e $c^T = (c_1, ..., c_n)$ é um vetor linha que representa os custos ou os coeficientes da função objetivo.

A solução geral do sistema em $Ax = b$ pode ser descrita considerando uma partição nas colunas de A:

$$A = (B, N)$$

tal que $B \in \mathbb{R}^{mxn}$, formada por m colunas da matriz A, seja não singular. A partição equivalente é feita no vetor das variáveis:

$$x = (x_B, x_N),$$

em que x_B é chamado *vetor de variáveis básicas* e x_N *vetor de variáveis não básicas*. Assim,

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b \Leftrightarrow$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

Dada uma escolha qualquer para x_N, tem-se x_B bem determinado, de modo que o sistema está verificado.

Definição 2.1 *A solução particular x obtida por $x_B^0 = B^{-1}b, x_N^0 = 0$ é chamada solução básica. Se $x_B^0 = B^{-1}b \geq 0$, então a solução básica é primal factível.*

Considere também a partição nos coeficientes do gradiente da função objetivo c:

$$c^T = (c_B, c_N)^T.$$

Definição 2.2 *O vetor $y \in \mathbb{R}^m$, dado por*

$$y^T = c_B^T B^{-1}$$

é definido como vetor das variáveis duais ou vetor multiplicador simplex. Se

$$c_j - y^T a_j \geq 0,$$

para $j = 1, \ldots, n$ então y é uma solução básica dual factível, e diz-se que a partição é dual factível, onde a_j representa a coluna j da matriz de restrições A.

Definição 2.3 *Denomina-se estratégia simplex a seguinte perturbação da solução básica: escolha $k \in N$, onde N é o conjunto de índices de variáveis não básicas, tal que $c_k - y^T a_k < 0$; faça $x_k = \varepsilon \geq 0$, $x_j = 0, \forall j \in N - k$.*

A estratégia simplex produz uma nova solução dada por

$$\begin{cases} x_B = x_B^0 + \varepsilon d_B \\ x_N = \varepsilon e_k \end{cases}$$

e o valor da função objetivo dado por:

$$f(x) = f(x^0) + (c_k - y^T a_k)\varepsilon$$

onde $d_B = -B^{-1}a_k$ e $e_k = (0,\ldots,1,\ldots,0)^T \in \mathbb{R}^{m-n}$ com 1 na k-ésima componente.

A direção $d \in \mathbb{R}^n$, dada por $d = (d_B, d_N)^T = (d_B, e_k)^T$, define uma perturbação da solução básica e é chamada *direção simplex*. Se a solução básica for não-degenerada, isto é, $x_B^0 > 0$, então d é uma direção factível. Note ainda que o produto escalar entre d e o gradiente da função objetivo é $c^T d = c_k - y^T a_k < 0$. Portanto d é uma direção de descida.

Da estratégia simplex, pode-se determinar o maior valor de ε, impondo $x_B \geq 0$:

$$\varepsilon^0 = min\left\{ -\frac{x_{B_e}^0}{d_{B_e}} | d_{B_e} < 0, i = 1,\ldots,m \right\}$$

onde $x_{B_e}^0$ é a e-ésima componente de x_B^0, que sai da base.

Em suma, a execução do Método Simplex basicamente consiste em testar uma sequência de soluções básicas viáveis, na busca do valor ótimo para a função objetivo.

2.1 Algoritmo Primal Simplex

O algoritmo do Método Primal Simplex é descrito a seguir considerando um problema de minimização escrito na forma padrão. É chamada de *Fase I* o procedimento para determinar uma solução inicial e, *Fase II* o Método Simplex.

Fase I

Encontre uma partição básica primal-factível: $A = (B \ \ N)$.

Faça PARE = FALSO, IT=0

(Será FALSO até que a condição de otimalidade seja verificada. IT indica o número da iteração.)

Fase II

Enquanto NÃO PARE faça:

• Determine a solução básica primal factível:
$x_B^0 = B^{-1}b$.

• Teste de otimalidade:
Determine a solução básica dual: $y^T = c_B^T B^{-1}$;
Encontre x_k com custo relativo: $c_k - y^T a_k < 0$.
Se $c_k - y^T a_k \geq 0, \quad \forall\ k = 1,\ldots,n-m$, então a solução na iteração IT é ótima.

PARE=VERDADE.

Senão:

• Determine a direção simplex: $d_B = -B^{-1}a_k$, de mudança nos valores das variáveis básicas

• Determine o tamanho do passo: $\varepsilon^0 = min\left\{ -\frac{x_{B_e}^0}{d_{B_e}} | d_{B_e} < 0, i = 1,\ldots,m \right\}$.

Se $d_B \geq 0$, o problema não tem solução ótima finita.

PARE=VERDADE.
Senão:
• Atualize a partição básica: $a_{B_e} \leftrightarrow a_k, IT \leftarrow IT + 1$.
Fim enquanto.

Após a obtenção da solução ótima, uma análise de sensibilidade dos parâmetros do modelo pode ser realizada no processo de pós-otimização. Esta análise consiste em avaliar os impactos que a solução sofre quando existem modificações nas condições de modelagem (GOLDBARG; LUNA, 2005). Basicamente, é o estudo de um modelo de programação matemática submetido a mudanças em suas condições iniciais. Como resultado, fornece intervalos dentro dos quais determinados parâmetros do modelo podem variar para que as variáveis básicas permaneçam na base, sendo possível obter uma nova solução ótima sem a necessidade de executar o algoritmo novamente.

3 Estudos de caso

Conforme já mencionado, os setores agroindustriais tem buscado o aprimoramento e o conhecimento tecnológico de suas áreas de atuação, o que motiva o desenvolvimento de processos de otimização de processos produtivos, como produzir alimentos evitando-se o desperdício de matéria-prima e insumos (OLISZESKI, 2011). Nesta seção, são apresentados 2 estudos de caso para aplicação dos conceitos estudados: o primeiro estudo aborda um problema de produção agrícola de legumes e o segundo, um problema de reflorestamento, ambos com o objetivo de maximização de lucros.

3.1 Problema de produção agrícola

A agricultura orgânica tem adaptado antigas práticas às mais atuais tecnologias de produção com o objetivo de aumentar a produtividade, cultivando produtos mais saudáveis e reduzindo impactos ambientais (ORMOND; PAULA; FAVERET FILHO; ROCHA, 2002). Neste contexto, o objetivo deste estudo de caso é formular um problema de produção agrícola como um Problema de Programação Linear e aplicar métodos de otimização que maximizem o lucro da produção, respeitando as limitações do solo e do local em estudo. Este estudo de caso foi realizado em um sítio na região rural do município de Uraí, PR, com uma área total de 24,2 hectares, onde se produz alimentos orgânicos a fim de serem comercializados em mercados e feiras.

A Tabela 1 exibe a produtividade em kg por m^2 dos principais produtos do local e o lucro por kg de produção, representado em reais.

Tabela 1: Produtividade do Local em Estudo

Cultura	Produtividade (kg / m^2)	Lucro por kg de Produção
1. Tomate BRS	0,10	0,02 reais
2. Tomate sweet have	0,10	0,013 reais
3. Abobrinha italiana PX	0,07	0,0145 reais
4. Abobrinha menina bárbara	0,02	0,0145 reais

Por falta de um local de armazenamento próprio, a produção máxima está limitada a 35 toneladas. A área cultivável do sítio é de 66.550 m^2. Para atender às demandas de seu próprio sítio, é imperativo que se plante 500 m^2 de tomate BRS, 500 m^2 de tomate sweet have, 650 m^2 de abobrinha italiana PX e 160 m^2 de abobrinha bárbara.

Com base no modelo de Goldbarg e Luna (2005), o problema em estudo foi modelado como um Problema de Programação Linear, de acordo com as equações a seguir.

$$\max \ 0,002x_1 + 0,0013x_2 + 0,001015x_3 + 0,00029x_4 \tag{1}$$

sujeito à:

Restrições associadas à demanda do sítio m^2:

$$x_1 \geq 500, \ \ x_2 \geq 500, \ \ x_3 \geq 650, \ \ x_4 \geq 160 \tag{2}$$

Restrição de área total (área cultivável):

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 66550 \tag{3}$$

Restrição associada ao armazenamento (kg):

$$0,1x_1 + 0,1x_2 + 0,07x_3 + 0,02x_4 \leq 35000 \tag{4}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \tag{5}$$

Em que (1) representa a função objetivo (maximizar os lucros), cujos parâmetros são obtidos multiplicando-se os valores das colunas 2 e 3 da Tabela 1. As restrições do problema são representadas por (2) a (4) e, por fim, (5) são as condições de não-negatividade. As variáveis de decisão representam a área em m^2 que deve ser plantada de cada uma das 4 culturas, ou seja:
x_1 = área em m^2 que se deve plantar tomate BRS;
x_2 = área em m^2 que se deve plantar tomate sweet have;
x_3 = área em m^2 que se deve plantar abobrinha italiana PX e
x_4 = área em m^2 que se deve plantar abobrinha menina bárbara.

De acordo com Goldbarg e Luna (2005), este tipo de Problema de Programação Linear pode ser resolvido eficientemente aplicando-se o Método Simplex para a obtenção da solução ótima, ou seja, a solução que maximiza a função (1) sujeito às restrições (2) a (5). Com apoio computacional do *software* LINDO 6.1 (www.lindo.com), a solução ótima obtida, após 4 iterações, apresenta um lucro máximo de R$ 131,8362 reais e as variáveis de decisão (área em m^2 a ser plantada de cada produto) apresentam os seguintes valores: x_1= 65240 m^2, x_2= 500 m^2, x_3= 650 m^2 e x_4= 160 m^2.

A análise de sensibilidade fornece intervalos de variação das constantes e dos coeficientes da função objetivo para os quais a base do método Simplex permanece inalterada. Desta forma, a variação dos coeficientes da função objetivo pode ocorrer nos intervalos:

$$0,0013 \leq x_1 \leq \infty$$
$$0 \leq x_2 \leq 0,002$$
$$0 \leq x_3 \leq 0,002$$
$$0 \leq x_4 \leq 0,002$$

Por exemplo, atribuindo-se $0,002x_2$ na função objetivo, o lucro máximo aumenta $0,0007 \times 500 = 0,35$ reais, ou seja, passa a ser R\$$131,8362 + 0,35 = 132,1862$ reais. Analogamente para os demais parâmetros, pode-se obter o lucro máximo sem a necessidade de executar o método novamente.

Esta, portanto, é a solução ótima do PPL encontrada para as equações (1) a (5). Porém, esta solução é infactível na prática, pois não é possível vender toda a quantidade sugerida de x_1 no mercado e, além disso, deve haver uma rotação das culturas na propriedade, para a preservação do solo. Desta forma, outras restrições foram acrescentadas ao modelo de otimização para satisfazer estas condições. De acordo com informações coletadas no local em estudo, os limitantes incluídos são:

$$x_1 \leq 35.000, \;\; x_2 \leq 20.000, \;\; x_3 \leq 20.000, \;\; x_4 \leq 15.000 \tag{6}$$

A nova solução ótima obtida, para o PPL formulado com as equações (1) a (6), apresenta como lucro máximo R\$107,6073, com x_1= 35.000 m^2, x_2= 20.000 m^2, x_3=11.390 m^2 e x_4 = 160 m^2. Portanto, a solução sugere ao produtor que sejam plantados 35.000 m^2 de tomate BRS, 20.000 m^2 de tomate sweet have, 11.390 m^2 de abobrinha italiana e 160 m^2 de abobrinha menina bárbara para obter o lucro máximo de R\$107,61. Desta forma, é possível efetuar a venda e proporcionar a rotação de culturas.

3.2 Problema de reflorestamento

Conscientes da necessidade da exploração da madeira para fins comerciais, há a necessidade de que sua extração seja feita de forma responsável para que não haja deteriorações futuras. Avaliando os grandes problemas ambientais enfrentados, como as mudanças climáticas drásticas causadas pelo efeito estufa, enchentes, problemas agrícolas e transmissão de doenças vetores (dengue e malária, por exemplo) e a grande concentração de CO^2, conclui-se que a prática do reflorestamento torna-se eficaz como uma forma de amenizar os problemas apresentados (SILVA, 2012).

Neste contexto, uma companhia de reflorestamento opera 4 viveiros que possuem produtividades aproximadamente iguais entre sim. A produção total por viveiro depende principalmente da área disponível para o plantio e da água de irrigação. A propriedade procura diferenciar sua produção, de modo que deve plantar 4 tipos de culturas: Arueira, Gurucaia, Pau D'Alho e Pau-Viola. Cada tipo de cultura necessita de uma certa quantidade de água. Desse modo, o objetivo deste estudo de caso é formular um problema de reflorestamento como um Problema de Programação Linear e aplicar métodos de otimização que maximizem o lucro da produção, respeitando as limitações do solo e do local em estudo. Este estudo de caso foi realizado em um sítio na região rural do município de Cornélio Procópio, PR, com uma área total de 170.000 m^2 hectares. As Tabelas 2 e 3 resumem os dados do problema. A Tabela 2 exibe a quantidade de água disponível e a área de cultivo por viveiro. A Tabela 3 descreve o consumo de água, a área máxima de cultivo e o lucro por cultura.

As variáveis de decisão são denotadas por x_{ij} e representam a área em m^2 que no viveiro $i = 1,2,3,4$ será destinado à cultura $j = A,B,C,D$. O problema é então formulado como um Problema de Programação Linear, em que a função objetivo é dada por (7).

$$\begin{aligned} \max \;\; & 7,90(x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} + x_{4A}) + 7,90(x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} + x_{4B}) + \\ & + 7,90(x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} + x_{4C}) + 5,00(x_{1D} + x_{2D} + x_{3D} + x_{4D}) \end{aligned} \tag{7}$$

Tabela 2: Água Disponível e Área de Cultivo por Viveiro

Viveiro	Área total para Cultivo (m^2)	Água Disponível (Litros)
1	70.000 m^2	76,5 litros
2	50.000 m^2	55,8 litros
3	30.000 m^2	33,3 litros
4	20.000 m^2	22,5 litros

Tabela 3: Consumo de Água, Área de Cultivo e Lucro por Cultura

Cultura	Área máxima de Cultivo	Consumo de Água	Lucro
A. Gurucaia	30.000 m^2	0,065 litros	7,90 reais
B. Pau D'Alho	20.000 m^2	0,044 litros	7,90 reais
C. Arueira	20.000 m^2	0,044 litros	7,90 reais
D. Pau-Viola	20.000 m^2	0,044 litros	5,00 reais

Sujeito à:

Restrições associadas à área de cultivo:

$$\begin{aligned} Viveiro1 &: x_{1A}+x_{1B}+x_{1C}+x_{1D} \leq 70.000 \\ Viveiro2 &: x_{2A}+x_{2B}+x_{2C}+x_{2D} \leq 50.000 \\ Viveiro3 &: x_{3A}+x_{3B}+x_{3C}+x_{3D} \leq 30.000 \\ Viveiro4 &: x_{4A}+x_{4B}+x_{4C}+x_{4D} \leq 20.000 \end{aligned} \tag{8}$$

Restrições associadas ao consumo de água:

$$\begin{aligned} Viveiro1 &: 0,065x_{1A}+0,044x_{1B}+0,044x_{1C}+0,044x_{1D} \leq 76,5 \\ Viveiro2 &: 0,065x_{2A}+0,044x_{2B}+0,044x_{2C}+0,044x_{2D} \leq 55,8 \\ Viveiro3 &: 0,065x_{3A}+0,044x_{3B}+0,044x_{3C}+0,044x_{3D} \leq 33,3 \\ Viveiro4 &: 0,065x_{4A}+0,044x_{4B}+0,044x_{4C}+0,044x_{4D} \leq 22,5 \end{aligned} \tag{9}$$

Restrições associadas ao plantio por cultura:

$$\begin{aligned} Gurucaia &: x_{1A}+x_{2A}+x_{3A}+x_{4A} \leq 30.000 \\ PauD'Alho &: x_{1B}+x_{2B}+x_{3B}+x_{4B} \leq 20.000 \\ Arueira &: x_{1C}+x_{2C}+x_{3C}+x_{4C} \leq 20.000 \\ Pau-Viola &: x_{1D}+x_{2D}+x_{3D}+x_{4D} \leq 20.000 \end{aligned} \tag{10}$$

Restrições de não-negatividade:

$$
\begin{aligned}
&x_{1A} \geq 0, x_{1B} \geq 0, x_{1C} \geq 0, x_{1D} \geq 0 \\
&x_{2A} \geq 0, x_{2B} \geq 0, x_{2C} \geq 0, x_{2D} \geq 0 \\
&x_{3A} \geq 0, x_{3B} \geq 0, x_{3C} \geq 0, x_{3D} \geq 0 \\
&x_{4A} \geq 0, x_{4B} \geq 0, x_{4C} \geq 0, x_{4D} \geq 0
\end{aligned} \tag{11}
$$

Restrição de proporção:

$$
\begin{aligned}
&\frac{x_{1A}+x_{1B}+x_{1C}+x_{1D}}{70000} = \frac{x_{2A}+x_{2B}+x_{2C}+x_{2D}}{50000} = \\
&= \frac{x_{3A}+x_{3B}+x_{3C}+x_{3D}}{30000} = \frac{x_{4A}+x_{4B}+x_{4C}+x_{4D}}{20000}.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Para a obtenção da solução ótima do problema (7) sujeito as restrições (8) a (12), utilizou-se o Método Simplex com o apoio do *software* LINDO. A solução ótima obtida, após 6 iterações, apresenta um lucro máximo de R$ 33.356,98 reais e as variáveis de decisão (área em m^2 a ser plantada de cada produto) apresentam os seguintes valores: x_{1C}= 1738,63 m^2, x_{4B}= 496,753 m^2, x_{2C}= 1241,88 m^2, x_{3B}= 720,64 m^2 e x_{3A}= 24,49 m^2. Ou seja, a solução sugere que sejam plantados 1738,63 m^2 de Arueira no Viveiro 1, uma área de 496,753 m^2 de Pau D'Alho no Viveiro 4; uma área de 1241,88 m^2 de Arueira no Viveiro 2; uma área de 720,64 m^2 de Pau D'Alho no Viveiro 3 e 24,49 m^2 de Guracaia no Viveiro 3.

Em relação à análise de sensibilidade para o modelo de reflorestamento, a variação dos coeficientes da função objetivo das variáveis que apresentaram valores diferentes de zero na solução ótima, pode ocorrer nos intervalos:

$$
\begin{aligned}
7,9 \leq x_{3A} \leq 29,26 \\
7,9 \leq x_{3B} \leq 7,9 \\
7,9 \leq x_{4B} \leq \infty \\
7,9 \leq x_{1C} \leq \infty \\
7,9 \leq x_{2C} \leq \infty
\end{aligned}
$$

Assim, as variáveis de decisão que são diferentes de zero na solução ótima não podem sofrer decréscimos nos seus valores e x_{4B}, x_{1C} e x_{2C} podem aumentar infinitamente que permanecerão na base da solução. A variável x_{3B} não pode sofrer alterações e x_{3A} pode aumentar para 29,26. Por exemplo, se for incluído o valor 29,26x_{3A} na função objetivo, o lucro máximo aumenta $21,36 \times 24,49 = 523,1$ reais, ou seja, passa a ser R$33.356,98 + 523,1 = 33.880,08$ reais.

Vale ressaltar que a área livre não recomendada para o plantio, é destinada ao descanso do solo e à rotação de culturas, fundamentais para a preservação do local em estudo.

4 Conclusões

A pesquisa operacional, especialmente a programação linear, é um método matemático de otimização de funções lineares, que se baseia nos princípios da Álgebra Linear e se aplica a vários

ramos da atividade humana. Visa o auxílio à tomada de decisão, com o aproveitamento de ferramentas eficientes que atuam na redução de custos, na maximização de lucros e acima de tudo na utilização eficiente de recursos escassos.

De um modo geral, muitas propriedades rurais se deparam com a dúvida de quais culturas produzir naquele ano agrícola para otimizar a lucratividade. Diante disso a principal contribuição deste estudo é a otimização do lucro do cultivo de Tomate BRS, Tomate sweet have, Abobrinha Italiana PX, Abobrinha menina bárbara em uma propriedade rural na região de Uraí-PR, por meio da qual se aplicou um estudo de maximização de lucros, possibilitando ao produtor elaborar um planejamento adequado para sua produção, com a determinação das culturas ideais para o plantio, de acordo com as limitações do local em estudo.

A partir dos resultados obtidos, fica evidente a importância de se investir em sistemas que auxiliem e orientem os produtores na tomada de decisão no setor rural, visto que estes apresentam ao investidor o caminho ótimo a ser seguido, fazendo com que o mesmo reduza seus custos operacionais e aumente seu lucro.

Além disso, desenvolveu-se um modelo de *reflorestamento intencional* de uma área específica da região de Cornélio Procópio, ou seja, o planejamento do plantio de vegetação em áreas que tenham sido previamente degradadas. Esta proposta considera a maximização do lucro do produtor, reduzindo o impacto ambiental e respeitando as características e as limitações do solo e da propriedade agrícola em estudo. Os resultados então auxiliam a tomada de decisão do produtor quanto à área que deve ser plantada, contribuindo para a regeneração de algumas espécies de árvores da região.

5 Referências bibliográficas

BALSAN, A; FABBRIN, A. L.; RUPPENTHAL, I. Aplicação da programação linear para definição do cultivo de culturas otimizado em uma propriedade rural de médio porte. *In*: SIMPÓSIO GAÚCHO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 1., 2016, São Leopoldo, RS. **Anais [...]** São Leopoldo: UNISINOS, 2016. p. 206−222.

CLIMATEMPO. Os cinco maiores problemas ambientais do mundo e suas soluções. 2016. Disponível em: https://www.climatempo.com.br/noticia/2016/10/14/os-cinco-maiores-problemas-ambientais-do-mundo-e-suas-solucoes-1505. Acesso em: 9 set. 2018.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização combinatória e programação linear**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

MARTINI, E. L.; LEITE, N. B. Planejamento florestal: a importância e a aplicação da programação linear. *In*: ENCONTRO BRASILEIRO DE ECONOMIA FLORESTAL, 1., Curitiba, PR. **Anais [...]** Curitiba: EMBRAPA-CNPF, v. 2, p. 545-574, 1988.

OLISZESKI, C. A. N. **Modelos de planejamento agrícola:** um cenário para otimização de processos agroindustriais. 2011. 97 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2011.

ORMOND, J. G. P.; PAULA, S. R. L.; FAVERET FILHO, P. S. C.; ROCHA, L. T. M. Agricultura orgânica: quando o passado é futuro. **BNDES Setorial**, n. 15, p. 3-34, 2002. Disponível em: http://web.bndes.gov.br/bib/jspui/handle/1408/2479. Acesso em: 15 out. 2018.

RIBEIRO, R. P.; FORTES, B. J. Programação linear: uma contribuição à gestão de uma propriedade rural. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 35., 2015, Fortaleza, CE. **Anais [...]** Fortaleza: UFC, 2015. p. 1−14.

SILVA, G. K. **Importância do reflorestamento.** Portal Educação Tecnologia Educacional, 2012. Disponível em: https://www.portaleducacao.com.br/conteudo/artigos/biologia/importancia-do-reflorestamento/18944. Acesso em: 9 set. 2018.

SOUZA, P. M.; FERREIRA, V. R.; PONCIANO, N. J.; BRITO, M. N. Otimização econômica, sob condições de risco, para agricultores familiares das regiões norte e noroeste do estado do Rio de Janeiro. **Pesquisa Operacional**, v. 28, n. 1, p. 123−139, 2008.