Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 15, jul. 2019
Iniciação Científica

Invertibilidade global e equilíbrio econômico geral

Global invertibility and general economic equilibrium

Filipe de Oliveira Silva
UFU - Universidade Federal de Uberlândia
filipeosilva@live.com

Jean Venato Santos
UFU - Universidade Federal de Uberlândia
jvenatos@ufu.br

Resumo

O principal objetivo deste texto é de divulgar uma sinergia existente entre matemática e ciências econômicas. Mais especificamente, serão apresentadas inter-relações entre o desenvolvimento de resultados de invertibilidade global de aplicações localmente injetoras com problemas de equilíbrio geral em economia. Para isto, inicialmente, a noção de equilíbrio econômico será abordada sob um ponto de vista teórico, ascendendo-se desde modelos simples e intuitivos até chegar a contextos mais abstratos. Em seguida, baseado em teoremas de invertibilidade global serão apresentados resultados de existência e unicidade de equilíbrio geral para modelos de mercados que se enquadram nestes contextos gerais e abstratos. Por fim, será observado que apesar dos esforços feitos por matemáticos e economistas nas últimas seis décadas, um relevante problema na interface entre matemática e economia, proposto pelo celebrado prêmio nobel em economia Paul Samuelson, ainda permanece em aberto.
Palavras-chave: Invertibilidade global. Equilíbrio econômico geral. Existência e unicidade de equilíbrio geral.

Abstract

The main objective of this text is to disseminate an existing synergy between mathematics and economics. More specifically, interrelations between the development of global invertibility results of locally injective mappings with problems of general economic equilibrium will be presented. For this, initially, the notion of economic equilibrium will be approached under a theoretical viewpoint, ascending from simple and intuitive models to reach more abstract contexts. Then, based on global invertibility theorems will be presented results of existence and uniqueness of general equilibrium for market models that fit into these general and abstract contexts. Finally, it will be noted that despite the efforts made by mathematicians and economists over the last six decades, a relevant problem in the interface between mathematics and economics, proposed by the celebrated Nobel Prize in economics Paul Samuelson, remains open.
Keywords: Global invertibility. General economic equilibrium. Existence and uniqueness of general equilibrium.

Artigo recebido em dez. 2018 e aceito em maio 2019.

1 Introdução

O problema de estabelecer a invertibilidade global de aplicações localmente injetoras aparece naturalmente em diversas áreas da matemática assim como em economia. Com efeito, ao longo das últimas seis décadas, inúmeros trabalhos aplicando-se resultados de injetividade global para obter a unicidade de equilíbrios em modelos econômicos gerais foram publicados. Para se ter uma ideia da vasta literatura sobre o assunto indica-se os trabalhos de Chichilnisky (1998), Gale e Nikaidô (1965), Mas-Colell (1979, 1990), Nikaidô (1972), Samuelson (1948, 1949, 1953, 1966), Starr (2011), assim como as referências contidas neles.

Neste trabalho é apresentado um recorte na história do desenvolvimento de resultados de invertibilidade global relacionados a problemas de existência e unicidade de equilíbrio geral em modelos econômicos. Para este recorte, foram selecionados resultados que apresentassem um nível interessante de abstração mas cujas demonstrações fossem acessíveis a leitores com conhecimentos razoáveis em cálculo de funções de várias variáveis.

Antes de entrar em resultados técnicos, sob o ponto de vista matemático, será elucidada a noção de equilíbrio geral em economia e para construir uma ideia intuitiva sobre este assunto, a princípio o mesmo será abordado no caso específico da relação entre oferta e demanda. Entretanto, desde já o leitor deve ser alertado para o fato da teoria do equilíbrio geral ser aplicada em inúmeros contextos em economia. De fato, neste trabalho serão apresentados resultados de equilíbrio geral relacionados à determinação de preços de fatores em mercados competitivos.

1.1 Equilíbrios parcial e geral

A noção mais ingênua de modelo de equilíbrio em economia consiste na interseção entre as curvas oferta e demanda de um determinado mercado. Isto conduz à conclusão de que preços de mercado são determinados pelo cruzamento de tais curvas, ou seja, são caracterizados por igualar demanda e oferta. O modelo em si, de fato, revela não só uma igualdade matemática mas uma posição estacionária do processo dinâmico constituído pelo ajustamento de preços e quantidades (demandadas e ofertadas) no mercado. Este ajustamento nos preços tendendo a igualar oferta e demanda num mercado isolado se insere na noção de equilíbrio parcial. O equilíbrio parcial apresenta uma análise *ceteris paribus* (tudo mais constante), ou seja, o preço em determinado mercado não repercute nos demais preços da economia. Por conseguinte, é uma ferramenta para abordagens de curto prazo. Para uma abordagem mais completa - e de longo prazo - deve-se levar em conta as interações e inter-relações entre os mercados. Para tal, são necessárias ferramentas de determinação conjunta dos preços o que conduz à noção de equilíbrio geral.

A fim de ilustrar limitações de análises baseadas em equilíbrio parcial, em Starr (2011, p. 3) o autor cita o mercado de veículos utilitários esportivos (SUVs) nos Estados Unidos (EUA) entre os anos de 2005 e 2008. No início de 2005, as perspectivas de negócios dos maiores fabricantes alocados nos EUA (Chrysler, Ford e General Motors) para tais modelos pareciam promissoras. As vendas de modelos SUVs, linhas altamente rentáveis destas montadoras, apresentavam números robustos. Entretanto, em meados de 2005, as empresas relataram deterioração dos lucros no setor. A situação chegou a tal ponto das classificações de crédito em dívidas públicas se reduzirem a níveis irrisórios. A GM e a Ford reduziram os preços para limpar os estoques, tornando o desconto ao empregado disponível para todos os clientes. A situação não melhorou em 2006 ou 2007 e em 2008 ficou ainda pior. A GM e a Ford buscaram e receberam garantias de empréstimos do governo federal dos EUA. De meados de 2005 a meados de 2008, uma participação de propriedade na GM caiu 75%; e na Ford, caiu 80%. O que deu errado? Chrysler, Ford e GM cometeram algum tipo de erro crítico em 2004? Houve alguma falha inusitada na gestão? Uma catástrofe ameaçava suas fábricas? De fato, nenhum desses eventos adversos ocorreram. As condições de fabricação dos SUVs foram tranquilas durante a primeira parte de 2005. A questão estava em outro ponto, a saber, no petróleo. O preço do petróleo aumentou significativamente entre os anos de 2005 e 2008, inclusive atingindo máximos históricos (em termos de dólar nominal). Como o consumo de gasolina por SUVs é alto, a demanda por estes modelos caiu significativamente. Em contrapartida, o aumento de demanda de automóveis migrou para carros eficientes no quesito consumo de combustível, predominantemente de fabricantes não-baseados nos EUA. Enfim, o mercado de petróleo afundou as vendas de SUVs, levando junto a rentabilidade da Chrysler, Ford e GM entre 2005 e 2008.

Analisando o mercado de SUVs isoladamente em fins de 2004, não seria possível prever o colapso que as montadoras experimentariam nos anos subsequentes. Para isto, seria fundamental levar em consideração vários outros mercados ao mesmo tempo, sobretudo os de petróleo e gasolina. Isto evidencia que as interações entre os mercados são essenciais para a previsão e compreensão da dinâmica econômica. Quando se aspira investigar as interações entre os mercados, o pressuposto (simplificador) de "tudo mais constante" deve ser descartado e vários mercados devem ser analisados ao mesmo tempo. Como existem interações distintas entre os mercados (por exemplo, entre o preço do petróleo, o preço da gasolina e a demanda por SUVs) é importante que o conceito de equilíbrio inclua a determinação simultânea e interativa de preços de equilíbrio em todos os mercados. O problema se torna então em buscar um equacionamento para a economia como um todo e não apenas para um mercado artificialmente isolado. Esse é o fundamento do conceito de equilíbrio econômico geral.

Neste contexto, o equilíbrio geral consiste em uma precificação para cada bem, na qual a oferta se igualaria à demanda para cada um destes bens, simultaneamente, levando em conta as interações entre os mercados. No exemplo em tela, os preços dos SUVs e da gasolina se ajustam para que a demanda e o fornecimento de SUVs e de gasolina sejam igualados. Mais geralmente, diz-se que a economia está em *equilíbrio geral* quando os preços se ajustaram totalmente, de modo que a oferta equivale a demanda em todos os mercados.

Por que os economistas estão interessados no equilíbrio geral? A razão pela qual se chama equilíbrio é que, em teoria, acredita-se que existam forças na economia, tais como oferta e demanda, que tendem a conduzir o sistema a esse conjunto de alocações e preços. Dentro de condições normais, é para aí que os estudiosos esperam que a economia convirja. Neste sentido, o equilíbrio é o princípio descritivo e preditivo do economista de mercado. As principais questões sobre equilíbrio incluem:

- Existência - o estudo das condições sob as quais existe uma solução para as equações que caracterizam o equilíbrio de mercado;

- Unicidade - se existe apenas uma família de preços que equilibra os mercados ou se há múltiplas (ou infinitas) soluções para tal problema;

- Estabilidade - se um mecanismo de formação de preços que eleva os preços dos bens em excesso de demanda e reduz os de excesso de oferta irá convergir para os preços de equilíbrio de mercado;

- Eficiência - economia do bem-estar, a eficácia da utilização de recursos implica na alocação de equilíbrio;

- Negociação - a relação entre estratégias de soluções por negociação e o equilíbrio passivo de preços.

Este trabalho se concentra nos dois primeiros pontos, ou seja, no problema de existência e unicidade de equilíbrio geral em modelos econômicos. Para um modelo de mercado com n mercadorias, é plausível que a condição de equilíbrio geral envolva n equações de excesso de demanda, uma para cada mercadoria, as quais podem ser denotadas por

$$E_i := Q_{di} - Q_{si} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{1}$$

onde $Q_{di} = Q_{di}(p_1, \dots, p_n)$ e $Q_{si} = Q_{si}(p_1, \dots, p_n)$ são, respectivamente, as funções demanda e oferta da $i-$ésima mercadoria e p_j o preço da $j-$ésima mercadoria para $i, j = 1, 2, \dots, n$. Ou seja, a existência de um equilíbrio, consiste num conjunto de preços p_j^* que satisfaça as n equações em (1) e a partir destes preços obtêm-se as quantidades de equilíbrio $Q_{di}^* = Q_{si}^*$.

Uma situação simplificada do modelo (1), seria o caso das n equações serem lineares e com todos os coeficientes dados numericamente ou, de maneira um pouco mais geral, com os coeficientes expressos por constantes paramétricas. Em qualquer destes casos, usando ferramentas da álgebra linear é possível discutir a existência e a unicidade dos valores de equilíbrio os quais seriam dados, quando existirem, em termos numéricos ou paramétricos, respectivamente. Aumentando o grau de complexidade, poder-se-ia pensar em modelos em que as equações em (1) são não lineares, com os quais a álgebra linear não se aplicaria diretamente o que demandaria ferramentas adicionais. De maneira ainda mais geral, pode-se considerar casos em que a função excesso de demanda nem sequer esteja explicitada, mas sim que satisfaça certas condições advindas de interpretações de um modelo econômico. Neste contexto mais geral, tanto a existência quanto a unicidade do equilíbrio são problemas que demandam uma análise mais profunda e em muitos casos teorias matemáticas mais avançadas devem ser invocadas para analisá-los, uma referência neste contexto é o livro de Mas-Colell (1990).

É importante lembrar o leitor, que toda esta discussão foi feita a partir da questão concreta e deveras intuitiva em economia que é a relação entre oferta e demanda de bens. Todavia, o problema da existência e unicidade de equilíbrio geral alcança uma vasta gama de modelos econômicos. Especificamente neste trabalho serão abordados outros resultados de existência e unicidade de equilíbrio, distintos do padrão oferta$\times$demanda, que estão inseridos na situação mais geral descrita acima, ou seja, no caso em que as equações estabelecidas pelo equilíbrio nem sequer serão explícitas, outrossim estarão sujeitas a um um conjunto de premissas provenientes de interpretações do modelo econômico em voga.

1.2 Preços de fatores em equilíbrio competitivo

A determinação dos preços é orientada, em qualquer estrutura de mercado, pela seguinte equação

$$P = C + \mu, \tag{2}$$

onde C representa os custos diretos (produto) e μ simboliza o lucro do empresário.

O parâmetro μ é uma expressão da estrutura de mercado, ou seja, o quanto a empresa pode, deliberadamente, acrescer no preço do seu produto. Tem uma relação direta com o poder de mercado da empresa. Num mercado monopolista, por exemplo, o parâmetro μ é mais intumescido do que num mercado oligopolista e, este, maior que numa estrutura puramente concorrencial. A seguir se analisa a organização de mercado que torna o indicador μ desprezível - no limite, nulo - a competição perfeita. A competição perfeita ocorre em mercados que: (i) não há diferenciação significante nos produtos a ponto de causar variabilidade nos preços (produtos homogêneos); e (ii) não há impedimentos técnicos, financeiros ou legais para que empresários entrem ou saiam desse mercado, numa linguagem mais técnica, inexistem barreiras à entrada (e saída). Esta última característica implica em uma grande quantidade de ofertantes. Pelo discutido até aqui, é aceitável afirmar que o preço é definido pelas livres forças de mercado (oferta $\times$ demanda) e nenhum agente pode, individualmente, alterá-lo. Em outras palavras, no mercado perfeitamente competitivo o vetor preço P é dado. Isso implica que o lucro das empresas nesse mercado é nulo.

A lucratividade nula pode parecer estranha e infrequente em observações empíricas, pode de fato não ser palatável num primeiro momento. Entretanto, um exercício deveras simples elucida o pressuposto de lucro zero em mercados perfeitamente competitivos: imagine um mercado com apenas um ofertante e que este incorpore um lucro de 100. Como não há empecilhos à entrada de novos empresários, outro ofertante ingressa nesse mercado no tempo $t+1$, agora a lucratividade - por conveniência - é de 50 para cada empresário. Esse fato se repetirá até o mercado incorporar o número de ofertantes o suficiente para que não haja incentivos a entrada de novos, o que ocorrerá quando o lucro for nulo.

O limite de nossa análise será o equilíbrio em mercado de concorrência perfeita, culminando, então, na seguinte igualdade:

$$P = C.$$

A empresa se defronta com a igualdade anterior e se orientará pela mesma. Utilizando o argumento da microeconomia neoclássica de que o único objetivo da empresa (firma) é a maximização dos lucros, obtém-se a equação abaixo

$$C(w_1, w_2, ..., w_n) = P \tag{3}$$

Como $P = (p_1, \ldots, p_n)$ é dado, a empresa alocará seus recursos nas n funções de custo c_i, em última instância, decidirá a quantidade que ofertará a fim de maximizar seu lucro. Chega-se a uma equação de equilíbrio. A ideia concreta de um problema de equilíbrio geral seria impor restrições às funções coordenadas de C para que, dados quaisquer p_i's existam w_j's satisfazendo (3) e que os mesmos sejam únicos. Ou equivalentemente, busca-se condições suficientes para a bijetividade da aplicação C.

Neste sentido, em dois artigos do The Economic Journal, Samuelson (1948, 1949), é iniciada uma discussão em que o autor demonstra que sob certas condições dois países com duas indústrias análogas que enfrentam os mesmos preços de bens no comércio mundial em equilíbrio competitivo, também devem ter os mesmos preços de fatores de produção. Posteriormente, em Samuelson (1953), é proposto um resultado mais geral envolvendo quantidades finitas arbitrárias de países e indústrias. Os pressupostos estabelecidos foram:

(C1) Existem m países equipados com n indústrias com as mesmas funções de produção para n bens.

(C2) Os países produzem cada bem em equilíbrio competitivo.

(C3) Não há tarifas ou custos de transporte, nem outros impedimentos para o comércio internacional de mercadorias, mas os fatores não são negociados entre os países.

(C4) As funções de produção são côncavas (ou com concavidade para baixo) e homogêneas de primeiro grau (Definição 2).

(C5) A matriz jacobiana da função produção tem todos os menores principais líderes (Definição 5) não nulos em todo ponto.

Matematicamente, o teorema de equalização dos preços de fatores (posto nesta forma) é um teorema de existência e unicidade de um único inverso para o conjunto de n funções custo de produção, que têm os preços de fatores como argumentos. Ou ainda, tal equalização equivale à invertibilidade global da função cujas n coordenadas são as funções custo de produção. Isso ocorre porque, em equilíbrio competitivo, o preço para cada bem deve igualar ao custo mínimo de produzi-lo, enquanto a função custo de um bem leva esse valor de custo mínimo em cada conjunto de preços de fatores admissíveis. Mais especificamente, seja W um intervalo n-dimensional de preços de fatores dentro do qual todas as funções custo são definidas. Seja $P = (p_1, \ldots, p_n)$ o conjunto dos preços dos n bens, que são equalizados às funções custos $C = (c_1, \ldots, c_n)$ de produção cujas variáveis são os preços de fatores $w = (w_1, \ldots, w_n)$ em W. Considere as funções custo $c_i(w)$, $i = 1, \ldots, n$, continuamente diferenciáveis. O equilíbrio geral neste caso é uma consequência do equilíbrio competitivo e é expresso pela equalização dos custos c_i's de produção com os preços p_i's dos bens o que é explicitado pela existência e unicidade de solução w para o sistema

$$c_i(w) = p_i, \ i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

para cada conjunto de preços $P = (p_1, \ldots, p_n)$.

Sob as premissas (C1)-(C5), Samuelson concluiu em 1953 que a igualdade dos preços de fatores entre os países provou ser uma consequência do equilíbrio competitivo. De fato, em Samuelson (1953, p. 9), afirma-se que se c_i, para $i = 1, \ldots, n$, são de classe C^1, então a condição (C5) é suficiente para a invertibilidade global da função custo $C = (c_1, \ldots, c_n)$. Entretanto, Nikaidô (1972) observou que a demonstração deste fato apresentada por Samuelson (1953), em um apêndice matemático, continha equívocos relacionados à aplicação do Teorema da função implícita de maneira global, porém como pode ser visto em seu enunciado no Teorema 4, a natureza de tal resultado é local. Além disto, Gale e Nikaidô (1965) apresentaram o seguinte contra-exemplo.

Exemplo 1 *Seja* $F = (f, g) \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida por*

$$F(x,y) = (e^{2x} - y^2 + 3, 4e^{2x}y - y^3)$$

e cuja matriz jacobiana é dada por:

$$JF(x,y) = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2x} & -2y \\ 8e^{2x}y & 4e^{2x} - 3y^2 \end{bmatrix}.$$

Note que a entrada superior à esquerda $2e^{2x}$*, que é o determinante da submatriz* 1×1 *no canto superior esquerdo, assim como o determinante* $e^{2x}(8e^{2x} + 10y^2)$ *de toda a matriz, são positivos para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *e portanto* F *satisfaz a condição* (C5)*. Porém, tal aplicação não é injetora uma vez que* $F(0,2) = (0,0) = F(0,-2)$.

Vale ressaltar que o exemplo acima, apesar de satisfazer (C5), não está sob as condições (C1)-(C4). De fato, constitui um problema em aberto se o conjunto de hipóteses (C1)-(C5) são suficientes ou não para a existência e unicidade de soluções para as equações (4). Neste trabalho serão tratadas variações de tais condições que irão garantir tal existência e unicidade.

Gale e Nikaidô (1965) também mostraram que a seguinte condição, mais restritiva que a hipótese (C5) acima, é suficiente para a injetividade da aplicação:

(C5') A matriz jacobiana da função produção tem todos os menores principais (Definição 5) não nulos em todo ponto.

É interessante ressaltar que neste resultado Gale e Nikaidô não levaram em conta as condições advindas das interpretações econômicas em tela, ou seja, não usaram as condições (C1)-(C4) e nem consideraram que tanto os preços p_i dos bens quanto os preços de fatores w_i são não-negativos. Além disto, note que o resultado só garante a unicidade de equilíbrio (injetividade) e não sua existência (sobrejetividade).

Ainda em Samuelson (1966), é proposta uma condição alternativa para a condição (C5) acima, que é estabelecida em termos de participações relativas dos fatores nos custos unitários (veja Subseção 4.1 e condição (13)). Porém uma demonstração de que tais novas condições aliadas a (C1)-(C4) seriam suficientes tanto para a unicidade quanto para a existência dos preços de equilíbrio só foram apresentadas em Nikaidô (1972). Neste trabalho, serão apresentados este resultado de Nikaidô, assim como uma generalização do mesmo proposta em Mas-Colell (1979).

2 Preliminares

Nesta seção serão introduzidos conceitos e propriedades pertinentes ao que seguirá no decorrer deste trabalho. Serão considerados os seguintes conjuntos:

$$\mathbb{R}^n_+ := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\ \forall\, i = 1, \ldots, n\}$$

e

$$\mathbb{R}^n_{++} := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0,\ \forall\, i = 1, \ldots, n\}.$$

Definição 2 (Funções homogêneas) Uma função $f\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ é dita *homogênea de grau k* se para todo $x \in \mathbb{R}^n_+$ e todo $r > 0$ tem-se

$$f(rx) = r^k f(x).$$

A seguinte propriedade constitui uma parte do Teorema de Euler. Sua demonstração foi inspirada no caso bidimensional apresentado em Chiang (1984,p. 413):

Proposição 3 *Seja $f\colon \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ uma função contínua e diferenciável em $\mathbb{R}^n_{++}$. Se f é homogênea de grau k então*

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = kf(x),\quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n_+.$$

Demonstração: Dado $x \in \mathbb{R}^n_{++}$, defina a função $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$g(r) = f(rx) - r^k f(x).$$

Note que $g(r) = 0$ para todo $r \geq 0$ e portanto $g'(r) = 0$ para todo $r > 0$. Por outro lado,

$$g'(r) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(rx) + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(rx) - kr^{k-1} f(x) = 0, \ \forall\, r > 0.$$

Fazendo $r = 1$, obtém-se a igualdade requerida. $\square$

Um teorema de função implícita é um resultado que determina condições sob as quais uma relação como $f(x,y) = a$ define x como função de y ou y como função de x. Em geral, a solução obtida é local. Uma demonstração para este resultado foge dos objetivos deste trabalho e podem ser encontrados em referências de análise avançada, tais como em Lima (2008) ou em Lima, Lourêdo e Oliveira (2012).

Teorema 4 (Teorema da função implícita) *Seja* $F\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ *uma aplicação de classe* C^1. *Suponha que* $F(x_0, y_0) = a$ *e*

$$\det\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\right] \neq 0.$$

Então, existe uma vizinhança $W \subset \mathbb{R}^k$ *de* y_0 *e uma função* $\varphi\colon W \to \mathbb{R}^m$*, de classe* C^1*, tais que*

$$F(\varphi(y), y) = a, \ \forall y \in W.$$

Definição 5 (Menores principais) Dados uma matriz quadrada A com entradas reais de ordem n e um inteiro positivo $k \leq n$, define-se um *menor* $k \times k$ de A como o determinante de uma matriz $k \times k$ obtida a partir de A excluindo $n-k$ linhas e colunas. Se I e J são subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com k elementos cada, então denota-se por A_{IJ} o menor $k \times k$ de A que corresponde às linhas com índice em I e as colunas com índice em J. No caso em que $I = J$ diz-se que A_{IJ} é um *menor principal* $k \times k$. Se a matriz que corresponde a um menor principal A_{IJ} é uma parte quadrada da região superior à esquerda da matriz A, isto é, se $I = J = \{1, 2, \ldots, k\}$, então o menor principal é chamado de *menor principal líder* $k \times k$. Note que uma matriz quadrada de ordem n possui exatamente n menores principais líderes.

3 Invertibilidade global

Nesta seção serão estabelecidos resultados de invertibilidade global de aplicações localmente injetoras, que serão utilizados na discussão de problemas de existência e unicidade de equilíbrio geral abordados na próxima seção.

O seguinte resultado de invertibilidade global é consequência de resultados clássicos do cálculo de funções de uma variável real e servirá de base para obter o Teorema 7, que versa sobre aplicações de várias variáveis.

Lema 6 *Seja* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função com derivada contínua. Se existem reais* $0 < m < M$ *tais que* $m \leq |f'(x)| \leq M$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*, então* f *é bijetora.*

Demonstração: Sendo f' contínua da condição $0 < m \leq |f'(x)|$ segue que $f'(x)$ nunca se anula. Do Teorema do valor intermediário tem-se que $f'(x) < 0$ e f é estritamente decrescente para todo

$x \in \mathbb{R}$ ou $f'(x) > 0$ e f é estritamente crescente para todo $x \in \mathbb{R}$. Em qualquer caso, conclui-se que f é injetora.

Fixado $x_0 \in \mathbb{R}$, pelo Teorema do valor médio, existe c_x em (x_0, x) ou (x, x_0) tal que $f(x) = f(x_0) + f'(c_x)(x - x_0)$. De $m \leq |f'(c_x)| \leq M$ conclui-se que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \text{ e } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \text{ se } f'(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

e

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty, \text{ se } f'(x) < 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Em qualquer caso, f é sobrejetora. □

Em Nikaidô (1972, p. 259) a seguinte generalização do Lema acima é provada para aplicações de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 7 (Nikaidô (1972)) *Seja $F = (f_1, \ldots, f_n) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 e denote o menor principal líder de ordem k da matriz jacobiana JF de F por:*

$$MP_k = \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{k1} & \cdots & f_{kk} \end{vmatrix}.$$

Se existem $2n$ números reais $M_k > m_k > 0$ tais que

$$m_k \leq |MP_k(x)| \leq M_k, \ \forall \ k = 1, 2, \ldots, n, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Então F é bijetora, ou seja, o sistema de equações

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

tem exatamente uma solução em $\mathbb{R}^n$ para qualquer vetor real $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Será aplicada indução finita na quantidade de variáveis n da aplicação F. De fato, para uma única variável independente o resultado recai no Lema 6. Assuma, agora, que a existência e unicidade de soluções para as equações (6) ocorrem no caso de $n-1$ variáveis, sob as condições (5).

Note que dado x_n, a condição (5) é satisfeita para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Assim, o sistema de equações consistindo das $n-1$ primeiras equações de (6):

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{7}$$

tem, por hipótese de indução, um único vetor solução $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Assim, tais $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ podem ser considerados como funções $x_j = \varphi_j(x_n)$ satisfazendo

$$f_i(\varphi_1(x_n), \varphi_2(x_n), \ldots, \varphi_{n-1}(x_n), x_n) = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{8}$$

para todos os valores de $x_n \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema da função implícita cada φ_j é de classe C^1, além disto, derivando a igualdade acima em relação a x_n obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{n-1} f_{ij}\varphi_j' + f_{in} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{9}$$

Definindo

$$G(x_n) = f_n(\varphi_1(x_n), \varphi_2(x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_n), x_n)$$

e tendo em vista a existência e unicidade de soluções das equações (7), tem-se que (6) tem solução única se, e somente se, a equação

$$G(x_n) = a_n \tag{10}$$

for unicamente resolvida na variável x_n, para todo $a_n \in \mathbb{R}$. Para isto, basta verificar que a função G está sob as condições do Lema 6. Mas

$$G' = f_{n1}\varphi_1' + f_{n2}\varphi_2' + \cdots + f_{nn-1}\varphi_{n-1}' + f_{nn}.$$

Por outro lado, aplicando a regra de Cramer no sistema linear (9), segue que

$$\varphi_i' = \frac{MP_{n-1}^i}{MP_{n-1}},$$

sendo

$$MP_{n-1} = \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n-11} & \cdots & f_{n-1n-1} \end{vmatrix},$$

o menor principal líder de ordem $n-1$ da matriz jacobiana JF e

$$MP_{n-1}^i = \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1i-1} & -f_{1n} & f_{1i+1} & \cdots & f_{1n-1} \\ f_{21} & \cdots & f_{2i-1} & -f_{2n} & f_{2i+1} & \cdots & f_{2n-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-11} & \cdots & f_{n-1i-1} & -f_{n-1n} & f_{n-1i+1} & \cdots & f_{n-1n-1} \end{vmatrix}$$

o determinante obtido substituindo a i-ésima coluna no menor principal líder MP_{n-1} pelo vetor coluna $(-f_{1n}, -f_{2n}, \dots, -f_{nn})^t$, onde cada f_{ij} está avaliado em

$$(\varphi_1(x_n), \varphi_2(x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_n), x_n)$$

com $-\infty < x_n < \infty$.

Note que aplicando $n-1-i$ permutações na i-ésima coluna de MP_{n-1}^i com sua coluna subsequente (à direita), obtém-se um determinante cuja coluna $n-1$ é $(-f_{1n}, -f_{2n}, \dots, -f_{nn})^t$ e em seguida retirando o sinal negativo desta coluna para frente do determinante, segue a relação:

$$MP_{n-1}^i = (-1)^{n-i}\overline{MP}_{n-1}^i,$$

onde

$$\overline{MP}_{n-1}^i = \begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1i-1} & f_{1i+1} & \cdots & f_{1n-1} & f_{1n} \\ f_{21} & \cdots & f_{2i-1} & f_{2i+1} & \cdots & f_{2n-1} & f_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-11} & \cdots & f_{n-1i-1} & f_{n-1i+1} & \cdots & f_{n-1n-1} & f_{n-1n} \end{vmatrix},$$

Assim,

$$G' = \frac{f_{n1}MP_{n-1}^1 + f_{n2}MP_{n-1}^2 + \cdots + f_{nn-1}MP_{n-1}^{n-1} + f_{nn}MP_{n-1}}{MP_{n-1}}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} f_{n1} \overline{MP}^1_{n-1} + \cdots + (-1) f_{nn-1} \overline{MP}^{n-1}_{n-1} + f_{nn} MP_{n-1}}{MP_{n-1}}.$$

Finalmente, note que o numerador da expressão acima, é exatamente a expansão de Laplace na n-ésima linha da matriz jacobiana JF. Portanto,

$$G' = \frac{JF}{MP_{n-1}}.$$

e $m_n/M_{n-1} \leq |G'(x_n)| \leq M_n/m_{n-1}$. Logo, pelo Lema 6, tem-se a existência e unicidade de solução para a equação (10). $\square$

O seguinte exemplo em Nikaidô (1972), ilustra a necessidade da aplicação estar definida em todo $\mathbb{R}^n$ no Teorema 7.

Exemplo 8 *Considere a aplicação* $F = (f_1, f_2) \colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$F(x,y) = (x^2 - y^2 + 3, 4x^2 y - y^3),$$

onde $\Omega = \{(x,y) \mid 1/2 < x < 2,\ -3 < y < 3\}$. *Note que* F *satisfaz as condições* (5) *do Teorema 7. De fato,*

$$1 < f_x < 4 \text{ e } 1 < |\det JF| < 244.$$

No entanto, F *não é injetora pois* $F(1,2) = F(1,-2) = (0,0)$.

O seguinte resultado, que será aplicado na próxima seção, foi primeiramente obtido em Hadamard (1906). Uma demonstração para o mesmo foge do escopo proposto neste texto, uma referência para a prova pode ser encontrada em Plastock (1974).

Teorema 9 (Teorema de Hadamard) *Um difeomorfismo local* $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *é bijetivo se*

$$\int_0^\infty \min_{\|x\|=r} \|JF(x)^{-1}\|^{-1}\, dr = \infty. \tag{11}$$

Em particular, se $\|JF(x)^{-1}\|^{-1} \geq \varepsilon$, *para algum* $\varepsilon > 0$ *e para todo* $x \in \mathbb{R}^n$, *então* F *é bijetivo.*

4 Existência e unicidade de equilíbrio geral

4.1 Participações relativas

Nesta seção, será introduzida a noção de matrizes de participações relativas dos fatores utilizados em cada bem produzido. Além disto, serão estabelecidas propriedades úteis para os principais resultados de equalização em equilíbrio competitivo que serão apresentados na sequência.

Lembrando que $w_j > 0$ denota o preço do j-ésimo fator de produção e $p_i > 0$ o preço do i-ésimo bem produzido $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Dadas n funções custo $c_i(w_1, w_2, \ldots, w_n)$, o equilíbrio em competição perfeita induz sua equalização com os preços de cada bem e o problema consiste em obter a existência e unicidade dos w_j's satisfazendo o sistema de equações

$$c_i(w_1, w_2, \ldots, w_n) = p_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

onde supõe-se que o número de fatores se iguala ao número de bens.

Quando as funções custos possuem derivadas parciais contínuas e são originadas da minimização do custo unitário, tem-se que $c_{ij} = \dfrac{\partial c_i}{\partial w_j}$ reflete a quantidade do j-ésimo fator que é usada para produzir uma unidade do i-ésimo bem. Sendo assim, a quantidade

$$\alpha_{ij} = \frac{c_{ij} w_j}{c_i}$$

pode ser interpretada como a participação relativa do j-ésimo fator no setor do i-ésimo bem. De fato, devido à homogeneidade de primeiro grau de c_i, segue da Proposição 3, que o somatório de $c_{ij} w_j$ para $j = 1, 2, \ldots, n$ é igual a c_i. Note que, economicamente é plausível considerar $c_i(w) > 0$ para todo $w \in \mathbb{R}^n_{++}$, o que é relevante para garantir a boa definição de α_{ij}.

Do cálculo, é sabido que as funções logaritmo $g(x) = \ln x$ e exponencial $h(x) = e^x$ são funções de classe C^∞ e que a primeira leva bijetivamente o intervalo $(0, +\infty)$ em todo $\mathbb{R}$ enquanto a segunda leva os reais $\mathbb{R}$ biunivocamente no intervalo $(0, +\infty)$.

Desde que cada função custo c_i e cada preço de fatores w_j assumem somente valores positivos, é possível aplicar as transformações $f_i = \ln c_i$ e $w_j = e^{x_j}$. Isto define uma aplicação $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1, dada por

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ln c_i(e^{x_1}, e^{x_2}, \ldots, e^{x_n}).$$

Agora observe que, denotando $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, segue que

$$f_{ij}(x) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\frac{\partial}{\partial x_j} c_i(e^{x_1}, e^{x_2}, \ldots, e^{x_n})}{c_i(e^{x_1}, e^{x_2}, \ldots, e^{x_n})} = \frac{e^{x_j} c_{ij}(e^{x_1}, e^{x_2}, \ldots, e^{x_n})}{c_i(e^{x_1}, e^{x_2}, \ldots, e^{x_n})}.$$

Ou seja, considerando que $w_j = e^{x_j}$, pode-se escrever:

$$f_{ij}(x) = \alpha_{ij}(w(x)). \tag{12}$$

Uma vez que as funções logaritmo e exponencial são biunívocas, do exposto acima, segue a seguinte equivalência:

Proposição 10 *O sistema de equações $c_i(w_1, w_2, \ldots, w_n) = p_i$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, possui uma única solução se, e somente se, o sistema de equações*

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

onde $a_i = \ln p_i$, possui uma única solução. O que equivale a dizer que a aplicação custo $C = (c_1, \ldots, c_n) \colon \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^n_{++}$ é bijetiva se, e somente se, $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é bijetiva.

4.2 Preços de fatores em equilíbrio competitivo

Voltando ao problema de encontrar condições sob as quais, dados os preços p_i de n bens e n funções custo $c_i(w_1, w_2, \ldots, w_n)$, existem únicos w_i's satisfazendo a equalização de equilíbrio competitivo:

$$c_i(w_1, w_2, \ldots, w_n) = p_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

em Nikaidô (1972) são apresentadas condições que consistem numa modificação das condições originais (C5) apontadas em Samuelson (1953). De fato, sua exigência é que a matriz de participações relativas $A = (\alpha_{ij})$, a menos de re-enumeração de linhas e/ou colunas, possui os menores principais líderes com valores absolutos limitados inferiormente por constantes positivas $\delta_k > 0$, ou seja,

$$\text{valor absoluto de} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} \end{vmatrix} \geq \delta_k \ \text{ para } k = 1, 2, \dots, n. \qquad (13)$$

Ou seja, em Nikaidô (1972) o seguinte resultado de equalização dos preços de fatores é obtido:

Teorema 11 (Nikaidô (1972)) *Seja* $C = (c_1, c_2, \dots, c_n) \colon \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_{++}$ *uma função custo de classe* C^1. *Se*

i) *As derivadas parciais* c_{ij} *são contínuas e não-negativas,* $\forall\, i, j = 1, 2, \dots, n$*;*

ii) c_i *é positivamente homogênea de grau 1,* $\forall\, i = 1, 2, \dots, n$.

iii) *A condição de Samuelson modificada* (13) *é satisfeita em todo* $\mathbb{R}^n_{++}$.

Então, para qualquer conjunto de preços de bens $p_i > 0$, *existe um único conjunto de preços de fatores* $w_j > 0$ *satisfazendo*

$$c_i(w_1, w_2, \dots, w_n) = p_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Demonstração: Seguindo a Proposição 10, é suficiente mostrar a bijetividade da aplicação

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_n) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

dada por $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = \ln c_i(w_1, w_2, \dots, w_n)$ onde $w_j = e^{x_j}$. Para isto, basta verificar a existência das cotas m_k e M_k, do Teorema 7, para a aplicação F. Note que, da igualdade (12) entre as matrizes jacobianas, tem-se que as cotas inferiores m_k's são dadas pelos próprios δ_k's da condição iii). Por outro lado, da homogeneidade ii) segue que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = 1$$

pois, pela Proposição 3, $c_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} w_j$. Além disto, da condição i) e do fato de w_j e c_i serem positivos tem-se que $\alpha_{ij} \geq 0$. Portanto, $0 \leq \alpha_{ij} \leq 1$, para todo i, j em todo ponto. Desde que o determinante de uma matriz é um polinômio de seus elementos, da limitação de cada elemento α_{ij}, conclui-se que todos os principais menores em (13) são limitados superiormente, o que justifica a existência das cotas superiores M_k, do Teorema 7, para F. $\square$

Em Mas-Colell (1979) o Teorema de Hadamard é aplicado para obter a seguinte extensão do resultado de equilíbrio geral de Nikaidô (Teorema 11). De fato, Mas-Colell mostrou que não é necessário considerar limitações para todos os menores principais líderes da matriz de participações relativas (α_{ij}), provando que basta exigir tal limitação para o determinante da matriz (α_{ij}) completa (veja condição iii) abaixo).

Teorema 12 (Mas-Colell (1979)) *Seja* $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n) \colon \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_{++}$ *uma função custo e denote a matriz de participações relativas de c por* $A = (\alpha_{ij})$. *Se*

i) *As derivadas parciais* c_{ij} *são contínuas e não-negativas,* $\forall\, i, j = 1, 2, \ldots, n$*;*

ii) c_i *é positivamente homogênea de grau 1,* $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$*;*

iii) *Existe* $\delta > 0$ *tal que* $|\det(\alpha_{ij}(w))| > \delta$ *para todo* $w \in \mathbb{R}^n_{++}$.

Então, para quasquer preços de bens $p_i > 0$*, existem únicos preços de fatores* $w_j > 0$ *tais que*

$$c_i(w_1, w_2, \ldots, w_n) = p_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Demonstração: Da Proposição 10, basta mostrar a bijetividade de $F = (f_1, \ldots, f_n) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \ln c_i(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ e $w_j = e^{x_j}$. Pelo Teorema de Hadamard-Plastock, é suficiente mostrar que $\|JF(x)^{-1}\|^{-1} \geq \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Da igualdade (12), a condição iii) sobre a matriz de participações relativas $(\alpha_{ij}(w))$ em $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n_{++}$, induz a mesma condição na matriz jacobiana $JF(x)$ em $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $= (\ln w_1, \ln w_2, \ldots, \ln w_n)$, donde $|\det JF(x)| > \delta$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Pelo argumento na demonstração do Teorema 11, da homogeneidade de c segue que $0 \leq f_{ij} = \frac{e^{x_j} c_{ij}}{c_i} \leq 1$, em particular $\|JF(x)\| \leq M$, para algum $M > 0$.

Da teoria de matrizes sabe-se que $JF(x)^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj} JF(x)}{\det JF(x)}$, onde $\operatorname{adj} JF(x)$ é matriz adjunta de $JF(x)$. Além disto, dada uma matriz quadrada B segue que $\|\operatorname{adj} B\| = \|B\|$. Assim, $\|JF(x)^{-1}\|^{-1} = \dfrac{|\det JF(x)|}{\|JF(x)\|} > \dfrac{\delta}{M}$. Portanto, basta tomar $\varepsilon = \delta/M$. $\square$

5 Considerações finais

Ao longo das últimas seis décadas o conceito de equilíbrio geral tem sido amplamente desenvolvido e explorado por economistas e matemáticos. Neste ensaio, foram expostos resultados sobre existência e unicidade do equilíbrio geral para modelos econômicos satisfazendo determinados pressupostos. Mais especificamente, mostrou-se nos resultados de Nikaidô (Teorema 11) e de Mas-Colell (Teorema 12) que o conjunto de premissas (C1)-(C4), enunciados na Introdução, aliados à condição iii) de cada um destes teoremas são suficientes para concluir a existência e unicidade do equilíbrio geral no contexto da equalização entre custos de fatores e preços de bens. Além disto, foi mencionado na Introdução que Gale e Nikaidô mostraram que a condição (C5') de que a matriz jacobiana da função produção tem todos os menores principais não nulos em todo ponto, garante a unicidade de equilíbrio geral. Por outro lado, em Mckenzie (1967) um contraexemplo é apresentado, satisfazendo (C1)-(C4) e uma condição mais fraca que (C5), a saber, que a matriz jacobiana da função produção tem determinante não nulo em todo ponto. Apesar da intensidade com que o assunto tem sido estudado ao longo destes anos, dentro do conhecimento dos autores deste trabalho, ainda não se sabe se o conjunto de hipóteses (C1)-(C5) são ou não suficientes para a existência e a unicidade do equilíbrio geral.

6 Agradecimentos

Os autores agradecem aos pareceristas pelas sugestões que foram incorporadas ao trabalho. O primeiro autor agradece o apoio financeiro via IC-CNPQ2016-0284. O segundo autor agradece o suporte financeiro da FAPEMIG APQ-00595-14 e do CNPq 446956/2014-7.

7 Referências bibliográficas

[1] BANDYOPADHYAY, T.; BISWAS T. Global univalence when mappings are not necessarily continuous. **Journal of Mathematical Economics**, v. 23, n. 5, p. 435–450, 1994.

[2] CHIANG, A. C. **Fundamental methods of mathematical economics**. 3rd. ed. Nova York: McGraw-Hill, 1984.

[3] CHICHILNISKY, G. Topology and invertible maps. **Advances in Applied Mathematics**, v. 21, n.1, p. 113–123, 1998.

[4] GALE D.; NIKAIDÔ, H. The Jacobian matrix and global univalence of mappings. **Mathematische Annalen**, v. 159, p. 81–93, 1965.

[5] HADAMARD, M. Sur les transformations ponctuelles. **Bulletin de la Société Mathématique de France**, v. 34, p. 71–84, 1906.

[6] LIMA, E. L. **Curso de análise**. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. v. 2.

[7] LOURÊDO, A. T.; OLIVEIRA, A. M.; LIMA, O. A. **Cálculo avançado**. 2. ed . Campina Grande: Editora da Universidade Estadual da Paraíba, 2012.

[8] MAS-COLELL, A. **Theory of general economic equilibrium:** a differentiable approach, Economic Society Monographs, n. 9, Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[9] MAS-COLELL, A. Two propositions on the global univalence of systems of cost function. *In:* GREEN, J. R.; SCHEINKMAN, J. A. (ed.). **General equilibrium, growth, and trade:** essays in honor of Lionel McKenzie. New York: Academic Press, 1979. v. 1, p. 323–331.

[10] McKENZIE, L. W. The inversion of cost functions: a counter-example. **International Economic Review**, v. 8, n. 3, p. 271–278, 1967.

[11] NIKAIDÔ, H. Relative shares and factor price equalization. **Journal of International Economics**, v. 2, n. 3, p. 257–263, 1972.

[12] PLASTOCK, R. Homeomorphisms between Banach spaces. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 200, p. 169–183, 1974.

[13] SAMUELSON, P. A. Postscript to Prices of factors and goods in general equilibrium. *In:* SAMUELSON, P. A. **The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson**. Cambridge: The M.I.T. Press, 1966. v. 2.

[14] SAMUELSON, P. A. Prices of factors and goods in general equilibrium. **The Review of Economic Studies**, v. 21, n. 1, p. 1–20, 1953.

[15] SAMUELSON, P. A. International factor-price equalisation once again. **The Economic Journal**, v. 59, n. 234, p. 181-197, 1949.

[16] SAMUELSON, P. A. International trade and equalisation of factor prices. **The Economic Journal**, v. 58, n. 230, p. 163-184, 1948.

[17] STARR, R. M. **General equilibrium theory:** an introduction. 2nd. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.