

ISSN 2316-9664 Volume 17, fev. 2020 Edição Ermac Iniciação Científica

Micaeli Mendola Theodoro

Faculdade de Ciências UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" micaelitheodoro@gmail.com

Rubens de Figueiredo Camargo

Faculdade de Ciências UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" rubens.camargo@unesp.br

Um estudo sobre as soluções da equação logística fracionária

A study about the solutions of fractional logistic equation

Resumo

O presente trabalho faz uma comparação qualitativa entre a solução numérica da equação logística fracionária e a solução analítica da equação logística fracionária em sua forma linear. Os resultados obtidos evidenciam a não equivalência entre as soluções, mas possuem um comportamento bastante similar. **Palavras-chave:** Cálculo Fracionário. Matemática Aplicada. Equação Logística. Equação Logística Fracionária.

Abstract

The present work makes a qualitative comparison between the numerical solution of the fractional logistic equation and the analytical solution of the fractional logistic equation in its linear form. The results show that the solutions are not the same, but have a very similar behavior.

Keywords: Fractional Calculus. Applied Math. Logistic Equation. Fractional Logistic Equation.



1 Introdução

O presente artigo se trata da versão completa do trabalho apresentado no VI ERMAC (THEO-DORO; CAMARGO, 2019).

Apesar do assim chamado cálculo fracionário¹ (CF) ter alcançado maior notoriedade entre o século XX e XXI por conta da sua aplicabilidade e aperfeiçoamento de alguns modelos matemáticos, o nascimento do CF, curiosamente, tem data exata, 30 de setembro de 1695 em uma carta de Leibniz endereçada a l'Hôpital questionando sobre como generalizar o conceito de derivada inteira para uma ordem arbitrária, l'Hôpital respondeu com uma outra pergunta, no caso particular da derivada de ordem meio. "Em uma audaciosa e profética resposta, Leibniz apresenta o resultado e afirma: isto é, aparentemente, um paradoxo que um dia vai gerar várias consequências importantes."(CAMARGO; OLIVEIRA, 2015). Esta troca de correspondências é, para a maioria da comunidade científica, o início do CF.

Vários matemáticos e pesquisadores de ciências aplicadas vem obtendo resultados e generalizações importantes a partir da modelagem de processos reais através do CF (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015).

Considerando uma equação diferencial que descreve um fenômeno específico, uma maneira comum de usar a modelagem fracionária, isto é, a modelagem feita a partir de equações diferenciais de ordem não inteira, é substituir as derivadas de ordem inteira por derivadas não inteiras, geralmente com ordem menor ou igual a ordem das derivadas originais, para que a solução usual pode ser recuperado como um caso particular (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015).

Embora não exista uma interpretação física e geométrica trivial para a derivada fracionária e a integral fracionária, as equações diferenciais de ordem fracionária estão naturalmente relacionadas aos sistemas com memória, uma vez que as derivadas fracionárias geralmente não são operadores locais, *i.e*, calcular a derivada fracionária no tempo em algum momento requer todo o anterior. Os processos com memória existem em muitos sistemas biológicos (EL-SAYED; RIDA; ARAFA, 2009). Além disso, a equação diferencial fracionária pode nos ajudar a reduzir os erros decorrentes dos parâmetros negligenciados na modelagem usual (MAINARDI, 2009).

Na engenharia, existem várias aplicações de CF (SABATIER; AGRAWAL; MACHADO, 2007), por exemplo, no estudo de sistemas dinâmicos e de controle (MATIGNON, 1996). Além disso, na física, existem várias aplicações potenciais de derivada fracionária (HILFER, 2000), por exemplo, na generalização das equações clássicas.

A modelagem fracionária, usando a derivada de Caputo, foi usada recentemente para generalizar a equação logística. A partir do fato de que a referida equação diferencial é do tipo Bernoulli, considerando-se a versão linearizada da equação obteve-se, através da metodologia da transformada de Laplace, a solução da equação diferencial fracionária associada e mostrou-se que esta equação fornece uma descrição adequada para o crescimento de certos tipos de tumor de câncer (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015).

No cálculo usual (de ordem inteira), é imediato verificar que a solução da equação logística obtida pelo método de Bernoulli equivale à solução da equação original, mas para o caso fracionário esta verificação não é observada, devido ao fato que a regra da cadeia não é válida para o CF. Desta forma, o objetivo central deste trabalho é analisar qualitativamente a solução numérica obtida em (EL-SAYED; EL-MESIRY; EL-SAKA, 2007) para a equação logística fracionária em sua forma usual com a solução para equação logística fracionária dada em sua versão linear. O Trabalho está disposto da seguinte maneira: Na Seção de introdução fizemos um apanhado geral do CF e

¹O nome mais preciso para este ramo da matemática é *Cálculo de Ordem Não Inteira*, visto que as derivadas podem ter ordens reais e até mesmo complexas.



dos funções especiais mais utilizadas que foram importantes para a solução da equação logística fracionária, além da definição de derivada de Caputo e o cálculo das transformadas de Laplace que serão utilizadas na metodologia das transformadas integrais para resolver as EDF.

2 Preliminares

2.1 Função de Gel'fand-Shilov

De fundamental importância para a definição da integral de ordem-arbitrária de Riemann-Liouville, a função Gel'fand-Shilov é definida, a partir dos coeficientes da série de Taylor, para $n \in \mathbb{N}$, como

$$\phi_n(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{se } t \ge 0\\ 0, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Desta forama, nos casos em que $Re(v) \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}_{-}$.

$$\phi_{\nu}(t) = \begin{cases} \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}, & \text{se } t \ge 0\\ 0, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$
 (1)

2.1.1 Transformada de Laplace da função Gel'fand-Shilov

Vamos calcular agora a transformada de Laplace da Função de Gel'fand-Shilov assumindo t>0 e Re $(v)\in\mathbb{C}-\mathbb{Z}_-$.

$$\mathcal{L}[\phi_{v}(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{t^{v-1}}{\Gamma(v)}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{v-1}}{\Gamma(v)} e^{-st} dt = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_{0}^{+\infty} t^{v-1} e^{-st} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(v)} \int_{0}^{+\infty} \left(\frac{u}{s}\right)^{v-1} e^{-u} \frac{du}{s} = \frac{1}{\Gamma(v)s^{v}} \int_{0}^{+\infty} u^{v-1} e^{-u} du =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(v)s^{v}} \Gamma(v) = \frac{1}{s^{v}} = s^{-v}.$$

2.2 Funções de Mittag-Leffler

Em uma EDO(equação diferencial ordinária), linear e de coeficientes constantes a solução tem a forma de uma função exponencial, já em uma equação diferencial de ordem não inteira, linear e com coeficientes constantes, a solução é dada, na maior parte dos casos, em termos das chamadas funções de Mittag-Leffler, que generalizam a função exponencial, tanto por tê-la como caso particular com pelo fato de que a derivada de Caputo da função de Mittag-Leffler é o múltipla dela mesma.

Definição 2.1 Função de Mittag-Leffler

A função $E_{\alpha}(z)$ é complexa, pois depende de um parâmetro $\alpha \in \mathbb{C}$, com $\text{Re}(\alpha) > 0$ é dada pela seguinte série:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$
 (2)



Como dito anteriormente, consideramos a Função de Mittag-Leffler a generalização da função exponencial, pois quando admitimos o parâmetro $\alpha = 1$, retorna-se a função exponencial:

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

Definição 2.2 Função de Mittag-Leffler com dois parâmetros

A Função complexa $E_{\alpha,\beta}(z)$ possui dois parâmetros complexos α e β , com $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$ e $\operatorname{Re}(\beta) > 0$ é definida como:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}.$$
 (3)

Generalizando a Função de Mittag-Leffler de um parâmetro, basta admitir $\beta = 1$, e retornamos a função com um parâmetro $E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$.

2.2.1 Transformada de Laplace da função de Mittag-Leffler

Vamos calcular a transformada de Laplace da Função $t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})$ para $\text{Re}(s)>0,\ \alpha>0$ e $\beta>0$.

$$\mathcal{L}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})] = \int_{0}^{\infty} e^{-st}t^{\beta-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(at^{\alpha})^{n}}{\Gamma(\alpha n + \beta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n}}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \int_{0}^{\infty} e^{-st}t^{\alpha n + \beta - 1}dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n}}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \int_{0}^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{s}\right)^{\alpha n + \beta - 1} \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n}}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{1}{s^{\alpha n}}$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-u}u^{\alpha n + \beta - 1}du = \frac{1}{s^{\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n}}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \frac{1}{s^{\alpha n}} \Gamma(\alpha n + \beta) = \frac{1}{s^{\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{s^{\alpha}}\right)^{n}.$$

Temos que caso $\left|\frac{a}{s^{\alpha}}\right| < 1$ temos uma Progressão Geométrica convergente. Então:

$$\mathcal{L}[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(at^{\alpha})] = \frac{1}{s^{\beta}} \frac{1}{1 - \frac{a}{s^{\alpha}}} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha} - a}.$$

2.3 Integral fracionária

A integral de ordem n é o produto de convolução da Função de Gel'fand-Shilov com a f(t) integrável.

$$I^{n}f(t) = \phi_{n}(t) * f(t) = \int_{0}^{t} \phi_{n}(t-\tau)f(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}f(\tau)d\tau.$$



2.4 Derivada de Caputo

Definição 2.3 Seja f(t), uma função, na qual a derivada de ordem n seja integrável, com $\alpha \in \mathbb{C}$ com $\text{Re}(\alpha) > 0$, definimos a Derivada de Caputo como:

$$D^{\alpha} f(t) = I^{n-\alpha} D^n f(t). \tag{4}$$

De modo que $n - 1 < \text{Re}(\alpha) \le n$.

Vamos adentrar no caso particular de $f(t) = t^0 = 1$:

$$D^{\alpha} f(t) = I^{n-\alpha} D^n 1 = I^{n-\alpha} 0 = \phi_{n-\alpha} * 0 = 0.$$

Então, como podemos observar no caso da derivada de Caputo, quando admitimos f(t) uma constante o resultado da derivada é nula, como no caso clássico.

2.4.1 Transformada de Laplace da Derivada de Caputo

Agora vamos calcular a transformada de Laplace da derivada de Caputo, sendo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n-1 < \mathrm{Re} \leq n$.

$$\mathcal{L}[D^{\alpha}f(t)] = \mathcal{L}[I^{n-\alpha}D^{n}f(t)] = \mathcal{L}[\phi_{n-\alpha} * D^{n}f(t)] = \mathcal{L}[\phi_{n-\alpha}(t)]\mathcal{L}[D^{n}f(t)] =$$

$$= s^{\alpha-n} \left[s^{n}F(s) - \sum_{j=0}^{n-1} s^{j} \left[\left(\frac{d^{n-1-j}}{dt^{n-1-j}}(0) \right) \right] \right] =$$

$$= s^{\alpha} F(s) - \left[\sum_{j=0}^{n-1} s^{\alpha - n - j} \left[\left(\frac{d^{n-1-j}}{dt^{n-1-j}}(0) \right) \right] \right].$$

3 Equação logística clássica

O modelo de Malthus(1798) é de suma importância para todos os estudos subsequentes acerca de modelagem de dinâmicas populacionais . O economista inglês foi o primeiro a tratar do crescimento populacional, fazendo algumas considerações básicas, o alimento é necessário à subsistência do ser humano e o sexo na espécie é uma constante permanente, sendo assim ele supôs que a capacidade de reprodução do ser humano é superior da produção de alimento. Desta forma, a população cresce proporcionalmente a ela mesma. Temos assim na equação (5) o Modelo de Malthus de ordem inteira (BASSANEZI, 2014),

$$\frac{dP(t)}{dt} = kP(t). ag{5}$$

A equação logística foi proposta por Verhulst(1838) avaliando as estatísticas populacionais fazendo um aperfeiçoamento no modelo de Malthus, podendo ser aplicada em outras áreas como a proliferação de doenças, pois leva em consideração fatores que possam diminuir a proliferação do vírus na população. A equação de Verhulst de ordem inteira é dada por

$$\frac{dy(t)}{dt} = ry(t)\left(1 - \frac{y(t)}{y_{max}}\right).$$



Sendo y(t) a população no instante t, r a taxa de crescimento e y_{max} o valor máximo da população. Podemos considerar a equação

$$\frac{dy(t)}{dt} = ky(t)(1 - y(t)). \tag{6}$$

4 Generalização Fracionária

Faremos uma generalização fracionária da equação (6) para isso utilizamos no modelos a derivada fracionária de Caputo ao invés da derivada de Riemann-Liouville, pois faremos a resolução pelo método das transformadas integrais. Ao calcularmos a transformada de Laplace da derivada de Riemann-Liouville geramos um resultado dependente do operador integro-diferencial de ordem não inteira da função que não possui uma interpretação trivial, já a transformada de Laplace da derivada de Caputo (como mencionado anteriormente) depende de derivadas de ordem inteira de f(0) (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015). A Equação (6) é uma equação diferencial ordinária não linear e separável. Apesar de a Equação de Verhulst ser facilmente resolvida por ser separável, não podemos afirmar o mesmo de sua versão de ordem não-inteira. Com objetivo de tornar a equação linear para que a versão fracionária possa ser resolvida através da metodologia das transformadas integrais, faremos a seguinte mudança de variável, tendo em vista que a equação é do tipo Bernoulli:

$$y(t) = z(t)^{-1}$$
 \Longrightarrow $\frac{dy(t)}{dt} = \frac{-1}{z^2} \frac{dz(t)}{dt}.$

Temos então a seguinte EDO:

$$\frac{dz(t)}{dt} = k(1 - z(t)),\tag{7}$$

que é uma EDO linear e separável:

$$\frac{dz(t)}{dt} = k(1 - z(t)) \leftrightarrow \frac{dz(t)}{1 - z(t)} = k dt \implies z(t) = 1 + \frac{1}{c}e^{-kt},$$

assim $z(0) = \frac{1}{c} + 1$, i.e, $\frac{1}{c} = \frac{1}{y(0)} - 1$, temos então a solução da equação (6):

$$y(t) = \frac{1}{1 + \left[\frac{1}{y(0)} - 1\right]e^{-kt}}$$
 (8)

4.1 Solução fracionária analítica

Ao passarmos a equação (7) para a sua generalização fracionária tomando o cuidado com a unidade de medida da constante k obtemos a seguinte equação:

$$\frac{d^{\alpha}z(t)}{dt} = k^{\alpha}(1 - z(t)). \tag{9}$$

Agora resolveremos analiticamente a equação (9), porém devemos destacar que a regra da cadeia advinda do cálculo clássico não tem validade no Cálculo de ordem não inteira (VARALTA; GOMES; CAMARGO, 2014), ou seja:

$$\frac{d^{\alpha} y(t)}{dt^{\alpha}} = \frac{d^{\alpha} (1/z(t))}{dt^{\alpha}} \neq -z(t)^{-2} \frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} z(t).$$



Mesmo sabendo desse fato resolvemos realizar os cálculos pra ver se a solução se assemelhava com a solução numérica colocada no artigo El-Sayed, El-Mesiry e El-Saka (2007).

Para encontrarmos a solução de (9) utilizamos novamente a metodologia das transformadas Integrais, lembrando que estamos utilizando derivada fracionária no sentido de Caputo, então aplicando a transformada de Laplace em (9):

$$s^{\alpha} F(s) - s^{\alpha - 1} z(0) = \frac{k^{\alpha}}{s} - k^{\alpha} F(s) \implies F(s) [s^{\alpha} + k^{\alpha}] = s^{\alpha - 1} z(0) + \frac{k^{\alpha}}{s}$$
$$F(s) = \frac{s^{\alpha - 1} z(0)}{s^{\alpha} + k^{\alpha}} + \frac{k^{\alpha}}{s(s^{\alpha} + k^{\alpha})} = \frac{s^{\alpha - 1} z(0)}{s^{\alpha} + k^{\alpha}} + k^{\alpha} \left[\frac{s^{-1}}{s^{\alpha} + k^{\alpha}} \right].$$

Aplicando agora a transformada de Laplace Inversa:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = z(0)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + k^{\alpha}}\right] + k^{\alpha}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{-1}}{s^{\alpha} + k^{\alpha}}\right] = z(0)E_{\alpha}(-(kt)^{\alpha}) + k^{\alpha}t^{\alpha}E_{\alpha,\alpha+1}(-(kt)^{\alpha}) = z(0)E_{\alpha}(-(kt)^{\alpha}) + 1 - E_{\alpha}(-(kt)^{\alpha}) = 1 + [z(0) - 1]E_{\alpha}(-(kt)^{\alpha}),$$

ou seja, a solução de z(t) é:

$$z(t) = 1 + [z(0) - 1]E_{\alpha}(-(kt)^{\alpha}). \tag{10}$$

Sabendo que y(t) = 1/z(t), temos então a solução da equação logística:

$$y(t) = \frac{1}{1 + \left[\frac{1}{y(0)} - 1\right] E_{\alpha}(-(kt)^{\alpha})}.$$
 (11)

Se não fizermos a correção da unidade de medida da constante k a solução de y(t) fica:

$$y(t) = \frac{1}{1 + \left[\frac{1}{y(0)} - 1\right] E_{\alpha}(-kt^{\alpha})}.$$
 (12)

4.2 Gráficos

Como colocado anteriormente $\frac{d^{\alpha}y(t)}{dt} \neq \frac{d^{\alpha}(1/z(t))}{dt}$ e realizamos uma comparação entre a solução analítica mesmo não tendo a equivalência da regra da cadeia clássica com a solução numérica apresentada por El-Sayed, El-Mesiry e El-Saka (2007), sendo assim produzimos os seguintes gráficos:



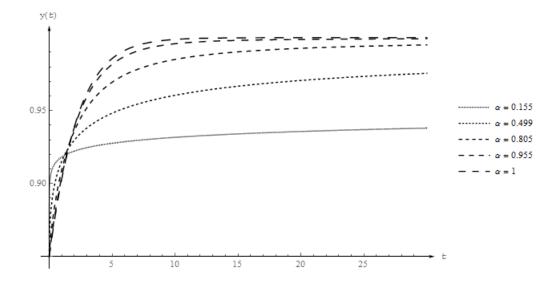


Figura 1: Construído com o Mathematica da solução da Equação (11). Tomando y(0) = 0.85, k = 0.5 e valores de α iguais ao artigo El-Sayed, El-Mesiry e El-Saka (2007).

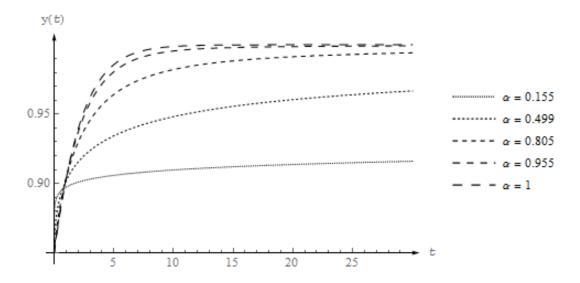


Figura 2: Construído com o Mathematica da solução da Equação (12). Tomando y(0) = 0.85, k = 0.5 e valores de α iguais ao artigo de El-Sayed, El-Mesiry e El-Saka (2007).



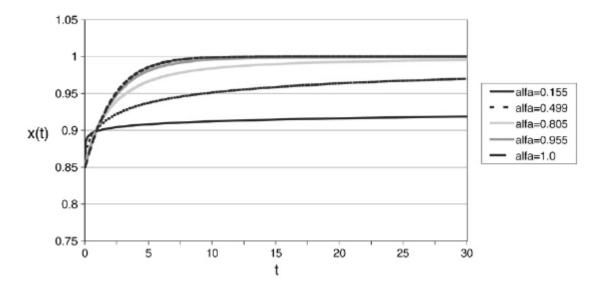


Figura 3: Produzido no artigo de El-Sayed, El-Mesiry e El-Saka (2007). Tomando y(0) = 0.85, k = 0.5.

5 Conclusões

Nesses casos analisados, a correção da unidade medida não notamos uma diferença muito significativa na análise gráfica das solução de (11) e (12).

Como colocado anteriormente a regra da cadeia não é válida para o CF, então comparamos a solução analítica com a solução numérica apresentada por El-Sayed, El-Mesiry e El-Saka (2007).

Utilizamos os mesmos parâmetros do artigo em questão, o método numérico que El-Sayed, El-Mesiry e El-Saka (2007) usa é chamado método de Adams, e ao fazermos o gráfico da solução (11) notamos ser mais parecido com a solução numérica do que utilizando (12).

Referências

- [1] BASSANEZI, R. C. Malthus e a evolução de modelos. **Ciência e Natura**, v. 36, p. 97-100, 2014. Edição especial 35 anos, v. 1.
- [2] CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. **Cálculo fracionário**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.
- [3] EL-SAYED, A. M. A.; EL-MESIRY, A. E. M.; EL-SAKA, H. A. A. On the fractional-order logistic equation. **Applied Mathematics Letters**, v. 20, n. 7, p. 817-823, 2007.
- [4] EL-SAYED, A. M. A.; RIDA, S. Z.; ARAFA, A. A. M. On the solutions of time-fractional bacterial chemotaxis in a diffusion gradient chamber. **International Journal of Nonlinear Science**, v. 7, n. 4, p. 485–492, 2009.
- [5] HILFER, R. (ed.). **Applications of fractional calculus in physics**. Singapore: World Scientific, 2000.



- [6] MAINARDI, F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. London: Imperial College Press, 2009.
- [7] MATIGNON, D. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. *In*: COMPUTATIONAL ENGINEERING IN SYSTEMS APPLICATIONS, 1996, Lille. **Proceedings** [...]. Lille: [s. n.], 1996, p. 963–968.
- [8] SABATIER, J.; AGRAWAL, O. P.; MACHADO, J. A. T. (ed.). **Advances in fractional calculus**: theoretical developments and applications in physics and engineering. New York: Springer, 2007.
- [9] THEODORO, M. M.; CAMARGO, R. F. Um estudo sobre as soluções da equação logística fracionária. *In*: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMATICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 6., 2019, Bauru. Caderno de trabalhos completos e resumos [...]. Bauru: Unesp, Faculdade de Ciencias, 2019. p. 514-515. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/departamentos/matematica/eventos2341/ermac-2019/caderno-detrabalhos-e-resumos/. Acesso em: 10 jan. 2020.
- [10] VARALTA, N.; GOMES, A. V.; CAMARGO, R. F. A prelude to the fractional calculus applied to tumor dynamic. **TEMA**, v. 15 n. 2, p. 211-221, 2014.