Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 15, jul. 2019

Sequência matricial generalizada de Fibonacci e sequência matricial k-Pell: propriedades matriciais

The generalized Fibonacci matrix sequence and the k-Pell matrix sequence: matrix properties

Francisco Regis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE
fregis@ifce.edu.br

Paula Maria Machado Cruz Catarino
Universidade Trás-os-Montes e Alto Douro – UTAD
pcatarino23@gmail.com

Resumo

No presente trabalho apresentamos algumas propriedades comutativas decorrentes de representações matriciais que correspondem à Sequência matricial Generalizada de Fibonacci e a sequência matricial k-Pell. Por intermédio de determinadas matrizes especiais, podemos verificar outras formas de demonstração, inclusive, o processo de extensão ao campo de índices inteiros negativos, o qual, ainda não foi discutido na literatura para as correspondentes sequências matriciais abordadas no presente trabalho.
Palavras-chave: Sequência matricial Generalizada de Fibonacci. Sequência matricial k-Pell. Propriedades matriciais. Extensão de índices ao campo dos inteiros.

Abstract

In the present work we present some commutative properties resulting from matrix representations that correspond to the Fibonacci Generalized Sequence and the k-Pell matrix sequence. By means of certain special matrices, we can verify other forms of demonstration, including the process of extension to the field of negative integer indices, which has not been discussed yet in the literature for the corresponding matrix sequences addressed in the present work.
Keywords: Generalized Fibonacci matricial sequence. Matrix k-Pell sequence. Extension to the integers indices

Artigo recebido em mar. 2019 e aceito em jul. 2019.

1 Introdução

Recentemente os autores indicados em Wani, Badshah, Rathore e Catarino (2019) introduziram as seguintes definições de sequências.

Definição 1: Para $k \in IR^+$, a Sequência Generalizada de Fibonacci $\langle R_{k,n} \rangle$ é definida pela seguinte recorrência $R_{k,n+1} = 2R_{k,n} + kR_{k,n-1}, n \geq 1, R_{k,0} = 2, R_{k,1} = 1$.

Definição 2: Para $k \in IR^+$, a Sequência k-Pell $\langle P_{k,n} \rangle$ é definida pela seguinte recorrência $P_{k,n+1} = 2P_{k,n} + kP_{k,n-1}, n \geq 1, P_{k,0} = 0, P_{k,1} = 1$.

Logo em seguida, no mesmo trabalho, deparamos as definições correspondentes para sequências matriciais recorrentes.

Definição 3: Para $k \in IR^+$, a Sequência Generalizada matricial de Fibonacci $\langle S_{k,n} \rangle$ é definida pela seguinte recorrência $S_{k,n} = 2S_{k,n-1} + kS_{k,n-2}, n \geq 2, \mathrm{S}_{k,0} = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \mathrm{S}_{k,1} = \begin{pmatrix} 2+2k & k \\ 1 & 2k \end{pmatrix}$.

Definição 4: Para $k \in IR^+$, a Sequência k-Pell matricial $\langle V_{k,n} \rangle$ é definida pela seguinte recorrência $V_{k,n} = 2V_{k,n-1} + kV_{k,n-2}, n \geq 2, V_{k,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V_{k,1} = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Antes de abordamos determinadas propriedades matriciais envolvendo, por exemplo, a comutatividade dos elementos definidas a partir das definições 3 e 4, sobretudo, propriedades matriciais desconsideradas e não desenvolvidas no trabalho de Wani, Badshah, Rathore e Catarino (2019), vejamos alguns exemplos preliminares.

De fato, vamos considerar, a partir da definição 4, a seguinte matriz $V_{k,1} = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Em seguida, vejamos o comportamento das seguintes potências da matriz ${V_{k,1}}^n$, para $n \geq 1$: ${V_{k,1}}^2 = \begin{pmatrix} 4+k & k \cdot 2 \\ 2 & k \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{k,3} & k \cdot P_{k,2} \\ P_{k,2} & k \cdot P_{k,1} \end{pmatrix}$, ${V_{k,1}}^3 = \begin{pmatrix} 8+4k & k \cdot (4+k) \\ 4+k & k \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{k,4} & k \cdot P_{k,3} \\ P_{k,3} & k \cdot P_{k,2} \end{pmatrix}$, ${V_{k,1}}^4 = \begin{pmatrix} k^2+12k+16 & k \cdot (8+4k) \\ 8+4k & k \cdot (4+k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{k,5} & k \cdot P_{k,4} \\ P_{k,4} & k \cdot P_{k,3} \end{pmatrix}$, ${V_{k,1}}^5 = \begin{pmatrix} 6k^2+32k+32 & k \cdot (k^2+12k+16) \\ k^2+12k+16 & k \cdot (8+4k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{k,6} & k \cdot P_{k,5} \\ P_{k,5} & k \cdot P_{k,4} \end{pmatrix}$, ${V_{k,1}}^6 = \begin{pmatrix} k^3+24k^2+80k+64 & k \cdot (6k^2+32k+32) \\ 6k^2+32k+32 & k \cdot (k^2+12k+16) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{k,7} & k \cdot P_{k,6} \\ P_{k,6} & k \cdot P_{k,5} \end{pmatrix}$,

${V_{k,1}}^7 = \begin{pmatrix} k^3+24k^2+80k+64 & k \cdot (6k^2+32k+32) \\ 6k^2+32k+32 & k \cdot (k^2+12k+16) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{k,8} & k \cdot P_{k,7} \\ P_{k,7} & k \cdot P_{k,6} \end{pmatrix}$, etc.

Por outro lado, se tomarmos a matriz $\mathrm{S}_{k,0}=\begin{pmatrix}1 & 2k\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ definida em 3, poderemos observar um comportamento semelhante para as seguintes potências $\mathrm{S}_{k,0}V_{k,1}{}^{n}=\begin{pmatrix}1 & 2k\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n}$. De fato, vejamos que ocorre que $\mathrm{S}_{k,0}V_{k,1}=V_{k,1}\mathrm{S}_{k,0}=\begin{pmatrix}2+2k & k\cdot 1\\ 1 & k\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{k,2} & k\cdot R_{k,1}\\ R_{k,1} & k\cdot R_{k,0}\end{pmatrix}$, $\mathrm{S}_{k,0}V_{k,1}{}^{2}=$ $\begin{pmatrix}4+5k & k\cdot(2+2k)\\ 2+2k & k\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{k,3} & k\cdot R_{k,2}\\ R_{k,2} & k\cdot R_{k,1}\end{pmatrix}$, $\mathrm{S}_{k,0}V_{k,1}{}^{3}=\begin{pmatrix}2k^{2}+12k+8 & k\cdot(4+5k)\\ 4+5k & k\cdot(2+2k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{k,4} & k\cdot R_{k,3}\\ R_{k,3} & k\cdot R_{k,2}\end{pmatrix}$,

$\mathrm{S}_{k,0}V_{k,1}{}^{4}=\begin{pmatrix}9k^{2}+28k+16 & k\cdot(2k^{2}+12k+8)\\ 2k^{2}+12k+8 & k\cdot(4+5k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{k,5} & k\cdot R_{k,4}\\ R_{k,4} & k\cdot R_{k,3}\end{pmatrix}$, $\mathrm{S}_{k,0}V_{k,1}{}^{5}=$

$\begin{pmatrix}2k^{3}+30k^{2}+64k+32 & k\cdot(9k^{2}+28k+16)\\ 9k^{2}+28k+16 & k\cdot(2k^{2}+12k+8)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{k,6} & k\cdot R_{k,5}\\ R_{k,5} & k\cdot R_{k,4}\end{pmatrix}$,

$\mathrm{S}_{k,0}V_{k,1}{}^{6}=\begin{pmatrix}13k^{3}+88k^{2}+144k+64 & k\cdot(2k^{3}+30k^{2}+64k+32)\\ 2k^{3}+30k^{2}+64k+32 & k\cdot(9k^{2}+28k+16)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{k,7} & k\cdot R_{k,6}\\ R_{k,6} & k\cdot R_{k,5}\end{pmatrix}$, etc.

2 As propriedades matriciais

Com origem nos exemplos anteriores, vejamos dois teoremas que permitem determinar o comportamento especial das seguintes matrizes $V_{k,1}=\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ e $\mathrm{S}_{k,0}V_{k,1}{}^{n}=\begin{pmatrix}1 & 2k\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n}$, para $n\geq 1$. Tais resultados deverão ser empregados nas seções subsequentes.

Teorema 1: Para todo inteiro positivo $n\geq 1$, temos que ocorre a igualdade $V_{k,1}{}^{n}=\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n}=\begin{pmatrix}P_{k,\mathrm{n}+1} & k\cdot P_{k,\mathrm{n}}\\ P_{k,\mathrm{n}} & k\cdot P_{k,\mathrm{n}-1}\end{pmatrix}$.

Prova. Por indução, iremos admitir que $V_{k,1}{}^{n}=\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n}=\begin{pmatrix}P_{k,\mathrm{n}+1} & k\cdot P_{k,\mathrm{n}}\\ P_{k,\mathrm{n}} & k\cdot P_{k,\mathrm{n}-1}\end{pmatrix}$. Em seguida, basta tomar a matriz $V_{k,1}{}^{n+1}=\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n+1}=\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n}\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_{k,\mathrm{n}+1} & k\cdot P_{k,\mathrm{n}}\\ P_{k,\mathrm{n}} & k\cdot P_{k,\mathrm{n}-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Finalmente, vejamos que $V_{k,1}{}^{n+1}=\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n+1}=\begin{pmatrix}2P_{k,\mathrm{n}+1}+k\cdot P_{k,\mathrm{n}} & k\cdot P_{k,\mathrm{n}+1}\\ P_{k,\mathrm{n}}+k\cdot P_{k,\mathrm{n}-1} & k\cdot P_{k,\mathrm{n}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_{k,\mathrm{n}+2} & k\cdot P_{k,\mathrm{n}+1}\\ P_{k,\mathrm{n}+1} & k\cdot P_{k,\mathrm{n}}\end{pmatrix}$, $n\geq 1$□

Teorema 2: Para todo inteiro positivo $n\geq 1$, temos que ocorre a igualdade $V_{k,1}{}^{n}\mathrm{S}_{k,0}=\mathrm{S}_{k,0}V_{k,1}{}^{n}=\begin{pmatrix}1 & 2k\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n}=\begin{pmatrix}R_{k,\mathrm{n}+1} & k\cdot R_{k,\mathrm{n}}\\ R_{k,\mathrm{n}} & k\cdot R_{k,\mathrm{n}-1}\end{pmatrix}$.

Prova. Similarmente, com origem nos casos preliminares indicados na seção anterior, iremos assumir por indução que $S_{k,0} V_{k,1}{}^{n} = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} R_{k,n+1} & k \cdot R_{k,n} \\ R_{k,n} & k \cdot R_{k,n-1} \end{pmatrix}$. Em seguida, repetimos o seguinte argumento $S_{k,0} V_{k,1}{}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{k,n+1} & k \cdot R_{k,n} \\ R_{k,n} & k \cdot R_{k,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{k,n+2} & k \cdot R_{k,n+1} \\ R_{k,n+1} & k \cdot R_{k,n} \end{pmatrix}$, para $n \geq 1 \square$

Vamos definir as seguintes matrizes características: $V_{k,n} = \begin{pmatrix} P_{k,n+1} & k \cdot P_{k,n} \\ P_{k,n} & k \cdot P_{k,n-1} \end{pmatrix}$ e $S_{k,n} = \begin{pmatrix} R_{k,n+1} & k \cdot R_{k,n} \\ R_{k,n} & k \cdot R_{k,n-1} \end{pmatrix}$, para $n \geq 1$.

Na primeira observamos os elementos da sequência k-Pell, enquanto que na segunda, podemos observar os elementos da sequência generalizada de Fibonacci definida inicialmente. Tais matrizes revelam o comportamento dos elementos (matrizes) determinados pelas definições 3 e 4. Ademais, vamos analisar o comportamento dos respectivos determinantes, tendo em vista o seguinte teorema.

Teorema 3: Para todo inteiro positivo $n \geq 1$, temos os determinantes correspondentes:
(i) $\det V_{k,n} = (-1)^{n} k^{n}$; $\det S_{k,n} = (3+4k)(-1)^{n} k^{n+1}$.

Prova. Podemos determinar que $\det V_{k,1} = -k = (-1)k$, $\det V_{k,1}{}^{2} = k^{2}$, $\det V_{k,1}{}^{3} = -k^{3}$, $\det V_{k,1}{}^{4} = k^{4}$. Logo em seguida, admitiremos por indução matemática que vale $\det V_{k,n} = \det V_{k,1}{}^{n} = \det \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} = (-1)^{n} k^{n}$. Em seguida, basta ver vale a seguinte decomposição $\det V_{k,1}{}^{n+1} = \det \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} = \det \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{n} k^{n} \cdot (-1)k = (-1)^{n+1} k^{n+1}$. Para o segundo item, consideraremos a matriz característica $S_{k,n} = \begin{pmatrix} R_{k,n+1} & k \cdot R_{k,n} \\ R_{k,n} & k \cdot R_{k,n-1} \end{pmatrix}$. Assim, assumindo por indução para o segundo item, temos $\det(S_{k,n}) = (3+4k)(-1)^{n} k^{n+1}$. Em seguida, basta ver que $\det(S_{k,0} \cdot (V_{k,1})^{n+1}) = \det\left(S_{k,0} \cdot (V_{k,1})^{n}\right) \det(V_{k,1}) = (3+4k)(-1)^{n} k^{n+1}(-k)$ $= (3+4k)(-1)^{n+1} k^{n+2}$. Portanto, encontramos que $\det S_{k,n+1} = \det(S_{k,0} \cdot (V_{k,1})^{n+1}) = (3+4k)(-1)^{n+1} k^{n+2} \square$

Na seção subsequente, abordaremos determinadas propriedades discutidas no trabalho de Wani, Badshah, Rathore e Catarino (2019), todavia, a partir do emprego dos teoremas anteriores, mostraremos outras formas imediatas e diferenciadas de determinar as mesmas.

3 Algumas propriedades comutativas revisitadas

Veremos, a partir dos teoremas 1 e 2, outras formas de demonstrar as propriedades comutativas discutidas no trabalho de Wani, Badshah, Rathore e Catarino (2019).

Teorema 4: Para todo inteiro positivo $m,n \geq 1$, temos que: (i) $V_{k,\mathrm{m}+n} = V_{k,\mathrm{m}} V_{k,n} = V_{k,n} V_{k,\mathrm{m}}$; (ii) $S_{k,\mathrm{m}} S_{k,n} = S_{k,n} S_{k,\mathrm{m}}$; (iii) $V_{k,\mathrm{m}} \cdot S_{k,\mathrm{n}} = S_{k,\mathrm{n}} \cdot V_{k,\mathrm{m}}$.

Prova. Tendo em vista o teorema 1, podemos escrever $V_{k,1}{}^{n} = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} P_{k,\mathrm{n}+1} & k \cdot P_{k,\mathrm{n}} \\ P_{k,\mathrm{n}} & k \cdot P_{k,\mathrm{n}-1} \end{pmatrix} = V_{k,n}$.

Logo em seguida, vemos que $V_{k,\mathrm{m}+n} = V_{k,1}{}^{n+m} = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+m} = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m} = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n}$.

De imediato, constatamos que $V_{k,\mathrm{m}+n} = V_{k,\mathrm{m}} V_{k,n} = V_{k,n} V_{k,\mathrm{m}}$. Para o segundo item, pelo teorema 2, sabemos que $\mathrm{S}_{k,0} V_{k,1}{}^{n} = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} R_{k,\mathrm{n}+1} & k \cdot R_{k,\mathrm{n}} \\ R_{k,\mathrm{n}} & k \cdot R_{k,\mathrm{n}-1} \end{pmatrix} = S_{k,n}$. Segue que $S_{k,\mathrm{m}} S_{k,n} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m} \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m} = S_{k,n} S_{k,\mathrm{m}}$. Aqui empregamos o fato da seguinte comutatividade entre as matrizes indicadas $\mathrm{S}_{k,0} V_{k,1} = V_{k,1} \mathrm{S}_{k,0}$. Para o terceiro item, basta observar, repetindo os argumentos anteriores, que ainda teremos $V_{k,\mathrm{m}} \cdot S_{k,\mathrm{n}} = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m} \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{m} = S_{k,\mathrm{n}} \cdot V_{k,\mathrm{m}}$ □

Teorema 5: Para todo inteiro positivo $m,n \geq 1$, temos que: (i) $V_{k,\mathrm{n}} + 2kV_{k,\mathrm{n}-1} = S_{k,n}$; (ii) $2V_{k,\mathrm{n}+1} - 3V_{k,\mathrm{n}} = S_{k,n}$; (iii) $S_{k,\mathrm{n}+1}{}^{2} = S_{k,1}{}^{2} \cdot V_{k,2\mathrm{n}}$; (iv) $S_{k,2\mathrm{n}+1} = V_{k,\mathrm{n}} S_{k,\mathrm{n}+1}$; (v) $S_{k,2\mathrm{n}} = V_{k,n} S_{k,n}$.

Prova. Para o primeiro item, vamos considerar a expressão $V_{k,\mathrm{n}} + 2kV_{k,\mathrm{n}-1} = V_{k,1}{}^{n} + 2k \cdot V_{k,1}{}^{n-1} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} + 2k \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} \left(I + 2kV_{k,1}{}^{-1} \right)$. Agora, podemos ver o comportamento de $I + 2kV_{k,1}{}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{k} & -\frac{2}{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2k \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = S_{k,0}$.

Dessa forma, vemos que $V_{k,\mathrm{n}} + 2kV_{k,\mathrm{n}-1} = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} S_{k,0} = S_{k,0} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} = S_{k,n}$. Para o segundo item, observamos

$$2V_{k,\mathrm{n}+1} - 3V_{k,\mathrm{n}} = 2\begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} - 3\begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} \left(2\begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot I \right) = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} \left(\begin{pmatrix} 4 & 2k \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right) =$$

$\begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = S_{k,0} V_{k,1}{}^{n} = S_{k,n}$. Finalmente, para o terceiro item, usaremos a definição para desenvolver o produto indicado $S_{k,\mathrm{n}+1}{}^{2} = S_{k,\mathrm{n}+1} \cdot S_{k,\mathrm{n}+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} = \mathrm{S}_{k,0} V_{k,1} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} \mathrm{S}_{k,0} V_{k,1} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} = (\mathrm{S}_{k,0} V_{k,1})^{2} \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2n}$$

$= S_{k,1}{}^{2} \cdot V_{k,2\mathrm{n}}$. . Em seguida, podemos ver ainda, decorrente dos resultados anteriores, que

$S_{k,2n+1} = S_{k,0}V_{k,1}{}^{2n+1} = S_{k,0}V_{k,1}{}^{2n}V_{k,1} = S_{k,0}V_{k,1}{}^{n}\cdot V_{k,1}{}^{n}\cdot V_{k,1} = S_{k,0}V_{k,1}{}^{n}\cdot V_{k,1}{}^{n+1} = V_{k,1}{}^{n}\left(S_{k,0}V_{k,1}{}^{n+1}\right) = V_{k,n}S_{k,n+1}$.
Para o último item, vejamos que $S_{k,2n} = S_{k,0}V_{k,1}{}^{2n} = (S_{k,0}V_{k,1}{}^{n})\cdot V_{k,1}{}^{n} = V_{k,n}\left(S_{k,n}\right)$ □

Teorema 6: Para todo inteiro positivo $n \geq 1$, temos que $S_{k,n} = \begin{pmatrix} R_{k,n+1} & k\cdot R_{k,n} \\ R_{k,n} & k\cdot R_{k,n-1} \end{pmatrix} = S_{k,0}V_{k,n}$.

Prova. Decorre imediatamente do teorema 2.

Teorema 7: Para todo inteiro positivo $m,n \geq 1$, temos que $S_{k,n+m} = S_{k,n}V_{k,m} = V_{k,n}S_{k,m}$.
Prova. Basta observar que $S_{k,n+m} = S_{k,0}V_{k,n+m} = (S_{k,0}V_{k,n})V_{k,m} = S_{k,n}V_{k,m}$. Por outro lado, temos também que $S_{k,n+m} = S_{k,0}V_{k,n+m} = S_{k,0}V_{k,n}V_{k,m} = (S_{k,0}V_{k,m})V_{k,n} = V_{k,n}(S_{k,0}V_{k,m}) = V_{k,n}S_{k,m}$ □

Observamos que todas propriedades abordadas na presente seção envolveram índices inteiros positivos. Doravante, veremos um processo de extensão ao campo dos índices inteiros negativos, objetivando a generalização de alguns dos teoremas abordados na presente seção.

4 Propriedades comutativas correspondentes aos índices inteiros negativos

De modo preliminar, vamos analisar o comportamento das seguintes potências matriciais que consideramos $\begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-n}$, para $n \geq 0$: $V_{k,1}{}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{k} & -\frac{2}{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k\left(\frac{1}{k}\right) \\ \frac{1}{k} & k\left(-\frac{2}{k^2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{k,0} & k\cdot P_{k,-1} \\ P_{k,-1} & k\cdot P_{k,-2} \end{pmatrix}$,

$$V_{k,1}{}^{-2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & -\frac{2}{k} \\ -\frac{2}{k^2} & \frac{4+k}{k^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & k\left(-\frac{2}{k}\right) \\ -\frac{2}{k^2} & \frac{4+k}{k^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{k,-1} & k\cdot P_{k,-2} \\ P_{k,-2} & k\cdot P_{k,-3} \end{pmatrix},\ V_{k,1}{}^{-3} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{k^2} & \frac{4+k}{k^2} \\ \frac{4+k}{k^3} & -\frac{4(2+k)}{k^3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{k^2} & k\left(\frac{4+k}{k^3}\right) \\ \frac{4+k}{k^3} & k\left(-\frac{4(2+k)}{k^4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{k,-2} & k\cdot P_{k,-3} \\ P_{k,-3} & k\cdot P_{k,-4} \end{pmatrix},$$

$$V_{k,1}{}^{-4} = \begin{pmatrix} \frac{4+k}{k^3} & -\frac{4(2+k)}{k^3} \\ -\frac{4(2+k)}{k^4} & \frac{k^2+12k+16}{k^4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4+k}{k^3} & k\left(-\frac{4(2+k)}{k^4}\right) \\ -\frac{4(2+k)}{k^4} & k\left(\frac{k^2+12k+16}{k^5}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{k,-3} & k\cdot P_{k,-4} \\ P_{k,-4} & k\cdot P_{k,-5} \end{pmatrix},$$

$$V_{k,1}^{-5}=\begin{pmatrix} -\frac{4(2+k)}{k^4} & \frac{k^2+12k+16}{k^4} \\ \frac{k^2+12k+16}{k^5} & -\frac{2(3k^2+16k+16)}{k^5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{4(2+k)}{k^4} & k\left(\frac{k^2+12k+16}{k^5}\right) \\ \frac{k^2+12k+16}{k^5} & k\left(-\frac{2(3k^2+16k+16)}{k^6}\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_{k,-4} & k\cdot P_{k,-5} \\ P_{k,-5} & k\cdot P_{k,-6} \end{pmatrix},$$

$$V_{k,1}^{-6}=\begin{pmatrix} -\frac{k^2+12k+16}{k^5} & -\frac{2(3k^2+16k+16)}{k^5} \\ -\frac{2(3k^2+16k+16)}{k^6} & \frac{k^3+24k^2+80k+64}{k^6} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{k^2+12k+16}{k^5} & k\left(-\frac{2(3k^2+16k+16)}{k^6}\right) \\ -\frac{2(3k^2+16k+16)}{k^6} & k\left(\frac{k^3+24k^2+80k+64}{k^7}\right) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} P_{k,-5} & k\cdot P_{k,-6} \\ P_{k,-6} & k\cdot P_{k,-7} \end{pmatrix}, \text{ etc.}$$

Nesses exemplos podemos constatar que ocorrem elementos da sequência k-Pell do tipo $P_{k,-n}$, com $n\geq 0$. Tais elementos podem ser determinados, por exemplo, diretamente da recorrência $P_{k,n+1}=2P_{k,n}+kP_{k,n-1}$. Por exemplo, podemos determinar que: $P_{k,-1}=\frac{1}{k}$, $P_{k,-2}=-\frac{2}{k^2}$, $P_{k,-3}=\frac{k+4}{k^3}$, $P_{k,-4}=-\frac{4(k+2)}{k^4}$, $P_{k,-5}=\frac{k^2+12k+16}{k^5}$, $P_{k,-6}=-\frac{2(3k^2+16k+16)}{k^6}$,

$P_{k,-7}=\frac{k^3+24k^2+80k+64}{k^7}$, $P_{k,-8}=-\frac{8(k^3+10k^2+24k+16)}{k^8}$,

$P_{k,-9}=\frac{k^4+40k^3+240k^2+448k+256}{k^9}$,

$P_{k,-10}=-\frac{2(5k^4+80k^3+336k^2+512k+256)}{k^{10}}$, etc.

Para prosseguir, vamos definir as seguintes novas matrizes, para $n\geq 0$: $V_{k,-n}=\begin{pmatrix} P_{k,-\mathrm{n}+1} & k\cdot P_{k,-\mathrm{n}} \\ P_{k,-\mathrm{n}} & k\cdot P_{k,-\mathrm{n}-1} \end{pmatrix}$, $S_{k,-n}=\begin{pmatrix} R_{k,-\mathrm{n}+1} & k\cdot R_{k,-\mathrm{n}} \\ R_{k,-\mathrm{n}} & k\cdot R_{k,-\mathrm{n}-1} \end{pmatrix}$. No teorema 8 descreveremos uma fórmula para a determinação dos elementos da sequência k-Pell, com índices negativos.

Teorema 8: Para todo inteiro positivo $n\geq 1$, temos a igualdade $V_{k,-\mathrm{n}}=\begin{pmatrix} P_{k,-n+1} & k\cdot P_{k,-n} \\ P_{k,-n} & k\cdot P_{k,-n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_{k,-(n-1)} & k\cdot P_{k,-n} \\ P_{k,-n} & k\cdot P_{k,-(n+1)} \end{pmatrix}=\left(V_{k,1}{}^{n}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-n}=\left(V_{k,1}{}^{-1}\right)^{n}$.

A partir da matriz $V_{k,n}=\begin{pmatrix} P_{k,\mathrm{n}+1} & k\cdot P_{k,\mathrm{n}} \\ P_{k,\mathrm{n}} & k\cdot P_{k,\mathrm{n}-1} \end{pmatrix}$, iremos realizar a substituição do índice 'n' por '$-n$' e determinar a seguinte matriz $V_{k,-n}=\begin{pmatrix} P_{k,-(n-1)} & k\cdot P_{k,-\mathrm{n}} \\ P_{k,-\mathrm{n}} & k\cdot P_{k,-(\mathrm{n}+1)} \end{pmatrix}$. Antes de realizar a demonstração do teorema 8 que envolve uma propriedade não discutida por Wani, Badshah, Rathore e Catarino (2019), consideraremos o seguinte lema.

Lema 1: A fórmula de Binnet para a sequência k-Pell é descrita por $P_{k,n} = \dfrac{a^n - b^n}{a-b}$, com equação característica $x^2 - 2x - k = 0$, cujas raízes são dadas por $a = 1+\sqrt{1+k}$ e $b = 1-\sqrt{1+k}$.

Prova. O leitor pode consultar o trabalho de Wani, Badshah, Rathore e Paula (2019).

Lema 2: Para todo $n \geq 0$, podemos determinar que $P_{k,-n} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{k^n} P_{k,n}$.

Prova. De imediato, a partir do Lema 1, vamos considerar a seguinte substituição $P_{k,-n} = \dfrac{a^{-n} - b^{-n}}{a-b}$. Em seguida, vamos recordar que $a = 1+\sqrt{1+k}$ e $b = 1-\sqrt{1+k}$, para os quais valem as relações $a \cdot b = -k, a+b = 2$. Daí, podemos verificar que $-\dfrac{a}{k} = \dfrac{1}{b}$ ou $-\dfrac{b}{k} = \dfrac{1}{a}$. Retomando a expressão

$$P_{k,-n} = \frac{a^{-n} - b^{-n}}{a-b} = \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^n - \left(\frac{1}{b}\right)^n}{a-b} = \frac{\left(-\frac{b}{k}\right)^n - \left(-\frac{a}{k}\right)^n}{a-b} = \frac{\frac{(-1)^n b^n}{k^n} - \frac{(-1)^n a^n}{k^n}}{a-b}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{k^n}\left(\frac{a^n - b^n}{a-b}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{k^n} P_{k,n} \; \square$$

Vejamos, agora, a demonstração do Teorema 8 com o arrimo dos lemas 1 e 2.

Prova. Vejamos que $V_{k,-n} = \begin{pmatrix} P_{k,-n+1} & k \cdot P_{k,-n} \\ P_{k,-n} & k \cdot P_{k,-n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{k,-(n-1)} & k \cdot P_{k,-n} \\ P_{k,-n} & k \cdot P_{k,-(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{k^{n-1}} P_{k,n-1} & k \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{k^n} P_{k,n} \\ \frac{(-1)^{n+1}}{k^n} P_{k,n} & k \cdot \frac{(-1)^{n+2}}{k^{n+1}} P_{k,n+1} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} k\frac{(-1)^n}{k^n} P_{k,n-1} & -k \cdot \frac{(-1)^n}{k^n} P_{k,n} \\ -\frac{(-1)^n}{k^n} P_{k,n} & \frac{(-1)^n}{k^n} P_{k,n+1} \end{pmatrix} = (-1)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{k^n} kP_{k,n-1} & -\frac{1}{k^n} kP_{k,n} \\ -\frac{1}{k^n} P_{k,n} & \frac{1}{k^n} P_{k,n+1} \end{pmatrix} = \frac{(-1)^n}{k^n}\begin{pmatrix} k \cdot P_{k,n-1} & -k \cdot P_{k,n} \\ -P_{k,n} & P_{k,n+1} \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, sabemos que $\det V_{k,1}{}^n = \det\begin{pmatrix} P_{k,\mathrm{n}+1} & k \cdot P_{k,\mathrm{n}} \\ P_{k,\mathrm{n}} & k \cdot P_{k,\mathrm{n}-1} \end{pmatrix} = (-1)^n k^n$. Segue que: $V_{k,-n} =$

$$= \frac{(-1)^n(-1)^n}{(-1)^n k^n}\begin{pmatrix} k \cdot P_{k,n-1} & -k \cdot P_{k,n} \\ -P_{k,n} & P_{k,n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det V_{k,n}}\begin{pmatrix} k \cdot P_{k,n-1} & -P_{k,n} \\ -k \cdot P_{k,n} & P_{k,n+1} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} P_{k,\mathrm{n}+1} & k \cdot P_{k,\mathrm{n}} \\ P_{k,\mathrm{n}} & k \cdot P_{k,\mathrm{n}-1} \end{pmatrix}^{-1} = (V_{k,n})^{-1}$$

$$= \left(V_{k,1}{}^n\right)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-n} = \left[\begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\right]^n \; \square$$

Agora, vejamos uma versão do teorema 4 para índices negativos.

Teorema 9: Para todos inteiros $m, n \geq 1$, vale que $V_{k,-(\mathrm{m}+n)} = V_{k,-\mathrm{m}} V_{k,-n} = V_{k,-n} V_{k,-\mathrm{m}}$.

Prova. Decorre, a partir do teorema 8, podemos escrever a seguinte matriz $V_{k,-(\mathrm{n+m})} = \begin{pmatrix} P_{k,-(n+m)+1} & k \cdot P_{k,-(n+m)} \\ P_{k,-(n+m)} & k \cdot P_{k,-(n+m)-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{k,-(n+m-1)} & k \cdot P_{k,-(n+m)} \\ P_{k,-(n+m)} & k \cdot P_{k,-(n+m+1)} \end{pmatrix} = \left(V_{k,1}{}^{n+m}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-(n+m)} = \left(V_{k,1}{}^{-1}\right)^{n+m}$.

Agora, vemos que $V_{k,-(\mathrm{m}+n)} = \left(V_{k,1}{}^{-1}\right)^{n+m} = \left(V_{k,1}{}^{-1}\right)^{n}\left(V_{k,1}{}^{-1}\right)^{m} = \left(V_{k,1}{}^{-1}\right)^{m}\left(V_{k,1}{}^{-1}\right)^{n} = V_{k,-\mathrm{m}}V_{k,-n}$. De forma semelhante, vemos que $V_{k,-(\mathrm{m}+n)} = \left(V_{k,1}{}^{-1}\right)^{n+m} = \left(V_{k,1}{}^{-1}\right)^{n}\left(V_{k,1}{}^{-1}\right)^{m} = V_{k,-n}V_{k,-\mathrm{m}}$ □

Vamos apenas enunciar o teorema que corresponde à fórmula de Binnet para a sequência generalizada de Fibonacci. Maiores detalhes podem ser vistos no trabalho de Wani, Badshah, Rathore e Catarino (2019).

Teorema 10: Para todos inteiros $n \geq 1$, vale a fórmula de Binnet $R_{k,n} = \left(\frac{1-2b}{a-b}\right)a^n + \left(\frac{2a-1}{a-b}\right)b^n$, onde a,b são as raízes da equação característica $x^2 - 2x - k = 0$, cujas raízes são $a = 1+\sqrt{1+k}$ e $b = 1-\sqrt{1+k}$.
Prova. O leitor pode consultar o trabalho de Wani; Badshah; Rathore e Catarino (2019).

Teorema 11: Para todos os inteiros $n \geq 1$, vale a fórmula de Binnet $R_{k,-n} = \frac{(-1)^n}{k^n}\left[\left(\frac{1-2b}{a-b}\right)b^n + \left(\frac{2a-1}{a-b}\right)a^n\right]$, onde a,b são as raízes da equação característica $x^2 - 2x - k = 0$, cujas raízes são $a = 1+\sqrt{1+k}$ e $b = 1-\sqrt{1+k}$.
Prova. Realizaremos a substituição do índice 'n' por '$-n$' e escreveremos a expressão $R_{k,-n} = \left(\frac{1-2b}{a-b}\right)a^{-n} + \left(\frac{2a-1}{a-b}\right)b^{-n} = \left(\frac{1-2b}{a-b}\right)\left(\frac{1}{a}\right)^n + \left(\frac{2a-1}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b}\right)^n$. Agora, recordamos as seguintes relações $a \cdot b = -k$ ou $\frac{1}{a} = -\frac{b}{k}$ e $\frac{1}{b} = -\frac{a}{k}$. Dessa forma, veremos que podemos escrever

$$R_{k,-n} = \left(\frac{1-2b}{a-b}\right)\left(\frac{1}{a}\right)^n + \left(\frac{2a-1}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b}\right)^n = \left(\frac{1-2b}{a-b}\right)\left(-\frac{b}{k}\right)^n + \left(\frac{2a-1}{a-b}\right)\left(-\frac{a}{k}\right)^n = \frac{1}{k^n}\left[\left(\frac{1-2b}{a-b}\right)(-b)^n + \left(\frac{2a-1}{a-b}\right)(-a)^n\right]$$
$$= \frac{(-1)^n}{k^n}\left[\left(\frac{1-2b}{a-b}\right)b^n + \left(\frac{2a-1}{a-b}\right)a^n\right] \square$$

O teorema 11 permite, precisamente, determinar os elementos originários da definição 1 com índices inteiros negativos. O comportamento expresso pela fórmula acima é desconsiderado pelos autores Wani, Badshah, Rathore e Catarino (2019). Ademais, os autores verificam a seguinte igualdade $R_{k,n} = 2P_{k,n+1} - 3P_{k,n}$, para $n \geq 0$. No próximo resultado, verificaremos que a mesma se verifica para índices inteiros negativos, ou seja, para os números ou elementos do tipo $R_{k,-n}$ e $P_{k,-n}$, com $n \geq 1$.

Teorema 12: Para todos inteiros $n \geq 1$, vale a identidade $R_{k,-n} = 2 \cdot P_{k,-n+1} - 3 \cdot P_{k,-n}$.
Prova. Para $n \geq 1$, podemos observar diretamente do lema 2 acima que temos $2P_{k,-n+1} - 3P_{k,-n} = 2P_{k,-(\mathrm{n}-1)} - 3P_{k,-n} = 2\left(\frac{(-1)^n}{k^{n-1}}P_{k,n-1}\right) - 3\left(\frac{(-1)^{n+1}}{k^n}P_{k,n}\right) = 2\frac{(-1)^n}{k^{n-1}}P_{k,n-1} - 3\frac{(-1)^{n+1}}{k^n}P_{k,n}$

$$= 2 \cdot \frac{(-1)^n}{k^{n-1}}P_{k,n-1} + 3 \cdot \frac{(-1)^n}{k^n}P_{k,n} = 2\frac{(-1)^n}{k^{n-1}}\left(\frac{a^{n-1} - b^{n-1}}{a-b}\right) + 3\frac{(-1)^n}{k^n}\left(\frac{a^n - b^n}{a-b}\right) =$$

$$=\left[2k\frac{(-1)^n}{k^n}\left(\frac{a^{n-1}-b^{n-1}}{a-b}\right)+3\frac{(-1)^n}{k^n}\left(\frac{a^n-b^n}{a-b}\right)\right]=\frac{(-1)^n}{k^n}\left[\frac{2ka^{n-1}-2kb^{n-1}+3a^n-3b^n}{a-b}\right]=$$

$$=\frac{(-1)^n}{k^n}\left[\frac{2k\cdot a^{n-1}-2k\cdot b^{n-1}+3a^n-3b^n}{a-b}\right]=\frac{(-1)^n}{k^n}\left[\frac{2ka^{n-1}+3a^n-3b^n-2kb^{n-1}}{a-b}\right]=$$

$$=\frac{(-1)^n}{k^n}\left[\frac{3a^n+2(-ab)a^{n-1}-3b^n-2(-ab)b^{n-1}}{a-b}\right]=\frac{(-1)^n}{k^n}\left[\frac{3a^n-2ba^n-3b^n+2ab^n}{a-b}\right]$$

$$=\frac{(-1)^n}{k^n}\left[\frac{(2ab^n-3b^n)+(3a^n-2ba^n)}{a-b}\right]=\frac{(-1)^n}{k^n}\left[\frac{(2a-3)}{a-b}b^n+\frac{(3-2b)}{a-b}a^n\right]$$. Por outro lado, podemos verificar que $2a-3=2(2-b)-3=4-2b-3=1-2b$ e que, ocorre também que $3-2b=3-2(2-a)=-1+2a=2a-1$. Assim, a expressão anterior, pode ser reescrita da forma: $2P_{k,-n+1}-3P_{k,-n}=\frac{(-1)^n}{k^n}\left[\frac{(2a-3)}{a-b}b^n+\frac{(3-2b)}{a-b}a^n\right]=\frac{(-1)^n}{k^n}\left[\frac{(1-2b)}{a-b}b^n+\frac{(2a-1)}{a-b}a^n\right]$.

$=R_{k,-n}$, com $n\geq 1$□

Antes de abordar o teorema seguinte, vejamos alguns exemplos que permitem determinar os elementos da sequência generalizada de Fibonacci, com índices negativos. Para tanto, vamos tomar o seguinte produto matricial $(V_{k,1})^{-n}S_{k,0}=\begin{pmatrix}2 & k\\1 & 0\end{pmatrix}^{-n}\begin{pmatrix}1 & 2k\\2 & -3\end{pmatrix}$, com $n\geq 1$. Assim, podemos encontrar que:

$$(V_{k,1})^{-1}S_{k,0}=\begin{pmatrix}2 & k\\1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2k\\2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & k\left(-\frac{3}{k}\right)\\-\frac{3}{k} & k\left(\frac{2k+6}{k^2}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{k,0} & kR_{k,-1}\\R_{k,-1} & kR_{k,-2}\end{pmatrix},$$

$$(V_{k,1})^{-2}S_{k,0}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{k} & k\left(\frac{2k+6}{k^2}\right)\\\frac{2k+6}{k^2} & k\left(-\frac{7k+12}{k^3}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{k,-1} & kR_{k,-2}\\R_{k,-2} & kR_{k,-3}\end{pmatrix},\ (V_{k,1})^{-3}S_{k,0}=\begin{pmatrix}\frac{2k+6}{k^2} & k\left(-\frac{7k+12}{k^3}\right)\\-\frac{7k+12}{k^3} & k\left(\frac{2(k^2+10k+12)}{k^4}\right)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}R_{k,-2} & kR_{k,-3}\\R_{k,-3} & kR_{k,-4}\end{pmatrix},\ (V_{k,1})^{-4}S_{k,0}=\begin{pmatrix}-\frac{7k+12}{k^3} & k\left(\frac{2(k^2+10k+12)}{k^4}\right)\\\frac{2(k^2+10k+12)}{k^4} & k\left(-\frac{11k^2+52k+48}{k^5}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{k,-3} & kR_{k,-4}\\R_{k,-4} & kR_{k,-5}\end{pmatrix},\ (V_{k,1})^{-5}S_{k,0}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{2(k^2+10k+12)}{k^4} & k\left(-\frac{11k^2+52k+48}{k^5}\right)\\-\frac{11k^2+52k+48}{k^4} & k\left(\frac{2(k^3+21k^2+64k+48)}{k^5}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{k,-4} & kR_{k,-5}\\R_{k,-5} & kR_{k,-6}\end{pmatrix},$$ etc. Reparemos que os elementos do tipo $R_{k,-n}$, com $n\geq 1$, podem ser determinados pela recorrência indicada na definição 1, escrevendo-a da forma $R_{k,-n-1}=\frac{R_{k,-n+1}-2R_{k,-n}}{k}$. A partir disso, definiremos a

seguinte matriz $S_{k,-n}=\begin{pmatrix} R_{k,-\text{n}+1} & k\cdot R_{k,-\text{n}} \\ R_{k,-\text{n}} & k\cdot R_{k,-\text{n}-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R_{k,-(n-1)} & k\cdot R_{k,-\text{n}} \\ R_{k,-\text{n}} & k\cdot R_{k,-(n+1)}\end{pmatrix}$, para $n\geq 1$. Antes, porém, vejamos o cálculo da matriz inversa que indicamos $S_{k,n}{}^{-1}=\begin{pmatrix} R_{k,\text{n}+1} & k\cdot R_{k,\text{n}} \\ R_{k,\text{n}} & k\cdot R_{k,\text{n}-1}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\det S_{k,n}}\begin{pmatrix} k\cdot R_{k,\text{n}-1} & -R_{k,\text{n}} \\ -k\cdot R_{k,\text{n}} & R_{k,\text{n}+1}\end{pmatrix}^{T}=$ $\frac{1}{(3+4k)(-1)^n k^{n+1}}\begin{pmatrix} k\cdot R_{k,\text{n}-1} & -k\cdot R_{k,\text{n}} \\ -R_{k,\text{n}} & R_{k,\text{n}+1}\end{pmatrix}$. Iremos agora comparar e relacionar o comportamento das matrizes indicadas por $\left(S_{k,n}\right)^{-1}$ e $S_{k.-n}$, para $n\geq 1$.

Teorema 13: Para todo inteiro $n\geq 1$, vale $S_{k,-n}=(V_{k,1})^{-n}S_{k,0}=S_{k,0}(V_{k,1})^{-n}$.

Prova. A partir da definição $S_{k,n}=\begin{pmatrix} R_{k,\text{n}+1} & k\cdot R_{k,\text{n}} \\ R_{k,\text{n}} & k\cdot R_{k,\text{n}-1}\end{pmatrix}$, consideraremos a seguinte matriz $S_{k,-n}=\begin{pmatrix} R_{k,-\text{n}+1} & k\cdot R_{k,-\text{n}} \\ R_{k,-\text{n}} & k\cdot R_{k,-\text{n}-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R_{k,-(n-1)} & k\cdot R_{k,-\text{n}} \\ R_{k,-\text{n}} & k\cdot R_{k,-(n+1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2P_{k,-(n-2)}-3P_{k,-(n-1)} & k\cdot(2P_{k,-n+1}-3P_{k,-n}) \\ 2P_{k,-n+1}-3P_{k,-n} & k\cdot(2P_{k,-n}-3P_{k,-(n+1)})\end{pmatrix}$.

Por outro lado, a partir do teorema 8, sabemos que $V_{k,-\text{n}}=\begin{pmatrix} P_{k,-(n-1)} & k\cdot P_{k,-n} \\ P_{k,-n} & k\cdot P_{k,-(n+1)}\end{pmatrix}=\left(V_{k,1}{}^{n}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-n}$.

E, da mesma forma, podemos escrever ainda a seguinte matriz $V_{k,-(n-1)}=\begin{pmatrix} P_{k,-(n-1-1)} & k\cdot P_{k,-(n-1)} \\ P_{k,-(n-1)} & k\cdot P_{k,-(n-1+1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_{k,-(n-2)} & k\cdot P_{k,-(n-1)} \\ P_{k,-(n-1)} & k\cdot P_{k,-n}\end{pmatrix}=\left(V_{k,1}{}^{n-1}\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-(n-1)}$. Assim, realizando as substituições convenientes, vem que: $S_{k,-n}=\begin{pmatrix} R_{k,-(n-1)} & k\cdot R_{k,-\text{n}} \\ R_{k,-\text{n}} & k\cdot R_{k,-(n+1)}\end{pmatrix}=$

$$=\left(2\begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-n+1}-3\begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-n}\right)=\begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-n}\left(2\begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0\end{pmatrix}-3I\right)=\begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-n}\left[\begin{pmatrix} 4 & 2k \\ 2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3\end{pmatrix}\right]=$$

$=\begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-n}\begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 2 & -3\end{pmatrix}=(V_{k,1})^{-n}S_{k,0}=S_{k,0}(V_{k,1})^{-n}$, para todo $n\geq 1$. Aqui, recordamos a igualdade $\mathrm{S}_{k,0}V_{k,1}=V_{k,1}\mathrm{S}_{k,0}$ e $\mathrm{S}_{k,0}V_{k,1}{}^{-1}=V_{k,1}{}^{-1}\mathrm{S}_{k,0}$ □

A partir do teorema 13, vejamos os seguintes corolários.

Corolário 1: Para todo inteiro $n\geq 1$, vale que $\left(\mathrm{S}_{k,\text{n}}\right)^{-1}=S_{k,0}{}^{-1}S_{k,-n}S_{k,0}{}^{-1}$.

Prova. A partir do teorema 12, sabemos que $S_{k,-n}=(V_{k,1})^{-n}S_{k,0}=S_{k,0}(V_{k,1})^{-n}$. Por outro lado, podemos ainda escrever $\mathrm{S}_{k,\text{n}}=\mathrm{S}_{k,0}V_{k,1}{}^{n}$, com origem no Teorema 2. De imediato, determinamos que $\mathrm{S}_{k,\text{n}}{}^{-1}=\left(\mathrm{S}_{k,0}V_{k,1}{}^{n}\right)^{-1}=\left(V_{k,1}{}^{n}\right)^{-1}\mathrm{S}_{k,0}{}^{-1}=V_{k,1}{}^{-n}\mathrm{S}_{k,0}{}^{-1}$, pelo Teorema 8. Assim, vemos que $\mathrm{S}_{k,\text{n}}{}^{-1}=V_{k,1}{}^{-n}\mathrm{S}_{k,0}{}^{-1}=\left(S_{k,0}{}^{-1}S_{k,-n}\right)\mathrm{S}_{k,0}{}^{-1}=S_{k,0}{}^{-1}S_{k,-n}S_{k,0}{}^{-1}$ e segue o resultado □

Corolário 2: Para todos os inteiros $m,n\geq 1$, valem as seguintes relações: (i) $\left(\mathrm{S}_{k,\mathrm{n}}\right)^{-m}=\left(\mathrm{S}_{k,\mathrm{n}}{}^{-1}\right)^{m}=S_{k,0}{}^{-m}(V_{k,1})^{-(m\cdot n)}$; (ii) $\left(\mathrm{S}_{k,\mathrm{n}}\right)^{-n}=S_{k,0}{}^{-n}(V_{k,1})^{-n^2}$.

Prova. Vamos considerar o seguinte produto $\left(\mathrm{S}_{k,\mathrm{n}}\right)^{-2}=S_{k,0}{}^{-1}S_{k,-n}S_{k,0}{}^{-1}S_{k,0}{}^{-1}S_{k,-n}S_{k,0}{}^{-1}$. Todavia, sabemos que $S_{k,-n}=(V_{k,1})^{-n}S_{k,0}=S_{k,0}(V_{k,1})^{-n}$. Assim, substituindo na expressão anterior, segue que $\left(\mathrm{S}_{k,\mathrm{n}}\right)^{-2}=S_{k,0}{}^{-1}(V_{k,1})^{-n}S_{k,0}S_{k,0}{}^{-1}S_{k,0}{}^{-1}(V_{k,1})^{-n}S_{k,0}S_{k,0}{}^{-1}=S_{k,0}{}^{-1}(V_{k,1})^{-n}S_{k,0}{}^{-1}(V_{k,1})^{-n}=S_{k,0}{}^{-2}(V_{k,1})^{-2n}$. No caso que tomarmos o produto $\left(\mathrm{S}_{k,\mathrm{n}}\right)^{-2}=S_{k,0}{}^{-1}S_{k,-n}S_{k,0}{}^{-1}S_{k,0}{}^{-1}S_{k,-n}S_{k,0}{}^{-1}S_{k,0}{}^{-1}S_{k,-n}S_{k,0}{}^{-1}=$ $=S_{k,0}{}^{-1}(V_{k,1})^{-n}S_{k,0}S_{k,0}{}^{-1}S_{k,0}{}^{-1}(V_{k,1})^{-n}S_{k,0}S_{k,0}{}^{-1}S_{k,0}{}^{-1}(V_{k,1})^{-n}S_{k,0}S_{k,0}{}^{-1}=S_{k,0}{}^{-1}(V_{k,1})^{-n}S_{k,0}{}^{-1}(V_{k,1})^{-n}S_{k,0}{}^{-1}(V_{k,1})^{-n}$ $=S_{k,0}{}^{-3}(V_{k,1})^{-3n}$. Assim, observamos que encontramos $\left(\mathrm{S}_{k,\mathrm{n}}\right)^{-2}=\left(\mathrm{S}_{k,\mathrm{n}}{}^{-1}\right)^{2}=S_{k,0}{}^{-2}(V_{k,1})^{-2n}$ e $\left(\mathrm{S}_{k,\mathrm{n}}\right)^{-3}=\left(\mathrm{S}_{k,\mathrm{n}}{}^{-1}\right)^{3}=S_{k,0}{}^{-3}(V_{k,1})^{-3n}$. Por indução matemática, vamos admitir que $\left(\mathrm{S}_{k,\mathrm{n}}\right)^{-m}=\left(\mathrm{S}_{k,\mathrm{n}}{}^{-1}\right)^{m}=S_{k,0}{}^{-m}(V_{k,1})^{-(m\cdot n)}$. Em seguida, basta ver que $\left(\mathrm{S}_{k,\mathrm{n}}\right)^{-(\mathrm{m}+1)}=\left(\mathrm{S}_{k,\mathrm{n}}{}^{-1}\right)^{m+1}=$ $\left(\mathrm{S}_{k,\mathrm{n}}{}^{-1}\right)^{m}\left(\mathrm{S}_{k,\mathrm{n}}{}^{-1}\right)=\left(S_{k,0}{}^{-m}(V_{k,1})^{-(m\cdot n)}\right)\left(S_{k,0}{}^{-1}S_{k,-n}S_{k,0}{}^{-1}\right)=S_{k,0}{}^{-m}(V_{k,1})^{-(m\cdot n)}S_{k,0}{}^{-1}S_{k,-n}S_{k,0}{}^{-1}=$ $=S_{k,0}{}^{-m}(V_{k,1})^{-(m\cdot n)}S_{k,0}{}^{-1}(V_{k,1})^{-n}S_{k,0}S_{k,0}{}^{-1}=S_{k,0}{}^{-m}(V_{k,1})^{-(m\cdot n)}S_{k,0}{}^{-1}(V_{k,1})^{-n}=S_{k,0}{}^{-(m+1)}(V_{k,1})^{-(m\cdot n+n)}=$ $=S_{k,0}{}^{-(m+1)}(V_{k,1})^{-((m\cdot+1)n)}$. Para o item (ii), basta ver que se tomarmos $m=n$ e, desde que, vale que $\left(\mathrm{S}_{k,\mathrm{n}}\right)^{-n}=\left(\mathrm{S}_{k,\mathrm{n}}{}^{-1}\right)^{n}=S_{k,0}{}^{-n}(V_{k,1})^{-(\mathrm{n}\cdot n)}=S_{k,0}{}^{-n}(V_{k,1})^{-n^2}$ □

Finalmente, vejamos a propriedade comutativa correspondente para índices negativos.

Corolário 3: Para todos inteiros $m,n\geq 1$, valem as seguintes relações: (i) $S_{k,-(n+m)}S_{k,0}=S_{k,-n}S_{k,-m}=S_{k,-m}S_{k,-n}$; (ii) $S_{k,-(n+1)}{}^{2}=S_{k,-1}{}^{2}V_{k,-2n}$; (iii) $S_{k,-n}{}^{2}=S_{k,0}{}^{2}V_{k,-2n}$.

Prova. Cabem observar as seguintes relações de comutatividade $V_{k,1}{}^{-1}S_{k,0}=S_{k,0}V_{k,1}{}^{-1}$ e $V_{k,1}{}^{-1}S_{k,0}{}^{-1}=S_{k,0}{}^{-1}V_{k,1}{}^{-1}$. Usaremos o Teorema 12, para escrever que ocorre $S_{k,-(n+m)}S_{k,0}=$ $S_{k,0}S_{k,0}(V_{k,1})^{-(n+m)}=S_{k,0}(V_{k,1})^{-n}S_{k,0}(V_{k,1})^{-m}=S_{k,-n}S_{k,-m}=S_{k,0}(V_{k,1})^{-m}S_{k,0}(V_{k,1})^{-n}=S_{k,-m}S_{k,-n}$. Para verificar o segundo item, vejamos que $S_{k,-(n+1)}{}^{2}=S_{k,-(n+1)}S_{k,-(n+1)}=(V_{k,1})^{-(n+1)}S_{k,0}(V_{k,1})^{-(n+1)}S_{k,0}$ $=(V_{k,1})^{-n}(V_{k,1})^{-1}S_{k,0}(V_{k,1})^{-n}(V_{k,1})^{-1}S_{k,0}=(S_{k,0}(V_{k,1})^{-1})(S_{k,0}(V_{k,1})^{-1})(V_{k,1})^{-2n}=S_{k,-1}{}^{2}(V_{k,1})^{-2n}$ $S_{k,-1}{}^{2}V_{k,-2n}$. Para concluir, vejamos mais uma $S_{k,-n}{}^{2}=S_{k,-n}S_{k,-n}=S_{k,0}(V_{k,1})^{-n}S_{k,0}(V_{k,1})^{-n}=$ $S_{k,0}{}^{2}(V_{k,1})^{-2n}=S_{k,0}{}^{2}V_{k,-2n}$, para todo $n\geq 1$□

Para concluir, discutiremos algumas propriedades matriciais que permitem a descrição de matrizes determinadas por Quatérnions generalizados de Fibonacci e Quatérnions de k-Pell. Veremos que as potências geradoras $\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n$ e $\begin{pmatrix}1 & 2k\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n$ se mostram invariantes nas correspondentes representações.

.

5 Propriedades matriciais e Quatérnions

Na seção atual, consideraremos algumas propriedades elementares sobre um Quatérnion e abordamos as seguintes definições.

Definição 5: Um Quatérnion $q = p_0 + p_1\vec{i} + p_2\vec{j} + p_3\vec{k}$, em que $\{1, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ representa a base canônica e os coeficientes $p_0, p_1, p_2, p_3 \in IR$, sujeitos à seguinte regras formais $\vec{i}^2 = -1 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \cdot \vec{i} = -\vec{k}$.

Definiremos, pois, um Quatérnion generalizado de Fibonacci. Cabe observar que a mesma foi introduzida pela primeira vez por Horadam (1963). E, no caso da definição de uma Quatérnion de Pell, sugerimos ao leitor consultar o trabalho de Catarino e Campos (2018).

Definição 6: Para $k \in IR^+$, definiremos um Quatérnion generalizado de Fibonacci, de ordem n, descrito pela relação $QR_{k,n} = R_{k,n} + R_{k,n-1}\vec{i} + R_{k,n-1}\vec{j} + R_{k,n-1}\vec{k}$.

Definição 7: Para $k \in IR^+$, definiremos um k-Quatérnion de Pell, de ordem n, descrito pela relação $QP_{k,n} = P_{k,n} + P_{k,n-1}\vec{i} + P_{k,n-1}\vec{j} + P_{k,n-1}\vec{k}$

Iremos considerar, agora, as seguintes matrizes descritas a partir das últimas definições: $QV_{k,n} = \begin{pmatrix} QP_{k,\mathrm{n}+1} & k \cdot QP_{k,\mathrm{n}} \\ QP_{k,\mathrm{n}} & k \cdot QP_{k,\mathrm{n}-1} \end{pmatrix}$ e $QS_{k,n} = \begin{pmatrix} QR_{k,\mathrm{n}+1} & k \cdot QR_{k,\mathrm{n}} \\ QR_{k,\mathrm{n}} & k \cdot QR_{k,\mathrm{n}-1} \end{pmatrix}$. No teorema seguinte, apresentaremos uma útil decomposição simplificada para tais matrizes.

Teorema 14: Para todo inteiro $n \geq 1$, valem as relações: (i) $QV_{k,n} = \begin{pmatrix} 2 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \left[V_{k,0} + V_{k,-1}\vec{i} + V_{k,-2}\vec{j} + V_{k,-3}\vec{k} \right]$ ou $QV_{k,n} = \begin{pmatrix} P_{k,n+1} & k \cdot P_{k,n} \\ P_{k,n} & k \cdot P_{k,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} QP_{k,1} & k \cdot QP_{k,0} \\ QP_{k,0} & k \cdot QP_{k,-1} \end{pmatrix}$; (ii) $QS_{k,n} = V_{k,1}{}^n \left[S_{k,0} + S_{k,-1}\vec{i} + S_{k,-2}\vec{j} + S_{k,-3}\vec{k} \right]$ ou $QS_{k,n} = \begin{pmatrix} P_{k,n+1} & k \cdot P_{k,n} \\ P_{k,n} & k \cdot P_{k,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} QR_{k,1} & k \cdot QR_{k,0} \\ QR_{k,0} & k \cdot QR_{k,-1} \end{pmatrix}$.

Prova. A partir da definição $QV_{k,n} = \begin{pmatrix} QP_{k,\mathrm{n}+1} & k \cdot QP_{k,\mathrm{n}} \\ QP_{k,\mathrm{n}} & k \cdot QP_{k,\mathrm{n}-1} \end{pmatrix}$, consideraremos a matriz $QV_{k,n} =$

$$\begin{pmatrix} QP_{k,\mathrm{n}+1} & k \cdot QP_{k,\mathrm{n}} \\ QP_{k,\mathrm{n}} & k \cdot QP_{k,\mathrm{n}-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{k,n+1} + P_{k,n}\vec{i} + P_{k,n-1}\vec{j} + P_{k,n-2}\vec{k} & k \cdot (P_{k,n} + P_{k,n-1}\vec{i} + P_{k,n-1}\vec{j} + P_{k,n-1}\vec{k}) \\ P_{k,n} + P_{k,n-1}\vec{i} + P_{k,n-1}\vec{j} + P_{k,n-1}\vec{k} & k \cdot (P_{k,n-1} + P_{k,n-2}\vec{i} + P_{k,n-3}\vec{j} + P_{k,n-4}\vec{k}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P_{k,n+1} + P_{k,n}\vec{i} + P_{k,n-1}\vec{j} + P_{k,n-2}\vec{k} & k \cdot (P_{k,n} + P_{k,n-1}\vec{i} + P_{k,n-1}\vec{j} + P_{k,n-1}\vec{k}) \\ P_{k,n} + P_{k,n-1}\vec{i} + P_{k,n-1}\vec{j} + P_{k,n-1}\vec{k} & k \cdot (P_{k,n-1} + P_{k,n-2}\vec{i} + P_{k,n-3}\vec{j} + P_{k,n-4}\vec{k}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} P_{k,n+1} & k \cdot P_{k,n} \\ P_{k,n} & k \cdot P_{k,n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{k,n} & k \cdot P_{k,n-1} \\ P_{k,n-1} & k \cdot P_{k,n-2} \end{pmatrix}\vec{i} + \begin{pmatrix} P_{k,n-1} & k \cdot P_{k,n-2} \\ P_{k,n-2} & k \cdot P_{k,n-3} \end{pmatrix}\vec{j} + \begin{pmatrix} P_{k,n-2} & k \cdot P_{k,n-3} \\ P_{k,n-3} & k \cdot P_{k,n-4} \end{pmatrix}\vec{k} =$$

$$=\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n}+\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-1}\vec{i}+\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-2}\vec{j}+\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-3}\vec{k}=\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\vec{i}+\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-2}\vec{j}+\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-3}\vec{k}\right].$$

Dessa forma, podemos tomar $QV_{k,n}=\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n}\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\vec{i}+\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-2}\vec{j}+\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-3}\vec{k}\right]$ ou ainda $QV_{k,n}=\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n}\left[V_{k,0}+V_{k,-1}\vec{i}+V_{k,-2}\vec{j}+V_{k,-3}\vec{k}\right]$. De forma semelhante, vejamos que

$$QS_{k,n}=\begin{pmatrix}QR_{k,\mathrm{n}+1} & k\cdot QR_{k,\mathrm{n}}\\ QR_{k,\mathrm{n}} & k\cdot QR_{k,\mathrm{n}-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{k,n+1}+R_{k,n}\vec{i}+R_{k,n-1}\vec{j}+R_{k,n-2}\vec{k} & k\cdot(R_{k,n}+R_{k,n-1}\vec{i}+R_{k,n-1}\vec{j}+R_{k,n-1}\vec{k})\\ R_{k,n}+R_{k,n-1}\vec{i}+R_{k,n-1}\vec{j}+R_{k,n-1}\vec{k} & k\cdot(R_{k,n-1}+R_{k,n-2}\vec{i}+R_{k,n-3}\vec{j}+R_{k,n-4}\vec{k})\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}R_{k,n+1} & k\cdot R_{k,n}\\ R_{k,n} & k\cdot R_{k,n-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}R_{k,n} & k\cdot R_{k,n-1}\\ R_{k,n-1} & k\cdot R_{k,n-2}\end{pmatrix}\vec{i}+\begin{pmatrix}R_{k,n-1} & k\cdot R_{k,n-2}\\ P_{k,n-2} & k\cdot R_{k,n-3}\end{pmatrix}\vec{j}+\begin{pmatrix}R_{k,n-2} & k\cdot R_{k,n-3}\\ R_{k,n-3} & k\cdot R_{k,n-4}\end{pmatrix}\vec{k}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2k\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n}+\begin{pmatrix}1 & 2k\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-1}\vec{i}+\begin{pmatrix}1 & 2k\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-2}\vec{j}+\begin{pmatrix}1 & 2k\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-3}\vec{k}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2k\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n}\left[I+\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}\vec{i}+\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-2}\vec{j}+\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-3}\vec{k}\right]=\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n}\begin{pmatrix}1 & 2k\\ 2 & -3\end{pmatrix}\left[I+(V_{k,1})^{-1}\vec{i}+(V_{k,1})^{-2}\vec{j}+(V_{k,1})^{-3}\vec{k}\right]$$

$$=\begin{pmatrix}2 & k\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n}\left[\begin{pmatrix}1 & 2k\\ 2 & -3\end{pmatrix}I+\begin{pmatrix}1 & 2k\\ 2 & -3\end{pmatrix}(V_{k,1})^{-1}\vec{i}+\begin{pmatrix}1 & 2k\\ 2 & -3\end{pmatrix}(V_{k,1})^{-2}\vec{j}+\begin{pmatrix}1 & 2k\\ 2 & -3\end{pmatrix}(V_{k,1})^{-3}\vec{k}\right]=$$

$=V_{k,1}{}^{n}\left[S_{k,0}+S_{k,0}(V_{k,1})^{-1}\vec{i}+S_{k,0}(V_{k,1})^{-2}\vec{j}+S_{k,0}(V_{k,1})^{-3}\vec{k}\right]=V_{k,1}{}^{n}\left[S_{k,0}+S_{k,-1}\vec{i}+S_{k,-2}\vec{j}+S_{k,-3}\vec{k}\right]$, para todo $n\geq 1$□

Vejamos, em seguida, o comportamento dos determinantes correspondentes.

Teorema 15: Para todo inteiro $n\geq 1$, vale:

(i) $\det QV_{k,n}=(-1)^{n}k^{n+1}\left(\left(\left(\frac{1-t+t^{2}+t^{3}}{t^{4}}\right)-\frac{2(t^{2}+1)}{t^{4}}\vec{i}+\frac{2(t^{2}+2t+2)}{t^{4}}\vec{j}-\frac{4(t+2)}{t^{4}}\vec{k}\right)\right)$;

(ii) $\det QS_{k,n}=(3+4k)(-1)^{n}k^{n+1}\det(\mathrm{QS}_{k,1})$, em que, temos a expressão $\det(\mathrm{QS}_{k,1})$

$$=\left(-\left(\frac{3+t-t^{2}+7t^{3}+4t^{4}}{t^{4}}\right)+\frac{2(4t^{3}+3t^{2}+4t+3)}{t^{4}}\vec{i}-\frac{2(4t^{3}+11t^{2}+14t+6)}{t^{4}}\vec{j}+\frac{4(4t^{2}+11t+6)}{t^{4}}\vec{k}\right).$$

Prova. De modo preliminar, vamos avaliar o seguinte determinante indicado logo abaixo por

$$\det\begin{pmatrix}QP_{k,1} & k\cdot QP_{k,0}\\ QP_{k,0} & k\cdot QP_{k,-1}\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1+0\vec{i}+\frac{1}{t}\vec{j}-\frac{2}{t^{2}}\vec{k} & k\cdot(0+\frac{1}{t}\vec{i}-\frac{2}{t^{2}}\vec{j}+\frac{(4+t)}{t^{3}}\vec{k})\\ 0+\frac{1}{t}\vec{i}-\frac{2}{t^{2}}\vec{j}+\frac{(4+t)}{t^{3}}\vec{k} & k\cdot(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^{2}}\vec{i}+\frac{(4+t)}{t^{3}}\vec{j}-\frac{(4t+8)}{t^{4}}\vec{k}\end{pmatrix}=$$

$=\left(\frac{1-t+t^{2}+t^{3}}{t^{4}}\right)-\frac{2(t^{2}+1)}{t^{4}}\vec{i}+\frac{2(t^{2}+2t+2)}{t^{4}}\vec{j}-\frac{4(t+2)}{t^{4}}\vec{k}$. Pelo teorema 12, sabemos que

$\det QV_{k,n}=\det\begin{pmatrix}P_{k,n+1} & k\cdot P_{k,n}\\ P_{k,n} & k\cdot P_{k,n-1}\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}QP_{k,1} & k\cdot QP_{k,0}\\ QP_{k,0} & k\cdot QP_{k,-1}\end{pmatrix}=(-1)^{n}k^{n+1}\left(QP_{k,1}QP_{k,-1}-QP_{k,0}{}^{2}\right)$ e, assim, segue o item (i). Para o segundo item, vejamos, em seguida, o comportamento do seguinte determinante $\det\begin{pmatrix} R_{k,n+1} & k\cdot R_{k,n} \\ R_{k,n} & k\cdot R_{k,n-1}\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} QR_{k,1} & k\cdot QR_{k,0} \\ QR_{k,0} & k\cdot QR_{k,-1}\end{pmatrix} = (3+4k)(-1)^n k^{n+1}\left(QR_{k,1}QR_{k,-1} - QR_{k,0}{}^2\right)$.

Mas reparemos que podemos verificar, diretamente, que: $\det\begin{pmatrix} QR_{k,1} & k\cdot QR_{k,0} \\ QR_{k,0} & k\cdot QR_{k,-1}\end{pmatrix} = \det(\mathrm{QS}_{k,1}) =$

$$\det\begin{pmatrix} 1+2\vec{i}-\frac{3}{t}\vec{j}+\frac{2(t+3)}{t^2}\vec{k} & k\cdot(2-\frac{3}{t}\vec{i}+\frac{2(t+3)}{t^2}\vec{j}-\frac{(7t+12)}{t^3}\vec{k}) \\ 2-\frac{3}{t}\vec{i}+\frac{2(t+3)}{t^2}\vec{j}-\frac{(7t+12)}{t^3}\vec{k} & k\cdot(-\frac{3}{t}+\frac{2(t+3)}{t^2}\vec{i}+-\frac{(7t+12)}{t^3}\vec{j}+\frac{2(t^2+10t+12)}{t^4}\vec{k})\end{pmatrix}$$

$$=\left(-\left(\frac{3+t-t^2+7t^3+4t^4}{t^4}\right)+\frac{2(4t^3+3t^2+4t+3)}{t^4}\vec{i}-\frac{2(4t^3+11t^2+14t+6)}{t^4}\vec{j}+\frac{4(4t^2+11t+6)}{t^4}\vec{k}\right)\square$$

No teorema seguinte estabeleceremos uma fórmula para a determinar o comportamento das seguintes matrizes $QV_{k,-n} = \begin{pmatrix} QP_{k,-\mathrm{n}+1} & k\cdot QP_{k,-\mathrm{n}} \\ QP_{k,-\mathrm{n}} & k\cdot QP_{k,-\mathrm{n}-1}\end{pmatrix}$ e $QS_{k,-n} = \begin{pmatrix} QR_{k,-\mathrm{n}+1} & k\cdot QR_{k,-\mathrm{n}} \\ QR_{k,-\mathrm{n}} & k\cdot QR_{k,-\mathrm{n}-1}\end{pmatrix}$, para todo inteiro $n \geq 1$.

Teorema 16: Para todo inteiro $n \geq 1$, vale:

(i) $QV_{k,-n} = V_{k,1}{}^{-n}\left[V_{k,0}+V_{k,-1}\vec{i}+V_{k,-2}\vec{j}+V_{k,-3}\vec{k}\right]$; (ii) $QS_{k,-n} = V_{k,1}{}^{-n}\left[S_{k,0}+S_{k,-1}\vec{i}+S_{k,-2}\vec{j}+S_{k,-3}\vec{k}\right]$;

(iii) $QV_{k,n}{}^{-1} = \dfrac{1}{k\left(QP_{k,1}QP_{k,-1}-QP_{k,0}{}^2\right)}\begin{pmatrix} k\cdot QP_{k,-1} & -k\cdot QP_{k,0} \\ -QP_{k,0} & QP_{k,1}\end{pmatrix}\left(V_{k,1}{}^{-1}\right)^n$;

(iv) $QS_{k,n}{}^{-1} = \dfrac{1}{k\left(QR_{k,1}QR_{k,-1}-QR_{k,0}{}^2\right)}\begin{pmatrix} k\cdot QR_{k,-1} & -k\cdot QR_{k,0} \\ -QR_{k,0} & QR_{k,1}\end{pmatrix}\left(V_{k,1}{}^{-1}\right)^n$.

Prova. Pelo teorema 12, conhecemos a seguinte decomposição para $QV_{k,n} = V_{k,1}{}^n\left[V_{k,0}+V_{k,-1}\vec{i}+V_{k,-2}\vec{j}+V_{k,-3}\vec{k}\right]$ e $QS_{k,n} = V_{k,1}{}^n\left[S_{k,0}+S_{k,-1}\vec{i}+S_{k,-2}\vec{j}+S_{k,-3}\vec{k}\right]$. Podemos observar que os termos $\left[V_{k,0}+V_{k,-1}\vec{i}+V_{k,-2}\vec{j}+V_{k,-3}\vec{k}\right]$ e $\left[S_{k,0}+S_{k,-1}\vec{i}+S_{k,-2}\vec{j}+S_{k,-3}\vec{k}\right]$ correspondem a determinadas representações matriciais que não dependem do índice $n \geq 1$. Por conseguinte, realizaremos as seguintes substituições $QV_{k,-n} = V_{k,1}{}^{-n}\left[V_{k,0}+V_{k,-1}\vec{i}+V_{k,-2}\vec{j}+V_{k,-3}\vec{k}\right]$ e $QS_{k,-n} = V_{k,1}{}^{-n}\left[S_{k,0}+S_{k,-1}\vec{i}+S_{k,-2}\vec{j}+S_{k,-3}\vec{k}\right]$. Por outro lado, desde que conhecemos $QV_{k,n} = \begin{pmatrix} P_{k,n+1} & k\cdot P_{k,n} \\ P_{k,n} & k\cdot P_{k,n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} QP_{k,1} & k\cdot QP_{k,0} \\ QP_{k,0} & k\cdot QP_{k,-1}\end{pmatrix}$, temos que sua matriz inversa pode ser determinada por $QV_{k,n}{}^{-1} = \begin{pmatrix} QP_{k,1} & k\cdot QP_{k,0} \\ QP_{k,0} & k\cdot QP_{k,-1}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} P_{k,n+1} & k\cdot P_{k,n} \\ P_{k,n} & k\cdot P_{k,n-1}\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} QP_{k,1} & k\cdot QP_{k,0} \\ QP_{k,0} & k\cdot QP_{k,-1}\end{pmatrix}^{-1}\left(V_{k,n}\right)^{-1}$. Por outro lado, facilmente, sabemos que $\begin{pmatrix} QP_{k,1} & k\cdot QP_{k,0} \\ QP_{k,0} & k\cdot QP_{k,-1}\end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{k\left(QP_{k,1}QP_{k,-1}-QP_{k,0}{}^2\right)}\begin{pmatrix} k\cdot QP_{k,-1} & -k\cdot QP_{k,0} \\ -QP_{k,0} & QP_{k,1}\end{pmatrix}$.

De forma semelhante, como $QS_{k,n}=\begin{pmatrix} P_{k,n+1} & k\cdot P_{k,n} \\ P_{k,n} & k\cdot P_{k,n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} QR_{k,1} & k\cdot QR_{k,0} \\ QR_{k,0} & k\cdot QR_{k,-1} \end{pmatrix}$, teremos a seguinte matriz inversa $QS_{k,n}{}^{-1}=\begin{pmatrix} QR_{k,1} & k\cdot QR_{k,0} \\ QR_{k,0} & k\cdot QR_{k,-1} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} P_{k,n+1} & k\cdot P_{k,n} \\ P_{k,n} & k\cdot P_{k,n-1} \end{pmatrix}^{-1}$. De forma semelhante, determinaremos que $QS_{k,n}{}^{-1}=\frac{1}{k\left(QR_{k,1}QR_{k,-1}-QR_{k,0}{}^{2}\right)}\begin{pmatrix} k\cdot QR_{k,-1} & -k\cdot QR_{k,0} \\ -QR_{k,0} & QR_{k,1} \end{pmatrix}\left(V_{k,1}{}^{-1}\right)^{n}$.

Seguem os resultados ☐

6 Referências

CATARINO, P.; CAMPOS, H. A note on Gaussian modified Pell numbers. **Jornal of Information and Optimization Sciences**, v. 39, n. 6, p. 1363-1371, 2018.

HORADAM, A. F. Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions. **Americal Mathematical Monthly**, v. 70, n. 3, p. 289-291, 1963.

WANI, A. A.; BADSHAH, V. H.; RATHORE, G. P. S.; CATARINO, P. Generalized Fibonacci and k-Pell matrix sequences. **Journal of Mathematics**, v. 51, n. 1, p. 17-28, 2019.