Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 17, fev. 2020
Edição Ermac

As infinitas trincas pitagóricas de Euclides

The infinitely many Euclid's pythagorean triples

Alessandro Firmiano de Jesus
Divisão de Ensino
Academia da Força Aérea-AFA
firmianoafj@fab.mil.br

João Paulo Martins dos Santos
Divisão de Ensino
Academia da Força Aérea-AFA
jp2@usp.br

Maurício Evandro Eloy
Divisão de Ensino
Academia da Força Aérea-AFA
eloymee@fab.mil.br

Carlos Eduardo Cardoso
Divisão de Ensino
Academia da Força Aérea-AFA
cardosocec@fab.mil.br

Resumo

Todo $a \in \mathbb{N}$ é cateto na trinca pitagórica $a^2 + b^2 = c^2$, pois, os números ímpares são associados às trincas com a hipotenusa $c = b+1$ e os números pares constituem trincas em que $c = b+2$. Neste artigo, o caso $a = 2n + 1$ foi subdividido em categorias conforme o seu dígito final $d = 1, 3, 5, 7$ ou 9 para obter cinco fórmulas fechadas da respectiva hipotenusa $c = C^d(n)$ que satisfaça $C^{d_1}(n + 1) = C^{d_2}(-n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ e $d_1 + d_2 = 10$. Após certo ordenamento, progressões aritméticas foram identificadas no comportamento das hipotenusas $c = b + 1$ e $c = b + 2$. E ainda, generalizando para $c = b + k$, critérios de divisibilidade e fórmulas fechadas foram empregados na construção de todas as possíveis trincas pitagóricas para cada valor de $a \geqslant 3$. O uso da programação Python e de seus visualizadores foi útil para revelar dispersões gráficas de (a, b), sugerir testes originais de primalidade do cateto a e identificar padrões interessantes do parâmetro k nas hipotenusas sobre a sequência de Fibonacci.
Palavras-chave: Matemática discreta. Padrões pitagóricos. Fórmula fechada. Teoria dos números.

Abstract

Every $a \in \mathbb{N}$ is a leg in the Pythagorean triple $a^2 + b^2 = c^2$, as odd values form the triples with hypotenuse $c = b + 1$, and even values form the triples with $c = b + 2$. In this article, the case $a = 2n + 1$ is subdivided into categories according to its final digit $d = 1, 3, 5, 7$ or 9, leading to five closed formulas for the respective hypotenuse $c = C^d(n)$ satisfying $C^{d_1}(n + 1) = C^{d_2}(-n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ and $d_1 + d_2 = 10$. After proper ordering, arithmetic progressions were identified in the behavior of the hypotenuses $c = b + 1$ and $c = b + 2$. Also, generalizing to $c = b + k$, divisibility criteria and closed formulas were employed to construct all possible Pythagorean triples for each value of $a \geqslant 3$. Python programming and graphical visualization tools were useful for revealing graphical dispersions of (a, b), suggesting new primality tests for the leg a, and identifying interesting patterns of the parameter k in the hypotenuses over the Fibonacci sequence.
Keywords: Discrete mathematics. Pythagorean patterns. Closed formulae. Number theory.

Artigo recebido em ago. 2019 e aceito em nov. 2019

1 Introdução

Trinca Pitagórica, terno Pitagórico, trio Pitagórico ou tripla Pitagórica são terminologias para designar o conjunto de três inteiros positivos (a, b, c) tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Esta simples relação matemática causou fascínios na História da Humanidade desde os tempos mais antigos (DICKSON, 1971; LOOMIS, 1940) e até os contemporâneos (BRAZA, 2004; ECKERT, 1992; MITCHELL, 2001), devido a uma série de propriedades que ainda são extraídas sobre essas medidas intrínsecas do triângulo retângulo. Assim, a expressão pitagórica, um caso particular de equação diofantina, obteve abordagens distintas por vários períodos: Egito Antigo, babilônico, Grécia Antiga, contando com as contribuições de matemáticos Hindus e do Islã. Uma das abordagens ainda vigente nos dias atuais é uma fórmula de dois parâmetros, atribuída ao notável matemático Diofanto (200 d.C.), para obter valores inteiros que representam as medidas dos lados de um triângulo retângulo e dada por: $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ e $c = m^2 + n^2$, sendo m e n inteiros arbitrariamente selecionados (WEISSTEIN, 2019). Outra linha de investigação preocupou-se na estimativa da totalidade de trincas pitágoricas que poderiam ser formadas.

Segundo Singh (1997, p. 298), uma demonstração para a questão da existência de uma infinidade de trincas pitagóricas (a, b, c) foi apresentada por Euclides de Alexandria (300 a.C.) que baseou-se no fato de que a diferença de quadrados de números sucessivos, b e $b + 1$, sempre resulta em um número ímpar. Assim, para cada um dos infinitos números ímpares de quadrado perfeito, $a^2 > 1$, pode ser somado um número natural ao quadrado, b^2, resultando em outro número ao quadrado, $c^2 = (b + 1)^2$, tais como:

$$9 + 4^2 = 5^2, \quad 25 + 12^2 = 13^2, \quad 49 + 24^2 = 25^2 \quad \text{e} \quad 81 + 40^2 = 41^2$$

Essas igualdades, evidenciando que todo número ímpar pode ser cateto de uma trinca pitagórica, lançam desafios investigativos sobre a possibilidade de também haver cateto como sendo um número par. O objetivo deste trabalho é fornecer duas fórmulas fechadas, uma para associar cada número ímpar $a = 2n + 1$ a uma trinca Pitagórica na forma $(a, b, b + 1)$ e outra para associar cada número par $a = 2n$ a uma trinca Pitagórica na forma $(a, b, b + 2)$. Esse estudo sobre as trincas Pitagóricas ainda avança no sentido de obter, para cada valor do inteiro positivo a, todas as trincas na forma $(a, b, b + k)$ através de critérios de divisibilidade e fórmula fechada específica. Com a proposta desta abordagem, o artigo disponibiliza novas ferramentas para solucionar, entre outros, alguns dos problemas centenários relacionados às trincas pitagóricas e organizados por Beiler (1966, p. 109). Dentre estes, destacam-se a obtenção de trincas *primitivas* [1] ou *não primitivas* restritas a um cateto conhecido; ou a uma área de triângulo específica ou de perímetro mínimo; ou ainda, com medidas apenas em um dado intervalo finito.

Em homenagem ao antigo matemático grego, as trincas $(a, b, b + k)$ serão referenciadas como sendo trincas Pitagóricas de Euclides. A simplicidade da matemática aqui empregada, tais como, paridade de n em função de n^2, relações de recorrência, aritmética modular e divisibilidade (STILLWELL, 2002), unidos às técnicas de programação e visualização gráfica, convergiram numa metodologia robusta para disponibilizar interessantes propriedades extraídas das infinitas trincas Pitagóricas de Euclides.

[1] $mdc(a, b, c) = 1$

2 Trincas de Euclides na forma $(a, b, b+1)$

Nas trincas Pitagóricas na forma $(a, b, b+1)$, $(b+1)^2 - b^2 = a^2$, ou seja, $a^2 = 2b+1$. Assim, a é um número ímpar e $c = b+1 = \dfrac{a^2-1}{2} + 1 = \dfrac{a^2+1}{2}$ estabelece uma correspondência entre a medida a do cateto menor direto com a medida c da hipotenusa. A Tabela 1 organiza os 100 primeiros números ímpares a associados com a hipotenusa c e os valores para o cateto maior $b = c - 1$.

Tabela 1: As 100 primeiras Trincas Pitagóricas na forma $(a, b, b+1)$

ímpar	cat b	hip	P3	ímpar	cat b	hip	P3	ímpar	cat b	hip	P3	ímpar	cat b	hip	P3
1	0	**1**	**60**	51	1300	1301	560	101	5100	5101	1060	151	11400	11401	1560
3	4	**5**	**80**	53	1404	1405	580	103	5304	5305	1080	153	11704	11705	1580
5	12	**13**	**100**	55	1512	1513	600	105	5512	5513	1100	155	12012	12013	1600
7	24	**25**	**120**	57	1624	1625	620	107	5724	5725	1120	157	12324	12325	1620
9	40	**41**	**140**	59	1740	1741	640	109	5940	5941	1140	159	12640	12641	1640
11	60	61	160	61	1860	1861	660	111	6160	6161	1160	161	12960	12961	1660
13	84	85	180	63	1984	1985	680	113	6384	6385	1180	163	13284	13285	1680
15	112	113	200	65	2112	2113	700	115	6612	6613	1200	165	13612	13613	1700
17	144	145	220	67	2244	2245	720	117	6844	6845	1220	167	13944	13945	1720
19	180	181	240	69	2380	2381	740	119	7080	7081	1240	169	14280	14281	1740
21	220	221	260	71	2520	2521	760	121	7320	7321	1260	171	14620	14621	1760
23	264	265	280	73	2664	2665	780	123	7564	7565	1280	173	14964	14965	1780
25	312	313	300	75	2812	2813	800	125	7812	7813	1300	175	15312	15313	1800
27	364	365	320	77	2964	2965	820	127	8064	8065	1320	177	15664	15665	1820
29	420	421	340	79	3120	3121	840	129	8320	8321	1340	179	16020	16021	1840
31	480	481	360	81	3280	3281	860	131	8580	8581	1360	181	16380	16381	1860
33	544	545	380	83	3444	3445	880	133	8844	8845	1380	183	16744	16745	1880
35	612	613	400	85	3612	3613	900	135	9112	9113	1400	185	17112	17113	1900
37	684	685	420	87	3784	3785	920	137	9384	9385	1420	187	17484	17485	1920
39	760	761	440	89	3960	3961	940	139	9660	9661	1440	189	17860	17861	1940
41	840	841	460	91	4140	4141	960	141	9940	9941	1460	191	18240	18241	1960
43	924	925	480	93	4324	4325	980	143	10224	10225	1480	193	18624	18625	1980
45	1012	1013	500	95	4512	4513	1000	145	10512	10513	1500	195	19012	19013	2000
47	1104	1105	520	97	4704	4705	1020	147	10804	10805	1520	197	19404	19405	2020
49	1200	1201	540	99	4900	4901	1040	149	11100	11101	1540	199	19800	19801	2040

Apenas na primeira linha da Tabela 1, considere a trinca $(1, 0, \mathbf{1})$ de um triângulo retângulo degenerado. As demais linhas dessa Tabela 1 apresentam outras trincas conhecidas, tais como: $(3, 4, \mathbf{5})$, $(5, 12, \mathbf{13})$, $(7, 24, \mathbf{25})$ e $(9, 40, \mathbf{41})$. Observe que o cateto maior b será um número par e a hipotenusa c será o sucessivo número ímpar.

A primeira propriedade destacada da Tabela 1 é a seguinte:

P1. *i.* Se $a \equiv 1\ mod\ 10$, então $c \equiv 1\ mod\ 10$ (c é categoria 1).
ii. Se $a \equiv 3\ mod\ 10$, então $c \equiv 5\ mod\ 10$ (c é categoria 3).
iii. Se $a \equiv 5\ mod\ 10$, então $c \equiv 3\ mod\ 10$ (c é categoria 5).
iv. Se $a \equiv 7\ mod\ 10$, então $c \equiv 5\ mod\ 10$ (c é categoria 7).
v. Se $a \equiv 9\ mod\ 10$, então $c \equiv 1\ mod\ 10$ (c é categoria 9).

Assim, associado aos catetos a, tais que $a \equiv 1\ mod\ 10$, temos os seguintes valores c das hipotenusas na categoria 1: $(1, 61, 221, 481, 841, 1301, 1861, 2521, 3281, 4141, \cdots)$, cuja fórmula de recorrência é $c_1 = 1$ e $c_n = c_{n-1} + 60 + 100(n-2)$. A correspondente fórmula fechada é

$$C^1(n) = 50n^2 - 90n + \mathbf{41},\ n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Demonstração:

$C^1(n) = c_n = c_{n-1} + 60 + 100(n-2) = c_{n-2} + 60 + 100(n-3) + 60 + 100(n-2) = \cdots = c_1 + 60(n-1) + 100(\underbrace{(n-2) + (n-3) + \cdots + 2 + 1}_{\frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{n^2-3n+2}{2}}) = 50n^2 - 90n + 41,\ n \in \mathbb{N}.$ □

Na categoria 3, as hipotenusas $(5, 85, 265, 545, 925, 1405, 1985, 2665, 3445, 4325, 5305, \cdots)$ serão dadas por $c_1 = 5$ e $c_n = c_{n-1} + 80 + 100(n-2)$. Analogamente, demonstra-se que

$$C^3(n) = 50n^2 - 70n + \mathbf{25},\ n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Na categoria 5, as hipotenusas $(13, 113, 313, 613, 1013, 1513, 2113, 2813, 3613, 4513, \cdots)$ serão dadas por $c_1 = 13$ e $c_n = c_{n-1} + 100(n-1)$. Analogamente, demonstra-se que

$$C^5(n) = 50n^2 - 50n + \mathbf{13},\ n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Na categoria 7, as hipotenusas $(25, 145, 365, 685, 1105, 1625, 2245, 2965, 3785, 4705, \cdots)$ serão dadas por $c_1 = 25$ e $c_n = c_{n-1} + 120 + 100(n-2)$. Analogamente, demonstra-se que

$$C^7(n) = 50n^2 - 30n + \mathbf{5},\ n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Na categoria 9, as hipotenusas $(41, 181, 421, 761, 1201, 1741, 2381, 3121, 3961, 4901, \cdots)$ serão dadas por $c_1 = 41$ e $c_n = c_{n-1} + 140 + 100(n-2)$. Analogamente, demonstra-se que

$$C^9(n) = 50n^2 - 10n + \mathbf{1},\ n \in \mathbb{N} \tag{5}$$

Um fato curioso é que as funções quadráticas (1) a (5) possuem o mesmo valor do discriminante $\Delta = -100$. E ainda, nessas funções, relacionando as categoria 1 e 9 (hipotenusas de final 1) e as categoria 3 e 7 (hipotenusas de final 5), observam-se as seguintes igualdades pontuais:

$C^1(0) = \mathbf{41} = C^9(1)$, $C^3(0) = \mathbf{25} = C^7(1)$, $C^5(0) = \mathbf{13} = C^5(1)$, $C^7(0) = \mathbf{5} = C^3(1)$, $C^9(0) = \mathbf{1} = C^1(1)$. Este fato inspira a demonstração da seguinte propriedade:

P2. Se $d_1 + d_2 = 10$, então $C^{d_1}(n+1) = C^{d_2}(-n)$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração:

Sem perda de generalidade, considere o caso $d_1 = 1$. Assim, para $C^9(-n) = 50n^2 + 10n + 1$ tem-se $C^1(n+1) = 50(n+1)^2 - 90(n+1) + 41 = 50n^2 + \underbrace{100n + 50 - 90n - 90 + 41}_{10n+1} = C^9(-n)$.

□

Essa propriedade **P2.** afirma que, para obter todas as hipotenusas em $(a, b, b+1)$, as equações (1) a (5) para $n \in \mathbb{N}$, podem ser substituídas pelas equações (1), (2) e (3) para $n \in \mathbb{Z}$.

Voltando na Tabela 1, na coluna P3 o valor lido na linha j corresponde à diferença entre o valor da hipotenusa da linha $j+5$ e o valor da hipotenusa da linha j. Com as fórmulas fechadas $C^d(n)$ demonstra-se que:

P3. Os valores da coluna P3 estão em progressão aritmética, ou seja, $(C^{2i+1}(n+1) - C^{2i+1}(n)) - (C^{2i-1}(n+1) - C^{2i-1}(n)) = (C^1(n+2) - C^1(n+1)) - (C^9(n+1) - C^9(n)) = 20$ para $i = 1, 2, 3, 4$ e $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Ainda sem perda de generalidade, considere o caso $i = 1$, pois os demais casos são provados de forma análoga. Assim, aplicando as identidade **P2.** nos termos $n + 1$, segue que:
$(C^3(n+1) - C^3(n)) - (C^1(n+1) - C^1(n)) = C^7(-n) - C^3(n) - C^9(-n) + C^1(n) = (50n^2 + 30n + 5) - (50n^2 - 70n + 25) - (50n^2 + 10n + 1) + (50n^2 - 90n + 41) = 0n^2 + 0n - 20 + 40 = 20.$ □

P4. A regra de recorrência para a hipotenusa é $\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_n = c_{n-1} + 4n \end{cases}$, logo a fórmula fechada que associa todo ímpar $a = 2n + 1$ à hipotenusa $C(n)$ será dada por $C(n) = 1 + 2n + 2n^2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

$C(n) = c_n = c_{n-1} + 4n = c_{n-2} + 4(n-1) + 4n = \cdots = c_0 + 4(\underbrace{n + n - 1 + n - 2 + \cdots + 2 + 1}_{\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}})$,

logo $C(n) = 1 + 2n + 2n^2$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. □

Outra forma de obter a fórmula fechada em **P4.** seria substituir $a = 2n + 1$ na relação $c = \dfrac{a^2 + 1}{2}$, assim, $c = \dfrac{(2n+1)^2 + 1}{2} \Rightarrow C(n) = c = \dfrac{4n^2 + 4n + 2}{2} = 2n^2 + 2n + 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Este fato sugere uma abordagem direta para descrever as trincas pitagóricas na forma $(a, b, b + 2)$.

3 Trincas de Euclides na forma $(a, b, b + 2)$

Supondo a existência de trincas $(a, b, b + 2)$, fica estabelecido que $(b + 2)^2 - b^2 = 4b + 4 = a^2$, ou seja, o cateto a tem que ser um número par, logo, $b = \dfrac{a^2 - 4}{4} = \dfrac{(2n)^2 - 4}{4} = n^2 - 1$, $n \in \mathbb{N}$. Assim, enuncia-se que:

P5. Todo número par $a = 2n$ é a medida de um cateto associado à trinca pitagórica (a, b, c) com hipotenusa dada por $c = C_p(n) = n^2 + 1$ e o outro cateto $b = c - 2 = n^2 - 1$. A correspondente relação de recorrência associada à fórmula $C_p(n)$ é $\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_n = c_{n-1} + (2n - 1) \end{cases}$

Demonstração:

Para demonstrar que a relação de recorrência fornece valores de hipotenusas adicionando um número ímpar na hipotenusa anterior, considere a tripla $\left(a_n = 2n,\ b_n = c_n - 2,\ c_n = \dfrac{a_n^2 + 4}{4}\right)$ e $c_{n+1} = c_n + (2(n+1) - 1)$ para provar que é válido a igualdade $c_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}^2 + 4}{4}$. De fato,

$$c_{n+1} = c_n + (2n+1) = c_n + a_n + 1 = \frac{a_n^2 + 4}{4} + a_n + 1 = \frac{(a_{n+1} - 2)^2 + 4}{4} + (a_{n+1} - 2) + 1 \Rightarrow$$

$$c_{n+1} = \frac{a_{n+1}^2 - 4a_{n+1} + 4}{4} + 1 + a_{n+1} - 1 = \frac{a_{n+1}^2 + 4}{4}$$ □

Atribuindo $1 \leqslant n \leqslant 100$, a Tabela 2 organizará os 100 valores de $a = 2n$ relacionados aos catetos $b = n^2 - 1$ e à hipotenusas $c = b + 2$.

Tabela 2: As 100 primeiras Trincas Pitagóricas na forma $(a, b, b+2)$.

par	cat b	hip	P6	par	cat b	hip	P6	par	cat b	hip	P6	par	cat b	hip	P6
2	0	**2**	**35**	52	675	677	285	102	2600	2602	535	152	5775	5777	785
4	3	**5**	**45**	54	728	730	295	104	2703	2705	545	154	5928	5930	795
6	8	**10**	**55**	56	783	785	305	106	2808	2810	555	156	6083	6085	805
8	15	**17**	**65**	58	840	842	315	108	2915	2917	565	158	6240	6242	815
10	24	**26**	**75**	60	899	901	325	110	3024	3026	575	160	6399	6401	825
12	35	**37**	85	62	960	962	335	112	3135	3137	585	162	6560	6562	835
14	48	**50**	95	64	1023	1025	345	114	3248	3250	595	164	6723	6725	845
16	63	**65**	105	66	1088	1090	355	116	3363	3365	605	166	6888	6890	855
18	80	**82**	115	68	1155	1157	365	118	3480	3482	615	168	7055	7057	865
20	99	**101**	125	70	1224	1226	375	120	3599	3601	625	170	7224	7226	875
22	120	122	135	72	1295	1297	385	122	3720	3722	635	172	7395	7397	885
24	143	145	145	74	1368	1370	395	124	3843	3845	645	174	7568	7570	895
26	168	170	155	76	1443	1445	405	126	3968	3970	655	176	7743	7745	905
28	195	197	165	78	1520	1522	415	128	4095	4097	665	178	7920	7922	915
30	224	226	175	80	1599	1601	425	130	4224	4226	675	180	8099	8101	925
32	255	257	185	82	1680	1682	435	132	4355	4357	685	182	8280	8282	935
34	288	290	195	84	1763	1765	445	134	4488	4490	695	184	8463	8465	945
36	323	325	205	86	1848	1850	455	136	4623	4625	705	186	8648	8650	955
38	360	362	215	88	1935	1937	465	138	4760	4762	715	188	8835	8837	965
40	399	401	225	90	2024	2026	475	140	4899	4901	725	190	9024	9026	975
42	440	442	235	92	2115	2117	485	142	5040	5042	735	192	9215	9217	985
44	483	485	245	94	2208	2210	495	144	5183	5185	745	194	9408	9410	995
46	528	530	255	96	2303	2305	505	146	5328	5330	755	196	9603	9605	1005
48	575	577	265	98	2400	2402	515	148	5475	5477	765	198	9800	9802	1015
50	624	626	275	100	2499	2501	525	150	5624	5626	775	200	9999	10001	1025

De forma análoga à coluna P3 da tabela 1, essa tabela 2 apresenta a coluna P6 configurada por outra progressão aritmética $PA\{a_1 = 35, r = 10\}$, conforme enunciado na propriedade abaixo:
P6. $[C_p(n+6) - C_p(n+1)] - [C_p(n+5) - C_p(n)] = 10, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:
$C_p(n+6) - C_p(n+1) - C_p(n+5) + C_p(n) = (n+6)^2 + 1 - (n+1)^2 - 1 + (n+5)^2 - 1 + n^2 + 1 = n^2 + 12n + 36 - n^2 - 2n - 1 - n^2 - 10n - 25 + n^2 = 36 - 26 = 10, \forall n \in \mathbb{N}$. □

Resultados visualizados na Tabela 2, em conjunto com a lei de formação das hipotenusas $C_p(n)$, permitem o enunciado da seguinte propriedade:

P7.
i. Se $a \equiv 0\ mod\ 20$, então $c \equiv 1\ mod\ 10$ (c é categoria 0).
ii. Se $a \equiv \pm 2\ mod\ 20$, então $c \equiv 2\ mod\ 10$ (c é categoria 2).
iii. Se $a \equiv \pm 4\ mod\ 20$, então $c \equiv 5\ mod\ 10$ (c é categoria 4).
iv. Se $a \equiv \pm 6\ mod\ 20$, então $c \equiv 0\ mod\ 10$ (c é categoria 6).
v. Se $a \equiv \pm 8\ mod\ 20$, então $c \equiv 7\ mod\ 10$ (c é categoria 8).
vi. Se $a \equiv 10\ mod\ 20$, então $c \equiv 6\ mod\ 10$ (c é categoria 10).

Demonstração:
Se $a = 20n \Rightarrow c = (10n)^2 + 1 = 100n^2 + 1$, ou seja, $c \equiv 1\ mod\ 10,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.
Se $a = 20n \pm 2 \Rightarrow c = (10n \pm 1)^2 + 1 = 100n^2 \pm 20n + 2$, ou seja, $c \equiv 2\ mod\ 10,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.
Se $a = 20n \pm 4 \Rightarrow c = (10n \pm 2)^2 + 1 = 100n^2 \pm 40n + 5$, ou seja, $c \equiv 5\ mod\ 10,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.
Se $a = 20n \pm 6 \Rightarrow c = (10n \pm 3)^2 + 1 = 100n^2 \pm 60n + 10$, ou seja, $c \equiv 0\ mod\ 10,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.
Se $a = 20n \pm 8 \Rightarrow c = (10n \pm 4)^2 + 1 = 100n^2 \pm 80n + 17$, ou seja, $c \equiv 7\ mod\ 10,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$.
Se $a = 20n \pm 10 \Rightarrow c = (10n \pm 5)^2 + 1 = 100(n^2 \pm 1)n + 26$, ou seja, $c \equiv 6\ mod\ 10,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. □

Visando a organização gráfica das trincas pitagóricas sobreposta às parábolas $b = b(a)$ definidas

anteriormente, a Figura 1 ilustrará a disposição de coordenadas (a, b) referente à trinca $(a, b, b+1)$ em coloração vermelha e à trinca $(a, b, b+2)$ em coloração azul.

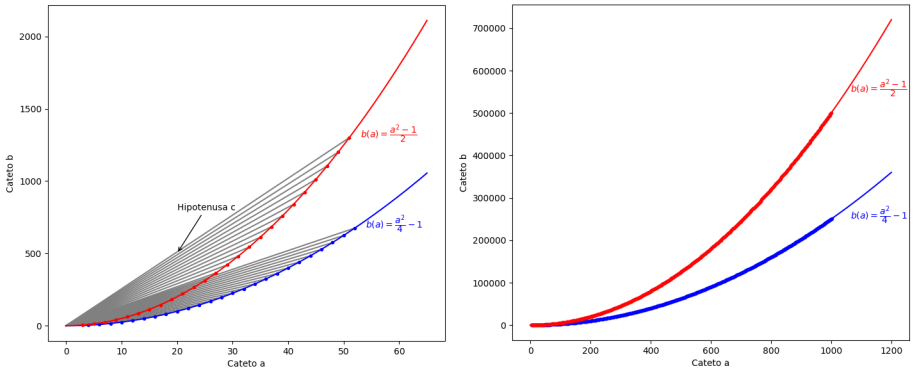

Figura 1: Pares ordenados de catetos (a, b) sobre suas respectivas parábolas. Na cor vermelha, a hipotenusa mede $c = b + 1$ e na cor azul, mede $c = b + 2$.

O gráfico à esquerda na Figura 1 representa suas hipotenusas através de segmentos de reta que interligam a origem $(0, 0)$ ao par ordenado de catetos (a, b). O gráfico à direita ilustra os pares (a, b) de variação $3 \leqslant a \leqslant 1000$. Apenas a escala diferencia os dois gráficos.

É possível estabelecer uma função contínua $f(x)$ (na verdade, $\mathbb{C}^\infty$) para associar, independente da paridade, o cateto $x = a \in \mathbb{N}$ ao cateto $b = f(a) \in \mathbb{N}$. Para isto, considere uma função auxiliar $k(x) = 1 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)^2$ e defina a função $f(x)$ que fornecerá o cateto b por:

$$f(x) = \frac{x^2 - k^2(x)}{2k(x)} \tag{6}$$

A Figura 2 ilustra o gráfico da função (6) que possui pontos de máximos locais em (a, b), para valores de a ímpar e pontos de mínimos locais em (a, b), para valores de a par.

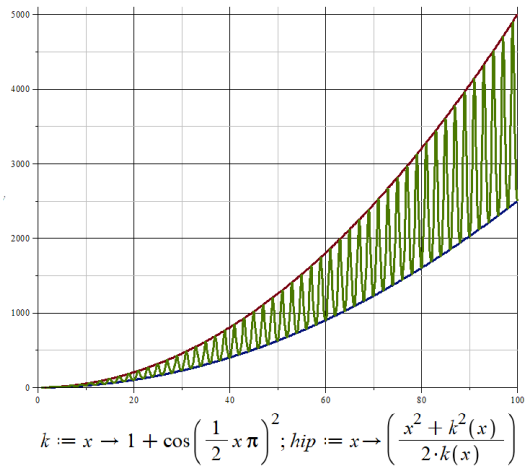

Figura 2: Uma fórmula geral para as trincas $(a, b, b + 1)$ e $(a, b, b + 2)$

Uma função real $h(x)$ para associar, independente da paridade, o cateto $a \in \mathbb{N}$ diretamente à sua

hipotenusa $c = h(a) \in \mathbb{N}$ pode ser expressa por:

$$c = h(x) = f(x) + k(x) = \frac{x^2 - k^2(x)}{2k(x)} + \frac{2k^2(x)}{2k(x)} = \frac{x^2 + k^2(x)}{2k(x)} \tag{7}$$

4 Trincas de Euclides na forma $(a, b, b + k)$

Generalizando, essa seção investigará regras de formação das trincas pitagóricas $(a, b, b + k)$. Para isto, a formulação associará cada valor de $a > 2$ a todos os possíveis valores de k nas trincas do tipo $(a, b, b+k)$. Considerando $(b+k)^2 - b^2 = \underbrace{2bk}_{par} + k^2 = a^2$, os catetos são relacionados por:

$$b = b(a) = \frac{a^2 - k^2}{2k} \in \mathbb{N} \tag{8}$$

desta forma, se $k = 2m$, então a^2 é par e $a = 2n$, logo

$$b = \frac{4n^2 - 4m^4}{4m} = \frac{n^2 - m^2}{m} \tag{9}$$

como $b \in \mathbb{N}$, segue que $m|(n - m)(n + m)$ e $1 \leqslant m < n$ $(i.)$.

Por outro lado, se $k = 2m + 1$, então a^2 é ímpar e $a = 2n + 1$, assim,

$$b = \frac{(2n + 1)^2 - (2m + 1)^2}{2(2m + 1)} = \frac{2(n - m)(n + m + 1)}{2m + 1} \tag{10}$$

ou seja, $(2m + 1)|(n - m)(n + m + 1)$ e $0 \leqslant m < n$ $(ii.)$.

Portanto, $(i.)$ e $(ii.)$ estabelecem interessantes critérios para associação de um cateto a à todas as trincas na forma $(a, b, b + k)$, mediante a sua paridade.

O código Python na Figura 3 auxilia a implementação de valores decrescentes dos inteiros positivos m que satisfazem um dos critérios de divisibilidade dados em $(i.)$ e $(ii.)$.

```
def genM1(n):
    mNumbers = []
    for m in range(2,n+1,1):
        if (n**2-m**2)%m==0:
            mNumbers.append(m)
    return mNumbers

def genM2(n):
    mNumbers =[]
    for m in range(1, n,1):
        if (((n-m)*(n+m+1))%(2*m+1)==0):
            mNumbers.append(m)
    return mNumbers

mlista=genM1(n), m2lista=genM2(n)
trincas1 =[(2*n,(n**2-m**2)/m,((n**2-m**2)/m)+2*m) for m in mlista]
trincas2 =[(2*n+1,2*(n-m)*(n+m+1)/(2*m+1),2*(n-m)*(n+m+1)/(2*m+1)+2*m+1) for m in m2lista]
print ( trincas1 , trincas2 )
```

Figura 3: Código Python para geração das trincas $(a, b, b + k)$

O console de saída da simulação para $1 \leqslant n \leqslant 20$ é dado pela Figura 4:

```
n = 1
k par [] Trincas []
k impar [1] Trincas [(3, 4, 5)]
n = 2
k par [2] Trincas [(4, 3, 5)]
k impar [1] Trincas [(5, 12, 13)]
n = 3
k par [2] Trincas [(6, 8, 10)]
k impar [1] Trincas [(7, 24, 25)]
n = 4
k par [4, 2] Trincas [(8, 6, 10), (8, 15, 17)]
k impar [3, 1] Trincas [(9, 12, 15), (9, 40, 41)]
n = 5
k par [2] Trincas [(10, 24, 26)]
k impar [1] Trincas [(11, 60, 61)]
n = 6
k par [8, 6, 4, 2] Trincas [(12, 5, 13), (12, 9, 15), (12, 16, 20), (12, 35, 37)]
k impar [1] Trincas [(13, 84, 85)]
n = 7
k par [2] Trincas [(14, 48, 50)]
k impar [9, 5, 3, 1] Trincas [(15, 8, 17), (15, 20, 25), (15, 36, 39), (15, 112, 113)]
n = 8
k par [8, 4, 2] Trincas [(16, 12, 20), (16, 30, 34), (16, 63, 65)]
k impar [1] Trincas [(17, 144, 145)]
n = 9
k par [6, 2] Trincas [(18, 24, 30), (18, 80, 82)]
k impar [1] Trincas [(19, 180, 181)]
n = 10
k par [10, 8, 4, 2] Trincas [(20, 15, 25), (20, 21, 29), (20, 48, 52), (20, 99, 101)]
k impar [9, 7, 3, 1] Trincas [(21, 20, 29), (21, 28, 35), (21, 72, 75), (21, 220, 221)]
n = 11
k par [2] Trincas [(22, 120, 122)]
k impar [1] Trincas [(23, 264, 265)]
n = 12
k par [18, 16, 12, 8, 6, 4, 2] Trincas [(24, 7, 25), (24, 10, 26), (24, 18, 30), (24, 32, 40), (24, 45, 51), (24, 70, 74),
      (24, 143, 145)]
k impar [5, 1] Trincas [(25, 60, 65), (25, 312, 313)]
n = 13
k par [2] Trincas [(26, 168, 170)]
k impar [9, 3, 1] Trincas [(27, 36, 45), (27, 120, 123), (27, 364, 365)]
n = 14
k par [14, 8, 4, 2] Trincas [(28, 21, 35), (28, 45, 53), (28, 96, 100), (28, 195, 197)]
k impar [1] Trincas [(29, 420, 421)]
n = 15
k par [18, 10, 6, 2] Trincas [(30, 16, 34), (30, 40, 50), (30, 72, 78), (30, 224, 226)]
k impar [1] Trincas [(31, 480, 481)]
n = 16
k par [16, 8, 4, 2] Trincas [(32, 24, 40), (32, 60, 68), (32, 126, 130), (32, 255, 257)]
k impar [11, 9, 3, 1] Trincas [(33, 44, 55), (33, 56, 65), (33, 180, 183), (33, 544, 545)]
n = 17
k par [2] Trincas [(34, 288, 290)]
k impar [25, 7, 5, 1] Trincas [(35, 12, 37), (35, 84, 91), (35, 120, 125), (35, 612, 613)]
n = 18
k par [24, 18, 12, 8, 6, 4, 2] Trincas [(36, 15, 39), (36, 27, 45), (36, 48, 60), (36, 77, 85), (36, 105, 111), (36, 160, 164)
      , (36, 323, 325)]
k impar [1] Trincas [(37, 684, 685)]
n = 19
k par [2] Trincas [(38, 360, 362)]
k impar [13, 9, 3, 1] Trincas [(39, 52, 65), (39, 80, 89), (39, 252, 255), (39, 760, 761)]
n = 20
k par [32, 20, 16, 10, 8, 4, 2] Trincas [(40, 9, 41), (40, 30, 50), (40, 42, 58), (40, 75, 85), (40, 96, 104), (40, 198, 202),
       (40, 399, 401)]
k impar [1] Trincas [(41, 840, 841)]
```

Figura 4: As primeiras Trincas Pitagóricas de Euclides $(a, b, b + k)$ com $a = 2n$ ou $a = 2n + 1$

Assim, para cada inteiro positivo n, o código lista valores de $m \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ para as trincas

$\left(2n, b = \dfrac{n^2 - m^2}{m}, b + 2m\right)$ e trincas $\left(2n+1, b = \dfrac{2(n-m)(n+m+1)}{2m+1}, b + 2m + 1\right)$.

Com um pouco mais de detalhes do que foi apresentado por Benito e Verona (2002, p. 119), um gráfico de dispersão das trincas $(a, b, b+k)$ é disponibilizado pela Figura 5 através do plote dos catetos (a, b) ordenados no intervalo $3 \leqslant a \leqslant 10.000$ em 4 escalas distintas.

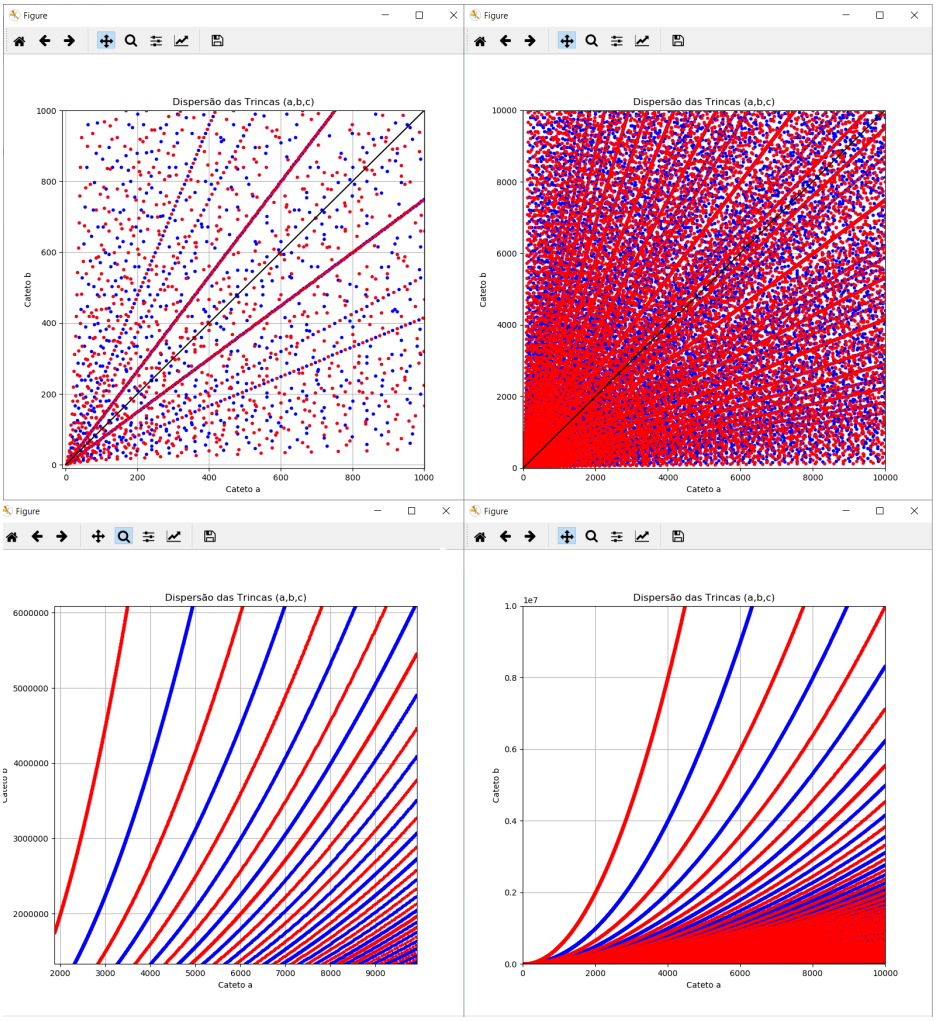

Figura 5: Dispersão de $(2n, c-k)$ em azul e de $(2n+1, c-k)$ em vermelho para $1 \leqslant n \leqslant 5000$

Na parte superior da Figura 5, os pontos azuis nos gráficos de dispersão representam as coordenadas (a, b) tais que a e b são ambos números pares. As demais coordenadas receberam a cor vermelha. No gráfico superior à esquerda da mesma figura, a reta representada pela linha preta possui equação $y = x$. Os pontilhados mais denso e sequenciais que estão alinhados logo acima desta linha preta são formados por todas as trincas pitagóricas múltiplas de $(3, 4, 5)$. Por simetria, os pontilhados mais denso e sequenciais que estão alinhados logo abaixo da mesma linha preta são formados por todas as trincas pitagóricas múltiplas da trinca $(4, 3, 5)$. Os dois gráficos da parte inferior na Figura 5, a cor azul é para a coordenada (a, b) sendo a um número par e a cor vermelha é para a coordenada (a, b) sendo a um número ímpar. Mesmo em diferentes escalas, verifica-se a alternância da coloração azul-vermelho na dispersão organizada das trincas de Euclides que sugerem estarem sobre linhas de tendências de funções quadráticas do tipo $b = b(a) = \dfrac{a^2 - k^2}{2k}$, para

$k \in [1, a[$.

Resultados extraídos das simulações Python sugerem o enunciado das seguintes proposições:

P8. $k = 1$ é solução única na trinca $(a, b, b + k)$ se, e somente se, a é primo.

P9. $k = 2$ é solução única na trinca $(a, b, b + k)$ se, e somente se, $\dfrac{a}{2}$ é primo.

Demonstração:

De fato, num triângulo retângulo de lados (a, b, c) segue que $a + b > c = b + k$, logo $1 \leqslant k < a$ é uma condição geométrica do parâmetro k. O valor $k = a$ na equação (8), resultaria o seguinte triângulo degenerado $(a, 0, a)$. E ainda, de (8) segue que $2b = \dfrac{a^2 - k^2}{k} \in \mathbb{N}$, logo, $k|(a^2 - k^2)$, i.e.

$$k|a^2 \tag{11}$$

Assim, se $a > 2$ é um número primo, então, pela condição (11), $k = 1$, $k = a$ ou $k = a^2$. Mas, pela condição geométrica $k < a < a^2$, portanto, se a é primo, $k = 1$ será a única trinca pitagórica na forma $(a, b, b + k)$. Por outro lado, se $1 \leqslant k < a$ possui uma única solução para $k|a^2$, então $k = 1$ e $a > 2$ é primo. Demonstrando-se, desta forma, a proposição **P8.**. □

Para a demonstrar a proposição **P9.**, suponha $\frac{a}{2} = n$ primo, logo as trincas $(a = 2n, b, b + k)$ satisfazem a equação (9) para algum $k = 2m$, e ainda, $m|n^2$. Portanto, $m = 1$ e $k = 2$ é a única solução, pois $1 \leqslant m < n$. Por outro lado, se $k = 2$ é a única trinca $(2n, b, b + k)$, então, baseado na equação (9), $m = 1$ é o único valor tal que $m|n^2$, portanto, $n = \frac{a}{2}$ é primo. □

As proposições **P8.** e **P9.** seguem intimamente relacionadas. Pois, considere p primo, então existe uma única trinca $(2p, \hat{b}, \hat{b}+2)$ e, pela propriedade **P5.**, $\hat{b} = p^2 - 1$. Uma vez que $p = 6n \pm 1$, segue que $\hat{b} = (6n \pm 1)^2 - 1$ é um número par $2b$. Portanto, a única trinca $(2p, \hat{b}, \hat{b}+2) = 2(p, b, b+1)$, ou seja, se p é primo existe uma única trinca pitagórica na forma $(p, b, b + 1)$[2].

Outro fato curioso é que toda trinca de Euclides[3] $(a, b, b + k)$ satisfaz a relação $\dfrac{a^2}{k} = b + c$.

5 Trincas $(a, b, b + k)$ na sequência de Fibonacci

Todos os valores alternados na conhecida sequência de Fibonacci $\{F_i\},\ i = 1, \cdots, N$, a partir de $F_5 = 5$, são hipotenusas em uma sequência de trincas $\{(a_i, b_i, F_{2i+3}),\ i = 1, \cdots, N\}$[4]. A regra prática para a formação dos elementos dessas trincas são:

- $a_1 = 3, b_1 = 4, c_1 = F_5 = 5$
- cada hipotenusa possui medida $c_i = F_{2i+3},\ i = 1, \cdots, N$;
- a medida de cada cateto maior b_i é a soma $a_{i-1} + b_{i-1} + c_{i-1},\ i = 2, \cdots, N$, das medidas dos lados do triângulo retângulo anterior, e

[2] A relação ainda demonstra que não existem trincas primitivas na forma $(2p, b, c)$ para todo $p > 1$ ímpar.

[3] Neste caso, $a^2 = c^2 - b^2$ e $k = c - b$.

[4] Demonstração disponível em `http://nextlevelmaths.com/resources/wow/pythag_fibonacci/`

- a medida de cada cateto menor a_i é a diferença $F_{2i+2} - a_{i-1}$, $i = 2, \cdots, N$, entre o valor alternado de Fibonacci $\{F_{2i+2}\}$ pelo valor do cateto menor a_{i-1} do triângulo anterior.

A Tabela 3 exibe trincas pitagóricas cuja medida das hipotenusas são os valores alternados da sequência de Fibonacci.

Tabela 3: Sequência de trincas $(a_i, b_i, b_i + k_i)$ e de valores $\sqrt{k_i}$ formando outra sequência de Fibonacci

catA	catB	FIBONACCI	$c_i - b_i = k_i$	$\sqrt{k_i}$	catA	catB	FIBONACCI	$c_i - b_i = k$	$\sqrt{k_i}$
1	0	1			33553	67104	75025	7921	**89**
		1					121393		
0	2	2			87840	175682	196418	20736	**144**
		3					317811		
3	4	5	1	**1**	229971	459940	514229	54289	**233**
		8					832040		
5	12	13	1	**1**	602069	1204140	1346269	142129	**377**
		21					2178309		
16	30	34	4	**2**	1576240	3152478	3524578	372100	**610**
		55					5702887		
39	80	89	9	**3**	4126647	8253296	9227465	974169	**987**
		144					14930352		
105	208	233	25	**5**	10803705	21607408	24157817	2550409	**1597**
		377					39088169		
272	546	610	64	**8**	28284464	56568930	63245986	6677056	**2584**
		987					102334155		
715	1428	1597	169	**13**	74049691	148099380	165580141	17480761	**4181**
		2584					267914296		
1869	3740	4181	441	**21**	193864605	387729212	433494437	45765225	**6765**
		6765					701408733		
4896	9790	10946	1156	**34**	507544128	1015088254	1134903170	119814916	**10946**
		17711					1836311903		
12815	25632	28657	3025	**55**	1328767775	2657535552	2971215073	313679521	**17711**
		46368			3478759201	6957518400	7778742049	821223649	**28657**

Analisando o parâmetro k nessas trincas $(a, b, b + k)$ da Tabela 3, verificam-se valores de quadrados perfeitos, de tal forma que $\sqrt{k}$ define outra sequência completa de Fibonacci. Da equação (11), segue que $k|a^2$, logo é válido afirmar que $\sqrt{k}|a$. Mais ainda, verifica-se que a sequência que inicia-se com $a_1 = 3$ e dada por $\left\{\dfrac{a_i}{\sqrt{k_i}}\right\}$ também é de Fibonacci. Assim, estes resultados permitem enunciar a seguinte propriedade que relaciona as Trincas de Euclides e a sequência de Fibonacci:

P10. Considere a sequência de trincas pitagóricas $\{(a_i, b_i, b_i + k_i),\ i = 1, \cdots, N\}$ de forma que suas hipotenusas são elementos alternados da sequência de Fibonacci, a partir de $F_5 = 5$. Então, as sequências $\left\{\sqrt{k_i}\right\}$ e $\left\{\dfrac{a_i}{\sqrt{k_i}}\right\}$ também são de Fibonacci.

Demonstração:

De fato, para $i > 1$ e hipotenusa $c_i = F_{2i+1}$, na literatura a trinca é dada por: $\begin{cases} a_i = F_{i+1}^2 - F_i^2 \\ b_i = 2F_iF_{i+1} \\ c_i = F_{i+1}^2 + F_i^2 \end{cases}$.

Assim, $k_i = c_i - b_i = F_{i+1}^2 + F_i^2 - 2F_iF_{i+1} = (F_{i+1} - F_i)^2 \Rightarrow \sqrt{k_i} = F_{i+1} - F_i = F_{i-1}$. Portanto, $\left\{\sqrt{k_i}\right\}$ é uma sequência de Fibonacci. E ainda, $\dfrac{a_i}{\sqrt{k_i}} = \dfrac{F_{i+1}^2 - F_i^2}{F_{i-1}} = \dfrac{F_{i+1}^2 - F_i^2}{F_{i+1} - F_i} = F_{i+1} + F_i = F_{i+2}$, ou seja, a partir de F_3, $\left\{\dfrac{a_i}{\sqrt{k_i}}\right\}$ é outra sequência de Fibonacci. □

Considerações finais

Inspirado numa demonstração de Euclides (300 a.C.) para a questão das infinitas Trincas Pitagóricas, foi estabelecido fórmulas fechadas para associar cada número natural $a > 2$ à uma única trinca na forma $(a, b, b + 1)$ ou $(a, b, b + 2)$ mediante a sua paridade. As propriedades **P1** a **P7** podem desvendar alguns mistérios da Teoria dos Números. Por exemplo, caso a e c são, simultaneamente, primos na trinca (a, b, c) então, necessariamente, $a \equiv \pm 1 \; mod \; 10$ e $c \equiv 1 \; mod \; 10$, e isto sugere um padrão para os infinitos Primos Pitagóricos conjecturado em (RIBENBOIM, 2015). O artigo também investigou a totalidade e critérios de formação das trincas pitagóricas na forma $(a, b, b+k)$ para cada valor de $a \in \mathbb{N}$, disponibilizando uma dispersão gráfica de coordenadas formadas por todos os pares de catetos (a, b). Nessa nova abordagem apresentada para investigar a formação das trincas, além de propor uma ordenação bem definida para revelar padrões interessantes nas hipotenusas, ainda resultou, através dos critérios de divisibilidade $i.)$ e $ii.)$, em um teste de primalidade original relacionando a unicidade da trinca $(a, b, b+k)$ sob a condição de que $a = p$ ou $a = 2p$, sendo $p > 2$ um número primo. Ressalta-se que as propriedades **P8** e **P9**, demostradas nesse artigo, ainda eram tratadas como conjecturas durante a apresentação desses resultados no VI ERMAC, realizado em Bauru-SP (JESUS, 2019). E ainda, a função contínua $h(x)$ e a propriedade **P10**, na qual identifica as trincas de Euclides sob o fascínio de sequências recorrentes, foram acrescidas na discussão do artigo. Desta forma, contribuindo para o enriquecimento na área da matemática recreativa, alguns padrões ocultos que envolvem expressões discretas, funções contínuas, testes de primalidade, trincas pitagóricas e a sequência de Fibonacci foram revelados.

Agradecimentos

O autor AFJ agradece o Prof. Dr. Laércio Ap. Lucas pelo livro "*O Último Teorema de Fermat*" de Simon Singh, a fonte de inspiração desse artigo.

Referências Bibliográficas

BEILER, A. H. **Recreations in the theory of numbers:** the queen of mathematics entertains, New York: Dover Publications, 1966.

BENITO, M.; VARONA, J. L. Pythagorean triangles with legs less than n. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 143, n. 1, p. 117–126, 2002.

BRAZA, P.; TONG, J.; ZHAN, M. Q. Linear transformations on pythagorean triples. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 35, n.5, p. 755-762, 2004.

DICKSON, L. E. **History of the theory numbers**, New York: Chelsea Publishing Company, 1971. v. 2.

ECKERT, E. J. Primitive pythagorean triples. **The College Mathematics Journal**, v. 23, n. 5, p. 413-417, 1992.

JESUS, A. F.; SANTOS; J. P. M.; ELOY, M. E. As infinitas trincas pitagóricas de Euclides. *In*: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 6., 2019, Bauru. **Cadernos de trabalhos completos e resumos** [...]. Bauru: Unesp, Faculdade de Ciências, 2019, p. 57-63. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/eventos2341/ermac-2019/caderno-de-trabalhos-e-resumos//. Acesso em: 07 nov. 2019.

LOOMIS, E. S. **The Pythagorean proposition**. Michigan: Ann Arbor: The National Council of Teachers of Mathematics. 1940.

MITCHELL, D. W. An Alternative characterisation of all primitive pythagorean triples. **The Mathematical Gazette**, v. 85, n. 503, p. 273–275, 2001.

RIBENBOIM, P. **Números primos, amigos que causam problemas:** um triálogo com o Papa Paulo. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

SINGH, S. **O último teorema de Fermat**. Rio de Janeiro: Editora Record, 1997.

STILLWELL, J. **Elements of number theory**. San Francisco: Springer, 2002.

WEISSTEIN, E. W. **Pythagorean theorem**. [*S. l.*]: MathWorld – A Wolfram Web Resource, 2019. Disponível em: http://mathworld.wolfram.com/PythagoreanTheorem.html. Acesso em: 10 maio 2019.