Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 15, jul. 2019
Iniciação Científica

Propriedades das extensões da Sequência de Padovan

Properties of Padovan Sequence Extensions

Renata Passos Machado Vieira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará/IFCE
re.passosm@gmail.com

Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará/IFCE
fregis@gmx.fr

Resumo

Os números de Padovan têm muitas propriedades interessantes e sendo exploradas através de estudos investigativos, tomando-se como base a Sequência de Fibonacci. A sequência de Padovan é do tipo linear recursiva, ou seja, necessita-se conhecer os termos anteriores para que seja calculado o próximo, possuindo a seguinte fórmula de recorrência: $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3$. O presente trabalho apresenta um estudo da extensão desta sequência a qual foi objeto de estudo por Richard Padovan (1935-?) e Gérard Cordonnier (1907 – 1977). Essas novas propriedades foram descobertas variando o padrão de outras já conhecidas, além de utilizar o raciocínio lógico, provas matemáticas e recursos computacionais para diagnosticar novos resultados apresentados neste trabalho. Outras formas de obtenção dos números da extensão desta sequência são estudados, tais como: a matriz geradora Q, a fórmula de Binet e a função geradora, contribuindo para a área de matemática pura e para a o ensino de sequências.

Palavras-chave: Binet. Extensão. Sequência de Padovan. Tridovan.

Abstract

The Padovan numbers have many interesting properties and are explored through investigative studies, based on the Fibonacci sequence. The Padovan sequence is of the linear recursive type, ie, it is necessary to know the previous terms so that the next one is calculated, having the following recurrence formula: $P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3$. The present work presents a study of the extension of this sequence, which was studied by Richard Padovan (1935-?) and Gérard Cordonnier (1907 - 1977). These new properties were discovered by varying the pattern of others already known, besides using logical reasoning, mathematical proofs, and computational resources to diagnose new results presented in this work. Other ways of obtaining the numbers of the extension of this sequence are studied, such as the generated Q-matrix, the Binet formula and the generating function, contributing form to the area of pure mathematics and to the teaching of sequences.

Keywords: Binet. Extension. Padovan Sequence. Tridovan.

Artigo recebido em nov. 2018 e aceito em maio 2019.

1 Introdução

Os números de Padovan são uma sequência criada pelo italiano Richard Padovan (1935-?), onde este atribuiu a sua descoberta ao arquiteto Hans van Der Laan Voet (2012), sendo mais tarde estudada também pelo matemático Gérard Cordonnier (1907-1977) o qual contribuiu para o estudo desses números (VOET, 2012). Segundo Alsina e Nelsen (2015), essa sequência é uma espécie de "primo", da sequência descoberta por Fibonacci.

A sequência de Padovan é do tipo linear e recursiva, isto é, requer termos anteriores para calcular o seguinte, onde os seus termos iniciais são dados por $P_0 = P_1 = P_2 = 1$, e a sua fórmula de recorrência é definida por:

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3}, n \geq 3$$

Uma importante característica dessa sequência é a relação dos seus termos vizinhos P_{n+1}/P_n, a qual converge para um valor conhecido como número plástico ou constante plástica (MAROHNIC; STRMECKI, 2012). O valor aproximado do número plástico é ψ = 1.324718... e as formas de calcular esse valor são apresentadas nos trabalhos de Marohnic e Strmecki (2012) e Iliopoulos (2015).

Baseado nos trabalhos da sequência de Fibonacci, Cereceda (2015), Miller (1971) e Hare, Prodinger e Shallit (2014), onde propuseram uma extensão da sequência de Fibonacci ao considerar que esse número de elementos será obtido a partir da soma de dois, três ou quatro elementos anteriores, é possível estender os números de Padovan considerando um número maior de termos para estimar o próximo.

Padovan participou do estudo no qual Stewart (2000) afirma a utilização desses números em esculturas e formas geométricas. Eles propuseram uma representação em espiral construída pela justaposição de triângulos equiláteros respeitando uma regra de construção característica, veja a Figura 1. Considere o lado 1 do triângulo destacado em azul como sendo o triângulo inicial, a formação da espiral é dada pela adição de um novo triângulo equilátero de acordo com o maior lado do polígono formado.

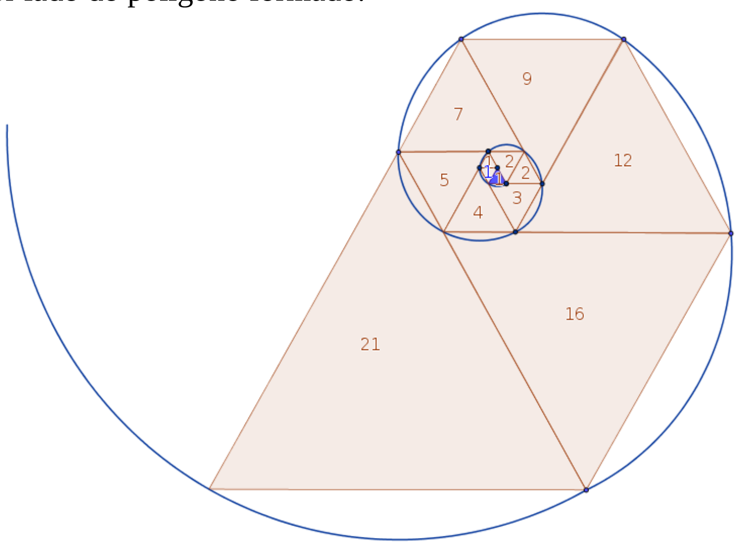

Figura 1 – Espiral de Padovan
Fonte: Elaborado pelos autores.

A sequência de Padovan é uma sequência de ordem 3, uma vez que sua fórmula de recorrência é dada pela soma dos dois termos anteriores contados a partir de um salto. Ao considerar que o próximo termo da sequência será calculado como a soma dos três predecessores após o salto, chamaremos neste trabalho de sequência de Tridovan e, portanto,

DOI: 10.21167/cqdvol15ic201923169664rpmvfrva2440 Disponível em: https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/revista-cqd/

de ordem 4. Da mesma forma, temos os números Tetradovan (ordem 5) que serão estudados neste escrito.

Assim, são apresentados os teoremas para as extensões das sequências, onde fornece a descrição de uma fórmula explícita dos termos presentes na sequência de Padovan e de ordens superiores.

2 Matriz geradora Q

Uma forma de obter qualquer elemento de uma sequência linear e recursiva é através da Matriz Geradora Q. Esta técnica foi aplicada para a sequência de Fibonacci, e nestes trabalho a mesma ideia será aplicada para os números de Padovan (FALCON; PLAZA, 2007).

Os números de Padovan possui uma Matriz Q de ordem 3, a qual quando elevada a n-ésima potência, pode-se obter o n-ésimo termo desta sem o cálculo da recursividade. A relação matricial pode ser representada pela matriz definida por Sokhuma (2013):

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Foi identificada uma propriedade que quando a matriz Q é elevada a n-ésima potência, pode-se obter os números da sequência de Padovan sem utilizar a recursividade. Isso pode ser verificado na equação matricial seguinte.

$$Q^n = \begin{bmatrix} P_{n-1} & P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n+2} & P_{n+1} \\ P_{n+1} & P_{n+3} & P_{n+2} \end{bmatrix}, n \geq 3$$

Outras matrizes geradoras, porém com propriedades semelhantes, foram encontradas e são apresentadas nos trabalhos de Cerda-Morales (2017), Seenukul (2015), Tas e Karaduman (2014) e Yilmaz e Taskara (2013).

2.1 Matriz geradora Q de Tridovan

A sequência de Tridovan é uma extensão da sequência de Padovan, chamada neste trabalho de $P_{3(n)}$. Uma vez que esta também é uma sequência do tipo recorrente e linear, na qual os termos iniciais são: $P_{3(0)} = 1, P_{3(1)} = 0, P_{3(2)} = 1$, e pode-se defini-la como:

$$P_{3(n)} = P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}$$

De posse da fórmula anterior os termos da sequência podem ser calculados, assim têm-se:

$$1,0,1,1,2,2,4,5,8,11,17,...$$

De maneira semelhante à sequência de Padovan, a matriz geradora Q de recorrência, chamada de Q_3, pode ser estimada. Assim têm-se que:

$$Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Teorema 1. *Qualquer termo da sequência de Tridovan pode ser obtido através do cálculo da n-ésima potência de Q_3.*

$$Q_3^{\,n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} Q_3(1,1) & Q_3(1,2) & Q_3(1,3) & Q_3(1,4) \\ Q_3(2,1) & Q_3(2,2) & Q_3(2,3) & Q_3(2,4) \\ Q_3(3,1) & Q_3(3,2) & Q_3(3,3) & Q_3(3,4) \\ Q_3(4,1) & Q_3(4,2) & Q_3(4,3) & Q_3(4,4) \end{bmatrix}, n \geq 3$$

De forma a simplificar a visualização dos termos da matriz anterior, o cálculo de cada um destes é apresentado em cada uma das linhas a seguir:

$Q_3^{\,n}(1,1) = P_{3(n)}$,

$Q_3^{\,n}(1,2) = P_{3(n-1)}$,

$Q_3^{\,n}(1,3) = P_{3(n-2)}$,

$Q_3^{\,n}(1,4) = P_{3(n-3)}$,

$Q_3^{\,n}(2,1) = P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}$,

$Q_3^{\,n}(2,2) = P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}$,

$Q_3^{\,n}(2,3) = P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}$,

$Q_3^{\,n}(2,4) = P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)} + P_{3(n-6)}$,

$Q_3^{\,n}(3,1) = P_{3(n-1)} + P_{3(n-2)}$,

$Q_3^{\,n}(3,2) = P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)}$,

$Q_3^{\,n}(3,3) = P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}$,

$Q_3^{\,n}(3,4) = P_{3(n-4)} + P_{3(n-5)}$,

$Q_3^{\,n}(4,1) = P_{3(n-1)}$,

$Q_3^{\,n}(4,2) = P_{3(n-2)}$,

$Q_3^{\,n}(4,3) = P_{3(n-3)}$,

$Q_3^{\,n}(4,4) = P_{3(n-4)}$.

Demonstração. Utilizaremos o princípio da indução finita para provar o teorema.

Para n=1, temos que a matriz geradora é:

$$Q_3^{\,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para n=2, temos que:

$$Q_3^{\,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Supondo que vale para n=k:

$$Q_3{}^k = \begin{bmatrix} Q_3(1,1) & Q_3(1,2) & Q_3(1,3) & Q_3(1,4) \\ Q_3(2,1) & Q_3(2,2) & Q_3(2,3) & Q_3(2,4) \\ Q_3(3,1) & Q_3(3,2) & Q_3(3,3) & Q_3(3,4) \\ Q_3(4,1) & Q_3(4,2) & Q_3(4,3) & Q_3(4,4) \end{bmatrix}^k$$

Onde cada termo é representado por:

$Q_3{}^k(1,1) = P_{3(k)}$,

$Q_3{}^k(1,2) = P_{3(k-1)}$,

$Q_3{}^k(1,3) = P_{3(k-2)}$,

$Q_3{}^k(1,4) = P_{3(k-3)}$,

$Q_3{}^k(2,1) = P_{3(k-1)} + P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)}$,

$Q_3{}^k(2,2) = P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)}$,

$Q_3{}^k(2,3) = P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)} + P_{3(k-5)}$,

$Q_3{}^k(2,4) = P_{3(k-4)} + P_{3(k-5)} + P_{3(k-6)}$,

$Q_3{}^k(3,1) = P_{3(k-1)} + P_{3(k-2)}$,

$Q_3{}^k(3,2) = P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)}$,

$Q_3{}^k(3,3) = P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)}$,

$Q_3{}^k(3,4) = P_{3(k-4)} + P_{3(k-5)}$,

$Q_3{}^k(4,1) = P_{3(k-1)}$,

$Q_3{}^k(4,2) = P_{3(k-2)}$,

$Q_3{}^k(4,3) = P_{3(k-3)}$,

$Q_3{}^k(4,4) = P_{3(k-4)}$.

Assim, tem-se que vale para n = k+1:

$$Q_3{}^{k+1} = Q_3{}^k . Q_3{}^1$$

$$Q_3{}^{k+1} = \begin{bmatrix} Q_3(1,1) & Q_3(1,2) & Q_3(1,3) & Q_3(1,4) \\ Q_3(2,1) & Q_3(2,2) & Q_3(2,3) & Q_3(2,4) \\ Q_3(3,1) & Q_3(3,2) & Q_3(3,3) & Q_3(3,4) \\ Q_3(4,1) & Q_3(4,2) & Q_3(4,3) & Q_3(4,4) \end{bmatrix}^k . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tem-se que cada elemento da matriz Q_3 é definido como:

$Q_3{}^{k+1}(1,1) = P_{3(k-1)} + P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)} = P_{3(k+1)}$,

$Q_3{}^{k+1}(1,2) = P_{3(n)} = P_{3(k+1)-1}$,

$Q_3{}^{k+1}(1,3) = P_{3(k-1)} = P_{3(k+1)-2}$,

$Q_3{}^{k+1}(1,4) = P_{3(k-2)} = P_{3(k+1)-3}$,

$Q_3^{k+1}(2,1) = P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)} + P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)} + P_{3(k-5)} + P_{3(k-4)} + P_{3(k-5)} + P_{3(k-6)} =$
$P_{3(k)} + P_{3(k-1)} + P_{3(k-2)} = P_{3(k+1)-1} + P_{3(k+1)-2} + P_{3(k+1)-3}$, $Q_3^{k+1}(2,2) = P_{3(k-1)} + P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)} = P_{3(k+1)-2} + P_{3(k+1)-3} + P_{3(k+1)-4}$,
$Q_3^{k+1}(2,3) = P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)} = P_{3(k+1)-3} + P_{3(k+1)-4} + P_{3(k+1)-5}$,
$Q_3^{k+1}(2,4) = P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)} + P_{3(k-5)} = P_{3(k+1)-4} + P_{3(k+1)-5} + P_{3(k+1)-6}$,
$Q_3^{k+1}(3,1) = P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)} + P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)} + P_{3(k-4)} + P_{3(k-5)} = P_{3(k)} + P_{3(k-1)} = P_{3(k+1)-1} + P_{3(k+1)-2}$,
$Q_3^{k+1}(3,2) = P_{3(k-1)} + P_{3(k-2)} = P_{3(k+1)-2} + P_{3(k+1)-3}$,
$Q_3^{k+1}(3,3) = P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)} = P_{3(k+1)-3} + P_{3(k+1)-4}$,
$Q_3^{k+1}(3,4) = P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)} = P_{3(k+1)-4} + P_{3(k+1)-5}$,
$Q_3^{k+1}(4,1) = P_{3(k-2)} + P_{3(k-3)} + P_{3(k-4)} = P_{3(k)} = P_{3(k+1)-1}$,
$Q_3^{k+1}(4,2) = P_{3(k-1)} = P_{3(k+1)-2}$,
$Q_3^{k+1}(4,3) = P_{3(k-2)} = P_{3(k+1)-3}$,
$Q_3^{k+1}(4,4) = P_{3(k-3)} = P_{3(k+1)-4}$.

□

2.2 Matriz geradora Q de Tetradovan

Chamada neste trabalho de $P_{4(n)}$. Tetradovan é uma outra extensão da sequência de Padovan sendo definida como:

$$P_{4(n)} = P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}.$$

onde seus termos iniciais são: $P_{4(0)} = 1, P_{4(1)} = 0, P_{4(2)} = P_{4(3)} = 1$.

A partir da fórmula de recorrência pode-se obter os 10 primeiros termos da sequência de Tetradovan, assim temos:

$$1,0,1,1,2,3,4,7,10,16,\ldots$$

A extensão de ordem 5 da matriz Q, chamada de Q_4, pode ser estimada como apresentada à seguir:

$$Q_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Teorema 2. *Qualquer termo da sequência de Tetradovan pode ser obtido através do cálculo da n-ésima potência de* Q_4 .

$$Q_4^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} Q_4(1,1) & Q_4(1,2) & Q_4(1,3) & Q_4(1,4) & Q_4(1,5) \\ Q_4(2,1) & Q_4(2,2) & Q_4(2,3) & Q_4(2,4) & Q_4(2,5) \\ Q_4(3,1) & Q_4(3,2) & Q_4(3,3) & Q_4(3,4) & Q_4(3,5) \\ Q_4(4,1) & Q_4(4,2) & Q_4(4,3) & Q_4(4,4) & Q_4(4,5) \\ Q_4(5,1) & Q_4(5,2) & Q_4(5,3) & Q_4(5,4) & Q_4(5,5) \end{bmatrix}, n \geq 4$$

Onde cada termo da matriz anterior é dado por:

$Q_4^n(1,1) = P_{4(n)}$,

$Q_4^n(1,2) = P_{4(n-1)}$,

$Q_4^n(1,3) = P_{4(n-2)}$,

$Q_4^n(1,4) = P_{4(n-3)}$,

$Q_4^n(1,5) = P_{4(n-4)}$,

$Q_4^n(2,1) = P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)}$,

$Q_4^n(2,2) = P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}$,

$Q_4^n(2,3) = P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)}$,

$Q_4^n(2,4) = P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)} + P_{4(n-7)}$,

$Q_4^n(2,5) = P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)} + P_{4(n-7)} + P_{4(n-8)}$,

$Q_4^n(3,1) = P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)}$,

$Q_4^n(3,2) = P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)}$,

$Q_4^n(3,3) = P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}$,

$Q_4^n(3,4) = P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)}$,

$Q_4^n(3,5) = P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)} + P_{4(n-7)}$,

$Q_4^n(4,1) = P_{4(n-1)} + P_{4(n-2)}$,

$Q_4^n(4,2) = P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)}$,

$Q_4^n(4,3) = P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)}$,

$Q_4^n(4,4) = P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}$,

$Q_4^n(4,5) = P_{4(n-5)} + P_{4(n-6)}$,

$Q_4^n(5,1) = P_{4(n-1)}$,

$Q_4^n(5,2) = P_{4(n-2)}$,

$Q_4^n(5,3) = P_{4(n-3)}$,

$Q_4^n(5,4) = P_{4(n-4)}$,

$Q_4^n(5,5) = P_{4(n-5)}$.

Demonstração. Pode provar pelo princípio da indução finita a validade do teorema.

Para n=1, temos a matriz geradora Q:

$$Q_4^{\,1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para n=2, temos:

$$Q_4^{\,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Supondo que vale para n=k, temos:

$$Q_4^{\,k} = \begin{bmatrix} Q_4(1,1) & Q_4(1,2) & Q_4(1,3) & Q_4(1,4) & Q_4(1,5) \\ Q_4(2,1) & Q_4(2,2) & Q_4(2,3) & Q_4(2,4) & Q_4(2,5) \\ Q_4(3,1) & Q_4(3,2) & Q_4(3,3) & Q_4(3,4) & Q_4(3,5) \\ Q_4(4,1) & Q_4(4,2) & Q_4(4,3) & Q_4(4,4) & Q_4(4,5) \\ Q_4(5,1) & Q_4(5,2) & Q_4(5,3) & Q_4(5,4) & Q_4(5,5) \end{bmatrix}^k$$

Onde cada termo é representado, como:

$Q_4^{\,k}(1,1) = P_{4(k)}$,

$Q_4^{\,k}(1,2) = P_{4(k-1)}$,

$Q_4^{\,k}(1,3) = P_{4(k-2)}$,

$Q_4^{\,k}(1,4) = P_{4(k-3)}$,

$Q_4^{\,k}(1,5) = P_{4(k-4)}$,

$Q_4^{\,k}(2,1) = P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)}$,

$Q_4^{\,k}(2,2) = P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)}$,

$Q_4^{\,k}(2,3) = P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)}$,

$Q_4^{\,k}(2,4) = P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-7)}$,

$Q_4^{\,k}(2,5) = P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-7)} + P_{4(k-8)}$,

$Q_4^{\,k}(3,1) = P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)}$,

$Q_4^{\,k}(3,2) = P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)}$,

$Q_4^{\,k}(3,3) = P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)}$,

$Q_4^{\,k}(3,4) = P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)}$,

$Q_4^{\,k}(3,5) = P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-7)}$,

$Q_4^{\,k}(1,1) = P_{4(k)}$,

$Q_4^{\,k}(1,2) = P_{4(k-1)}$,

$Q_4^{\,k}(1,3) = P_{4(k-2)}$,

$Q_4^{\,k}(4,1) = P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)}$,

$Q_4^{\,k}(4,2) = P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)}$,

$Q_4^{\,k}(4,3) = P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)}$,

$Q_4^{\,k}(4,4) = P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)}$,

$Q_4^{\,k}(4,5) = P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)}$,

$Q_4^{\,k}(5,1) = P_{4(k-1)}$,

$Q_4^{\,k}(5,2) = P_{4(k-2)}$,

$Q_4^{\,k}(5,3) = P_{4(k-3)}$,

$Q_4^{\,k}(5,4) = P_{4(k-4)}$,

$Q_4^{\,k}(5,5) = P_{4(k-5)}$.

Tem-se que vale para n = k + 1:

$$Q_4^{\,k+1} = Q_4^{\,k}.Q_4^{\,1}$$

$$Q_4^{\,k+1} = \begin{bmatrix} Q_4(1,1) & Q_4(1,2) & Q_4(1,3) & Q_4(1,4) & Q_4(1,5) \\ Q_4(2,1) & Q_4(2,2) & Q_4(2,3) & Q_4(2,4) & Q_4(2,5) \\ Q_4(3,1) & Q_4(3,2) & Q_4(3,3) & Q_4(3,4) & Q_4(3,5) \\ Q_4(4,1) & Q_4(4,2) & Q_4(4,3) & Q_4(4,4) & Q_4(4,5) \\ Q_4(5,1) & Q_4(5,2) & Q_4(5,3) & Q_4(5,4) & Q_4(5,5) \end{bmatrix}^k . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para fins de facilitar a visualização, tem-se que cada elemento da Q_4 é definida como:

$Q_4^{\,k+1}(1,1) = P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} = P_{4(k+1)}$,

$Q_4^{\,k+1}(1,2) = P_{4(k)} = P_{4(k+1)-1}$,

$Q_4^{\,k+1}(1,3) = P_{4(k-1)} = P_{4(k+1)-2}$,

$Q_4^{\,k+1}(1,4) = P_{4(k-2)} = P_{4(k+1)-3}$,

$Q_4^{\,k+1}(1,5) = P_{4(k-3)} = P_{4(k+1)-4}$,

$Q_4^{\,k+1}(2,1) = P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} +$
$P_{4(k-6)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-7)} + + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-7)} + P_{4(k-8)} =$
$P_{4(k)} + P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} = P_{4(k+1)-1} + P_{4(k+1)-2} + P_{4(k+1)-3} + P_{4(k+1)-4}$,

$Q_4^{\,k+1}(2,2) = P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} = P_{4(k+1)-2} + P_{4(k+1)-3} + P_{4(k+1)-4} +$
$P_{4(k+1)-5}$,

$Q_4^{\,k+1}(2,3) = P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} = P_{4(k+1)-3} + P_{4(k+1)-4} + P_{4(k+1)-5} +$
$P_{4(k+1)-6}$,

$Q_4^{k+1}(2,4) = P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} = P_{4(k+1)-4} + P_{4(k+1)-5} + P_{4(k+1)-6} + P_{4(k+1)-7}$,

$Q_4^{k+1}(2,5) = P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-7)} = P_{4(k+1)-5} + P_{4(k+1)-6} + P_{4(k+1)-7} + P_{4(k+1)-8}$,

$Q_4^{k+1}(3,1) = P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} + P_{4(k-7)} = P_{4(k)} + P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)} = P_{4(k+1)-1} + P_{4(k+1)-2} + P_{4(k+2)-3}$, $Q_4^{k+1}(3,2) = P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} = P_{4(k+1)-2} + P_{4(k+1)-3} + P_{4(n+2)-4}$,

$Q_4^{k+1}(3,3) = P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} = P_{4(k+1)-3} + P_{4(k+1)-4} + P_{4(k+2)-5}$,

$Q_4^{k+1}(3,4) = P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} = P_{4(k+1)-4} + P_{4(k+1)-5} + P_{4(k+2)-6}$,

$Q_4^{k+1}(3,5) = P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} = P_{4(k+1)-5} + P_{4(k+1)-6} + P_{4(k+2)-7}$,

$Q_4^{k+1}(4,1) = P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-5)} + P_{4(k-6)} = P_{4(k)} + P_{4(k-1)} = P_{4(k+1)-1} + P_{4(k+1)-2}$,

$Q_4^{k+1}(4,2) = P_{4(k-1)} + P_{4(k-2)} = P_{4(k+1)-2} + P_{4(k+1)-3}$,

$Q_4^{k+1}(4,3) = P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} = P_{4(k+1)-3} + P_{4(k+1)-4}$,

$Q_4^{k+1}(4,4) = P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} = P_{4(k+1)-4} + P_{4(k+1)-5}$,

$Q_4^{k+1}(4,5) = P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} = P_{4(k+1)-5} + P_{4(k+1)-6}$,

$Q_4^{k+1}(5,1) = P_{4(k-2)} + P_{4(k-3)} + P_{4(k-4)} + P_{4(k-5)} = P_{4(k)} = P_{4(k+1)-1}$,

$Q_4^{k+1}(5,2) = P_{4(k-1)} = P_{4(k+1)-2}$,

$Q_4^{k+1}(5,3) = P_{4(k-2)} = P_{4(k+1)-3}$,

$Q_4^{k+1}(5,4) = P_{4(k-3)} = P_{4(k+1)-4}$,

$Q_4^{k+1}(5,5) = P_{4(k-4)} = P_{4(k+1)-5}$.

∎

3 Função geradora das extensões da sequência de Padovan

A função geradora permite a resolução de recorrências lineares com coeficientes constantes Koshy (2001). Tal procedimento demonstrou como encontrar os números de Fibonacci sem ser necessário calcular todos os números que o procedem. Esta é uma série formal em que os seus coeficientes obtém informações sobre uma sucessão a_n com n pertencendo aos números naturais, e sendo uma função $G(a_n, x)$ definida pela série:

$$G(a_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

Da mesma maneira como ocorre com a Sequência de Fibonacci no trabalho de Ferreira (2015), em Padovan essa função é multiplicada por x^2, x^3 nas equações abaixo devido a sua relação de recorrência. Assim, para Padovan, tem-se que:

$$G(P_n,x) = P_0 + P_1.x + P_2.x^2 + P_3.x^3 + P_4.x^4 + ...$$
$$x^2G(P_n,x) = P_0x^2 + P_1.x^3 + P_2.x^4 + P_3.x^5 + P_4.x^6 + ...$$
$$x^3G(P_n,x) = P_0x^3 + P_1.x^4 + P_2.x^5 + P_3.x^6 + P_4.x^7 + ...$$

Baseado na equação $G(P_n,x) - [x^2G(P_n,x) + x^3G(P_n,x)]$ e assumindo $P_0 = P_1 = P_2 = 1$, temos:

$$G(P_n,x)(1 - x^2 - x^3) = P_0 + P_1.x + (P_2 - P_0).x^2$$
$$G(P_n,x)(1 - x^2 - x^3) = 1 + x$$
$$G(P_n,x) = \frac{1+x}{(1 - x^2 - x^3)}$$

Essa função pode ser mostrada ainda alterando os valores iniciais para: $P_0 = 1; P_1 = 0; P_2 = 1$:

$$G(P_n,x) = \frac{1}{1 - x^2 - x^3}$$

Assim, serão mostradas os teoremas das extensões da sequência de Padovan.

Teorema 3. *A Função Geradora de Tridovan,* $P_{3(n)}$, *é:*

$$G(P_{3(n)},x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{3(n)}.x = \frac{1}{(1 - x^2 - x^3 - x^4)}$$

Demonstração.

$$G(P_{3(n)},x) = P_{3(0)} + P_{3(1)}.x + P_{3(2)}.x^2 + P_{3(3)}.x^3 + P_{3(4)}.x^4 + ...$$
$$x^2G(P_{3(n)},x) = P_{3(0)}x^2 + P_{3(1)}.x^3 + P_{3(2)}.x^4 + P_{3(3)}.x^5 + P_{3(4)}.x^6 + ...$$
$$x^3G(P_{3(n)},x) = P_{3(0)}x^3 + P_{3(1)}.x^4 + P_{3(2)}.x^5 + P_{3(3)}.x^6 + P_{3(4)}.x^7 + ...$$
$$x^4G(P_{3(n)},x) = P_{3(0)}x^4 + P_{3(1)}.x^5 + P_{3(2)}.x^6 + P_{3(3)}.x^7 + P_{3(4)}.x^8 + ...$$

Baseado na equação $G(P_{3(n)},x) - [x^2G(P_{3(n)},x) + x^3G(P_{3(n)},x) + x^4G(P_{3(n)},x)]$ e assumindo $P_{3(0)} = 1, P_{3(1)} = 0, P_{3(2)} = 1$, temos:

$$G(P_{3(n)},x)(1 - x^2 - x^3 - x^4) = 1$$
$$G(P_{3(n)},x) = \frac{1}{(1 - x^2 - x^3 - x^4)}$$

□

Teorema 4. *A Função Geradora de Tetradovan,* $P_{4(n)}$ *,é:*

$$G(P_{4(n)},x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{4(n)}.x = \frac{1}{(1 - x^2 - x^3 - x^4 - x^5)}$$

Demonstração.

$$G(P_{4(n)},x) = P_{4(0)} + P_{4(1)}.x + P_{4(2)}.x^2 + P_{4(3)}.x^3 + P_{4(4)}.x^4 + ...$$
$$x^2G(P_{4(n)},x) = P_{4(0)}x^2 + P_{4(1)}.x^3 + P_{4(2)}.x^4 + P_{4(3)}.x^5 + P_{4(4)}.x^6 + ...$$

$$x^3 G(P_{4(n)}, x) = P_{4(0)} x^3 + P_{4(1)}.x^4 + P_{4(2)}.x^5 + P_{4(3)}.x^6 + P_{4(4)}.x^7 + \ldots$$
$$x^4 G(P_{4(n)}, x) = P_{4(0)} x^4 + P_{4(1)}.x^5 + P_{4(2)}.x^6 + P_{4(3)}.x^7 + P_{4(4)}.x^8 + \ldots$$
$$x^5 G(P_{4(n)}, x) = P_{4(0)} x^5 + P_{4(1)}.x^6 + P_{4(2)}.x^7 + P_{4(3)}.x^8 + P_{4(4)}.x^9 + \ldots$$

Baseado na equação $G(P_{4(n)}, x) - [x^2 G(P_{4(n)}, x) + x^3 G(P_{4(n)}, x) + x^4 G(P_{4(n)}, x) + x^5 G(P_{4(n)}, x)]$ e assumindo $P_{4(0)} = 1, P_{4(1)} = 0, P_{4(2)} = P_{4(3)} = 1$, temos:

$$G(P_{4(n)}, x)(1 - x^2 - x^3 - x^4 - x^5) = 1$$

$$G(P_{4(n)}, x) = \frac{1}{(1 - x^2 - x^3 - x^4 - x^5)}$$

A seguir, nas figuras 2 e 3, é apresentada uma caracterização de Huntley (1985), em que diz que ao determinarmos os primeiros coeficientes do desenvolvimento de $1/(1 - x^2 - x^3)$ através de divisão direta, forma a sequência de Fibonacci, assim da mesma forma ocorre para a sequência de Padovan e suas extensões. Este procedimento foi realizado utilizando o *software Máxima*.

(%i1) 1/(1-x^2-x^3-x^4);

(%o1) $\dfrac{1}{-x^4 - x^3 - x^2 + 1}$

(%i2) taylor (1/(-x^4-x^3-x^2+1), x, 0, 70);

(%o2)/T/ $1 + x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 8x^8 + 11x^9 + 17x^{10} + 24x^{11} + 36x^{12} + 52x^{13} + 77x^{14} + 112x^{15} + 165x^{16} + 241x^{17} + 354x^{18} + 518x^{19} + 760x^{20} + 1113x^{21} + 1632x^{22} + 2391x^{23} + 3505x^{24} + 5136x^{25} + 7528x^{26} + 11032x^{27} + 16169x^{28} + 23696x^{29} + 34729x^{30} + 50897x^{31} + 74594x^{32} + 109322x^{33} + 160220x^{34} + 234813x^{35} + 344136x^{36} + 504355x^{37} + 739169x^{38} + 1083304x^{39} + 1587660x^{40} + 2326828x^{41} + 3410133x^{42} + 4997792x^{43} + 7324621x^{44} + 10734753x^{45} + 15732546x^{46} + 23057166x^{47} + 33791920x^{48} + 49524465x^{49} + 72581632x^{50} + 106373551x^{51} + 155898017x^{52} + 228479648x^{53} + 334853200x^{54} + 490751216x^{55} + 719230865x^{56} + 1054084064x^{57} + 1544835281x^{58} + 2264066145x^{59} + 3318150210x^{60} + 4862985490x^{61} + 7127051636x^{62} + 10445201845x^{63} + 15308187336x^{64} + 22435238971x^{65} + 32880440817x^{66} + 48188628152x^{67} + 70623867124x^{68} + 103504307940x^{69} + 151692936093x^{70} + \ldots$

Figura 2 – Desenvolvimento da Função Geradora de Tridovan
Fonte: Elaborado pelos autores.

```
(%i2)   1/(1-x^2-x^3-x^4-x^5);
        taylor (1/(-x^5-x^4-x^3-x^2+1),x, 0, 70);
```

(%o1) $\frac{1}{-x^5-x^4-x^3-x^2+1}$

(%o2)/T/ $1+x^2+x^3+2x^4+3x^5+4x^6+7x^7+10x^8+16x^9+24x^{10}+37x^{11}+57x^{12}+87x^{13}+134x^{14}+205x^{15}+315x^{16}+483x^{17}+741x^{18}+1137x^{19}+1744x^{20}+2676x^{21}+4105x^{22}+6298x^{23}+9662x^{24}+14823x^{25}+22741x^{26}+34888x^{27}+53524x^{28}+82114x^{29}+125976x^{30}+193267x^{31}+296502x^{32}+454881x^{33}+697859x^{34}+1070626x^{35}+1642509x^{36}+2519868x^{37}+3865875x^{38}+5930862x^{39}+9098878x^{40}+13959114x^{41}+21415483x^{42}+32854729x^{43}+50404337x^{44}+77328204x^{45}+118633663x^{46}+182002753x^{47}+279220933x^{48}+428368957x^{49}+657185553x^{50}+1008226306x^{51}+1546778196x^{52}+2373001749x^{53}+3640559012x^{54}+5585191804x^{55}+8568565263x^{56}+13145530761x^{57}+20167317828x^{58}+30939846840x^{59}+47466605656x^{60}+72821260692x^{61}+111719301085x^{62}+171395031016x^{63}+262947014273x^{64}+403402198449x^{65}+618882607066x^{66}+949463544823x^{67}+1456626850804x^{68}+2234695364611x^{69}+3428375201142x^{70}+\ldots$

Figura 3 – Desenvolvimento da Função Geradora de Tetradovan
Fonte: Elaborado pelos autores.

4 Fórmula de Binet para as extensões da sequência de Padovan

Abraham de Moivre (1667-1764) conseguiu descobrir uma fórmula onde é possível encontrar o termo geral de uma sequência sem recursividade, porém tal investigação matemática homenageou Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856), sendo então chamada de Fórmula de Binet. Assim, para uma sequência recorrente, é possível encontrar qualquer termo desta sem necessitar conhecer os anteriores, sabendo apenas da posição do termo na sequência.

Para que seja possível encontrar tal fórmula, é necessário conhecer o polinômio característico da sequência. Para os números de Padovan, este polinômio é dado por:

$$x^3 - x - 1 = 0$$

As suas raízes são dadas por uma real e duas complexas, sendo elas:

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}$$

$$x_2, x_3 = \left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \left(-\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx -0.662359 \pm 0.56229i$$

A única raiz real encontrada a partir da equação acima é conhecida como o número plástico, no qual representa a relação de convergência entre os números vizinhos desta sequência. Os coeficientes que irão compor a fórmula de Binet foram encontrados através de recursos computacionais e são apresentados a seguir:

$A = 0.411495588662646$,

$B = 0.294252205668677 + 0.138111394322887i$,

$C = 0.294252205668677 - 0.138111394322887i$

Assumindo $P_0 = 1; P_1 = 0; P_2 = 1$, é possível representar a fórmula de Binet da seguinte maneira:

$$P_{(n)} = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n$$

4.1 Fórmula de Binet para a sequência de Tridovan

Levando em consideração a fórmula de recorrência de Tridovan: $P_{3(n)} = P_{3(n-2)} + P_{3(n-3)} + P_{3(n-4)}$, o polinômio característico desta sequência pode ser calculado através da seguinte relação:

$$x^4 = 0.x^3 + 1.x^2 + 1x^1 + 1.x^0 = x^2 + x + 1$$

$$x^4 - x^2 - x - 1 = 0$$

Afim de obter a fórmula de Binet, foi realizado o cálculo para encontrar as raízes de tal polinômio. Para isso, considere $S = \sqrt[3]{\frac{29}{54} + \sqrt{\frac{(-1)^3}{9} + \left(\frac{29}{54}\right)^2}}$ e $T = \sqrt[3]{\frac{29}{54} - \sqrt{\frac{(-1)^3}{9} + \left(\frac{29}{54}\right)^2}}$.

Desta forma, as raízes calculadas são:

$x_1 = \frac{1}{3} + S + T,$

$x_2 = -1,$

$x_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(S+T) + \frac{\sqrt{3}}{2}(S-T)i,$

$x_4 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}(S+T) - \frac{\sqrt{3}}{2}(S-T)i.$

Utilizando recursos computacionais para realizar o cálculo dos coeficientes A,B,C e D , e assumindo como valores iniciais desta sequência os termos: $P_{3(0)} = 1, P_{3(1)} = 0, P_{3(2)} = P_{3(3)} = 1$, temos:

$A =$ 0.363479691983576,

$B = \frac{1}{3},$

$C =$ 0.151593487341546 + 0.08125301631906152i,

$D =$ 0.151593487341546 - 0.08125301631906152i.

Pode-se obter a fórmula completa de Binet para Tridovan dada por:

$$P_{3(n)} = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n + D(x_4)^n$$

4.2 Fórmula de Binet para a sequência de Tetradovan

Para os números de Tetradovan, dado pela seguinte relação de recorrência: $P_{4(n)} = P_{4(n-2)} + P_{4(n-3)} + P_{4(n-4)} + P_{4(n-5)}$, pode-se perceber que é possível calcular o seu polinômio característico através de:

$$x^5 = 0.x^4 + 1.x^3 + 1x^2 + 1x^1 + 1.x^0 = x^3 + x^2 + x + 1$$

$$x^5 - x^3 - x^2 - x - 1 = 0$$

Para encontrar as raízes deste polinômio, é importante lembrar que as equações polinomiais a partir do quinto grau não possuem fórmulas algébricas, assim pode-se encontrar facilmente o valor das suas raízes e de seus coeficientes utilizando recursos computacionais (BERGLUND, 2011).

$x_1 = 1.534157744914266,$

$x_2 =$ -0.847176932319066 + 0.431759163450406i,

$x_3 =$ -0.847176932319066-0.431759163450406i,

$x_4 =$ 0.080098059861933+0.845297859789085i,

$x_5 =$ 0.080098059861933 - 0.845297859789085i.

Os coeficientes A, B, C, D e E, também são encontrados da mesma maneira que a anterior, então temos:

$A = 0.334339096494331,$

$B =$ 0.2259539783861 + 0.09237537015554i,

$C =$ 0.2259539783861 - 0.09237537015554i,

$D =$ 0.106876473366734 + 0.039889068843709i,

$E =$ 0.106876473366734 - 0.039889068843709i.

Levando em consideração os valores iniciais de tal sequência: $P_{4(0)} = 1, P_{4(1)} = 0, P_{4(2)} = P_{4(3)} = 1, P_{4(4)} = 2$, podemos obter a fórmula de Binet para esta sequência como sendo:

$$P_{4(n)} = A(x_1)^n + B(x_2)^n + C(x_3)^n + D(x_4)^n + E(x_5)^n$$

5 Conclusão

Neste artigo foram estabelecidas as extensões dos números de Padovan, uma outra sequência semelhante a de Fibonacci, porém pouco conhecida e estudada, além de ser de terceira ordem.

Nas seções passadas, foram abordadas as propriedades das extensões da Sequência de Padovan, em que foram descobertas variando o padrão de outras propriedades já conhecidas desta sequência, além de utilizar o raciocínio lógico, provas matemáticas e recursos computacionais para diagnosticar essas extensões.

Novas propriedades foram estudadas como forma de obtermos os termos destas extensões da sequência de Padovan, sem utilizar a relação de recorrência, tais como: a matriz geradora Q, a fórmula de Binet e a função geradora. Vale salientar que a seguinte proposta apresentada neste trabalho contribui de forma alternativa ao ensino de sequência lineares e recorrentes, bem como para a área de matemática pura.

Para trabalhos futuros, algumas propriedades de matrizes geradoras apresentadas neste trabalho podem ser estudadas, bem como suas aplicações em outras áreas de ensino.

6 Referências

AARTS, J.; FOKKINK, R.; KRUIJTZER, G. Morphic numbers. **Nieuw Archief voor Wiskunde**, v. 5, n.2, p. 56–58, 2001.

ALSINA, C.; NELSEN, R. B. **A mathematical space odyssey:** solid geometry in the 21th century. Washington: The Mathematical Association of America, 2015.

BERGLUND, J. Analyzing the galois groups of fifth-degree and fourth-degree polynomials. **The Undergraduate Review**, v. 7, p. 22–28, 2011.

CERECEDA, J. L. Binet's formula for generalized tribonacci numbers. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 46, n. 8, p. 1235–1243, Apr. 2015.

CERDA-MORALES, G. The (s,t)-padovan and (s,t)-perrin matrix sequences. **ResearchGate.** February, 2017. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/313344447_The_st-Padovan_and_st-Perrin_Matrix_Sequences. Acesso em: 29 abr. 2019.

FALCÓN, S.; PLAZA, Á. On the Fibonacci k-numbers. **Chaos, Solitons & Fractals,** v. 32, n. 5, p. 1615-1624, June 2007. Disponível em: http://hipatia.dma.ulpgc.es/profesores/personal/aph/ficheros/investigacion/ficheros/chaos1.pdf . Acesso em: 29 abr. 2019.

FERREIRA, R. de C. **Números mórficos**. 2015. 94 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015.

HARE, K.; PRODINGER, H.; SHALLIT, J. Three series for the generalized golden mean. a**rXiv:** 1401.6200 [math.NT], Jan. 2014. Disponível em: https://arxiv.org/pdf/1401.6200.pdf. Acesso em: 29 abr. 2019.

HUNTLEY, H.E. **A divina proporção**. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1985.

ILIOPOULOS, V. The plastic number and its generalized polynomial. **Cogent Mathematics,** v. 2, n. 1, Mar. 2015.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas numbers with applications**. New York: Wiley-Interscience, 2001.

MAROHNIC, L.; STRMECKI, T. Plastic number: construction and applications. **Advanced Research in Scientific Areas**, v. 1, n. 1, p. 1523-1528, 2012. Disponível em: https://bib.irb.hr/datoteka/628836.Plastic_Number_-_Construct.pdf. Acesso em: 29 abr. 2019.

MILLER, M. D. On generalized Fibonacci numbers. **The American Mathematical Monthly**, v. 78, n. 10, p. 1108–1109, 1971.

SEENUKUL, P. Matrices which have similar properties to Padovan *Q*-matrix and its generalized relations. **Sakon Nakhon Rajabhat University Journal of Science and Technology**, v. 7, n. 2, p. 90–94, 2015.

SOKHUMA, K. Padovan q-matrix and the generalized relations. **Applied Mathematical Sciences**, v. 7, n. 53-56, p. 2777–2780, 2013.

STEWART, I. **L´univers des nombres**. Paris: Belin. Pour la Science, 2000.

TAS, S.; KARADUMAN, E. The Padovan sequences in finite groups. **Chiang Mai Journal of Science,** v. 41, n. 2, p. 456–462, 2014. Disponível em:

https://www.researchgate.net/publication/286610654_The_padovan_sequences_in_finite_groups. Acesso em: 29 abr. 2019.

VOET, C. The poetics of order: Dom Hans van der Laan's architectonic space. **Architectural Research Quarterly**, v. 16, n. 2, p. 137–154, 2012.

YILMAZ, N.; TASKARA, N. Matrix sequences in terms of Padovan and Perrin numbers. **Journal Applied Mathematics**, v. 2013, article ID 941673, 2013. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/258400920_Matrix_Sequences_in_terms_of_Padovan_and_Perrin_Numbers. Acesso em: 29 abr. 2019.