Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 20, jul. 2021

Polinômios ortogonais na circunferência unitária de funções hipergeométricas

Orthogonal polynomials on the circumference of a unit circle from hypergeometric functions

Nguyen Thi Hoang Yen
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
n.yen@unesp.br

Resumo

Consideremos uma sequência de polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária representados por funções hipergeométricas $\{\phi_n(b,z)\}_{n=0}^{+\infty}$, onde

$$\phi_n(b;z) = \frac{(b+\bar{b}+1)_n}{(b+1)_n}\, {}_2F_1(-n, b+1; b+\bar{b}+1; 1-z),$$

com $b \in \mathbb{C},\ 2\,\mathrm{Re}(b) \neq -1, -2, -3, \ldots$ e $n \in \mathbb{N}$. No artigo [1] , o autor apresentou os resultados sobre os polinômios $\phi_n(b,z)$, onde $n \geq 0$. Neste trabalho reapresentamos as demonstrações do artigo [1] de forma explícita e corrigindo alguns erros de digitação encontrados no artigo.

Palavras-chave: Funções hipergeométricas. Polinômios ortogonais na circunferência unitária. Relação de recorrência de três termos.

Abstract

Let us consider a sequence of monic orthogonal polynomials on the circumference of a unit circle given by hypergeometric functions $\{\phi_n(b,z)\}_{n=0}^{+\infty}$, where

$$\phi_n(b;z) = \frac{(b+\bar{b}+1)_n}{(b+1)_n}\, {}_2F_1(-n, b+1; b+\bar{b}+1; 1-z),$$

with $b \in \mathbb{C},\ 2\,\mathrm{Re}(b) \neq -1, -2, -3, \ldots$ and $n \in \mathbb{N}$. In the article [1] , the author presents the results on the polynomials $\phi_n(b,z)$, where $n \geq 0$. This work describes explicitly the proofs in [1] .

Keywords: Hypergeometric functions. Orthogonal polynomials on the circumference of a unit circle. Three term recurrence relation.

Artigo recebido em out. 2020 e aceito em dez. 2020

Este artigo está licenciado com uma Licença Creative Commons Attribution 4.0 International, podendo ser usado, distribuído e reproduzido, sem restrições, desde que o trabalho original seja devidamente citado.

1 Introdução

Dada uma medida positiva $\mu(z) = \mu(e^{i\theta})$ na circunferência unitária $C = \{z = e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, a sequência de polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária $\{\phi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ associada a μ pode ser definida por

$$\int_C \bar{z}^j \phi_n(z) d\mu(z) = \int_0^{2\pi} e^{-ij\theta} \phi_n \left(e^{i\theta}\right) d\mu \left(e^{i\theta}\right) = \kappa_n^{-2} \delta_{nj},$$

para $0 \leq j \leq n$, onde $\kappa_n^{-2} = \|\phi_n(z)\|^2 = \int_C |\phi_n(z)|^2 \, d\mu(z)$. Visto que a integral é definida sobre a circunferência unitária, temos $\bar{z} = z^{-1}$, de onde

$$\int_C \bar{z}^j \phi_n(z) d\mu(z) = \int_C z^{-j} \phi_n(z) d\mu(z).$$

Os polinômios mônicos ϕ_n satisfazem as seguintes relações

$$\begin{aligned} \phi_n^*(z) &= \bar{a}_n z \phi_{n-1}(z) + \phi_{n-1}^*(z), \\ \phi_n(z) &= a_n \phi_n^*(z) + \left(1 - |a_n|^2\right) z \phi_{n-1}(z), \end{aligned} \tag{1}$$

para $n \geq 1$, onde $a_n = \phi_n(0)$ e $\phi_n^*(z) = z^n \overline{\phi_n(1/\bar{z})}$, veja por exemplo Simon [2] . Os coeficientes a_n, para $n \geq 0$, são conhecidos como coeficientes de Verblunsky e satisfazem

$$|a_n| < 1 \quad \text{e} \quad \prod_{m=1}^{n} \left(1 - |a_m|^2\right) = \kappa_n^{-2} = \frac{D_n}{D_{n-1}},$$

para $n \geq 1$, onde o determinante de Toeplitz D_n é tal que

$$D_0 = \mu_0 \quad \text{e} \quad D_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix},$$

sendo os momentos μ_n dados por $\mu_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\mu \left(e^{i\theta}\right)$, e satisfazem $\mu_{-n} = \bar{\mu}_n$, para $n \geq 1$.

O teorema a seguir conhecido anteriormente como Teorema de Favard na circunferência unitária e apresentado em Simon [2] como Teorema de Verblunsky, é um dos resultados mais conhecidos acerca de polinômios ortogonais na circunferência unitária.

Teorema 1 (Teorema de Favard na circunferência unitária) Dada uma sequência arbitrária de números complexos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ com $|a_n| < 1$ para $n \geq 1$, existe uma única medida positiva μ na circunferência unitária tal que os polinômios gerados por (1) são os respectivos polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária.

Outra propriedade satisfeita pelos polinômios ϕ_n é que seus zeros estão todos no círculo unitário aberto $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$.

2 Relações de recorrência de três termos para polinômios ortogonais na circunferência unitária

Nesta seção fornecem algumas informações sobre os polinômios ortogonais na circunferência unitária dados por uma relação de recorrência de três termos.

Teorema 2 Seja $\{\phi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ uma sequência de polinômios dada pela relação de recorrência de três termos

$$\phi_{n+1}(z) = (z+\beta_{n+1})\,\phi_n(z) - \alpha_{n+1} z \phi_{n-1}(z), \tag{2}$$

para $n \geq 1$, com $\phi_0(z) = 1$ e $\phi_1(z) = z + \beta_1$. Se

$$\beta_{n+1} \neq 0, \quad \alpha_{n+1} \neq 0 \quad \text{e} \quad 0 < \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}} = 1 - |\phi_n(0)|^2, \tag{3}$$

para $n \geq 1$, então existe uma medida positiva μ na circuferência unitária tal que $\{\phi_n\}_{n=1}^{+\infty}$ são os respectivos polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária.

Demonstração. Seja $a_n = \phi_n(0)$, para $n \geq 1$. Como $\phi_{n+1}(0) = \beta_{n+1}\phi_n(0)$, para $n \geq 0$, então

$$a_n = \phi_n(0) = \beta_1\beta_2\ldots\beta_n, \tag{4}$$

para $n \geq 1$. Além disso, de (3), temos

$$\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}\left(1 - |a_n|^2\right), \tag{5}$$

e $|a_n| < 1$, para $n \geq 1$. Assim, pelo Teorema 1, existe uma única medida positiva μ associada à sequência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e que os polinômios gerados por (1) são os respectivos polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária em relação a essa medida.

Se $\beta_1 \neq 0$, então $a_n \neq 0$, devido a (4) e $\beta_{n+1} \neq 0$, para $n \geq 1$. Assim, de (1) obtemos

$$\phi_{n+1}^*(z) = \frac{\phi_{n+1}(z) - (1 - |a_{n+1}|^2) z\phi_n(z)}{a_{n+1}}$$

e

$$\phi_{n+1}(z) = \left(z + \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\phi_n(z) - \frac{a_{n+1}}{a_n}(1 - |a_n|^2) z\phi_{n-1}(z),$$

para $n \geq 1$. Observe que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \beta_{n+1}$ e $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}(1-|a_n|^2) = \beta_{n+1}(1-|a_n|^2) = \alpha_{n+1}$. Isso segue que

$$\phi_{n+1}(z) = (z+\beta_{n+1})\,\phi_n(z) - \alpha_{n+1}\, z\phi_{n-1}(z),$$

para $n \geq 1$.

Se $\beta_1 = 0$, então $a_n = 0$ e $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}$, para $n \geq 1$. Assim, de (1) temos

$$\phi_n(z) = z\phi_{n-1}(z) = \cdots = z^n.$$

Isto é,

$$\phi_{n+1}(z) = z^{n+1} = z\phi_n(z) = (z+\beta_{n+1})\,\phi_n(z) - \alpha_{n+1} z\phi_{n-1}(z),$$

para $n \geq 1$.

Logo, em qualquer caso, podemos identificar os polinômios ortogonais mônicos na circunferência unitária em relação à medida μ como os polinômios dados pela relação de recorrência de três termos (2) com coeficientes que satisfazem (3). Portanto, o teorema foi demonstrado.

□

De (2) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_C \phi_1(z)d\mu(z) &= \int_C z\phi_0(z)d\mu(z) + \beta_1 \int_C \phi_0(z)d\mu(z),\\
\int_C \phi_{n+1}(z)d\mu(z) &= \int_C (z+\beta_{n+1})\,\phi_n(z)d\mu(z) - \alpha_{n+1}\int_C z\phi_{n-1}(z)d\mu(z),\\
\int_C z^{-n}\phi_{n+1}(z)d\mu(z) &= \int_C z^{-n}\,(z+\beta_{n+1})\,\phi_n(z)d\mu(z) - \alpha_{n+1}\int_C z^{-n+1}\phi_{n-1}(z)d\mu(z),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\mu_{-1} + \beta_1\mu_0 &= 0,\\
\int_C z\phi_n(z)d\mu(z) - \alpha_{n+1}\int_C z\phi_{n-1}(z)d\mu(z) &= 0,\\
\beta_{n+1}\int_C z^{-n}\phi_n(z)d\mu(z) - \alpha_{n+1}\int_C z^{-n+1}\phi_{n-1}(z)d\mu(z) &= 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\beta_1 = \frac{-\mu_{-1}}{\mu_0},\ \alpha_{n+1} = \frac{\int_C z\phi_n(z)d\mu(z)}{\int_C z\phi_{n-1}(z)d\mu(z)} \quad \text{e} \quad \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}} = \frac{\int_C z^{-n}\phi_n(z)d\mu(z)}{\int_C z^{-(n-1)}\phi_{n-1}(z)d\mu(z)},$$

para $n \geq 1$. Assim, $\kappa_0^{-2} = \int_C |\phi_0(z)|^2 d\mu(z) = \mu_0$, e para $n \geq 1$, os coeficientes κ_n^{-2} são determinados como seguintes

$$\begin{aligned}
\kappa_n^{-2} &= \int_C |\phi_n(z)|^2 d\mu(z) = \int_C z^{-n}\phi_n(z)d\mu(z)\\
&= \left[\int_C z^{-(n-1)}\phi_{n-1}(z)d\mu(z)\right]\frac{\alpha_{n+1}}{\beta_{n+1}} = \cdots = \mu_0\frac{\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{n+1}}{\beta_2\beta_3\cdots\beta_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Além disso, temos também que

$$\begin{aligned}
\int_C z\phi_n(z)d\mu(z) &= \alpha_{n+1}\int_C z\phi_{n-1}(z)d\mu(z)\\
&= \alpha_{n+1}\alpha_n\int_C z\phi_{n-2}(z)d\mu(z) = \cdots = \alpha_{n+1}\ldots\alpha_3\alpha_2\mu_{-1}\\
&= -\alpha_{n+1}\ldots\alpha_3\alpha_2\mu_0\beta_1,
\end{aligned}$$

para $n \geq 1$. Observe que há uma ligeira diferença com relação ao resultado dado no artigo [1], pois lá não havia o sinal negativo na expressão acima.

3 Polinômios ortogonais na circunferência unitária de funções hipergeométricas

Nesta seção usamos como principal referência [1] . Para isso, precisamos das seguintes definições de funções hipergeométricas que podem ser encontradas na referência [3].

Definição 3 Dados $a \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, o número

$$(a)_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0,\\ a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1), & \text{se } n > 0,\end{cases}$$

é conhecido como fatorial deslocado ou fatorial generalizado.

Se $a \in \mathbb{C}\backslash\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq 0\}$, então

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Aqui, Γ representa a função gama.

Definição 4 A função hipergeométrica ${}_2F_1(a, b; c; z)$ é definida pela série

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \tag{7}$$

para $|z| < 1$, onde $a, b, c \in \mathbb{C}$ e $c \neq 0, -1, -2, \ldots$.

Para $\text{Re}(c) > \text{Re}(b) > 0$ e $z \in \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 1\}$, temos

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a} dt, \tag{8}$$

conhecido como integral de Euler para funções hipergeométricas.

Uma representação da função hipergeométrica para $\text{Re}(z) < 1/2$ é dada pela transformação de Pfaff

$${}_2F_1(a, b; c; z) = (1-z)^{-a}\, {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right). \tag{9}$$

Para o desenvolvimento das próximas partes deste trabalho, consideremos as relações de recorrências (2.5.3) e (2.5.16) em [3]:

$${}_2F_1\,(a, b; c; z) = \left(1 + \frac{a-b+1}{c} z\right) {}_2F_1\,(a+1, b; c+1; z) - \frac{(a+1)\,(c-b+1)}{c(c+1)}\, z\, {}_2F_1\,(a+2, b; c+2; z) \tag{10}$$

e

$$(c-a)\, {}_2F_1(a-1, b; c; z) = (c - 2a - (b-a)z)\, {}_2F_1(a, b; c; z) + a(1-z)\, {}_2F_1(a+1, b; c; z). \tag{11}$$

Para $\text{Re}(b) \neq -1, -2, -3, \ldots$, de (11) obtemos

$$\begin{aligned}(b + \bar{b} + 1 + n)\, {}_2F_1(-n-1, b+1; b+\bar{b}+1; 1-z) \\ = (\bar{b} + n + (b+1+n)z)\, {}_2F_1(-n, b+1; b+\bar{b}+1; 1-z) - \\ - nz\, {}_2F_1(-n+1, b+1; b+\bar{b}+1; 1-z).\end{aligned} \tag{12}$$

Note que $(-n)_k = 0,$ para $n, k \in \mathbb{N}^*$ e $k > n$. Assim,

$${}_2F_1(-n, b+1; b+\bar{b}+1; 1-z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n)_k (b+1)_k}{k!\,(b+\bar{b}+1)_k} (1-z)^k.$$

Logo,

$$\phi_n(b; z) = \frac{(b+\bar{b}+1)_n}{(b+1)_n}\, {}_2F_1(-n, b+1; b+\bar{b}+1; 1-z) \tag{13}$$

é um polinômio mônico, onde $n \geq 0$.

De (12) temos

$$
\begin{aligned}
(b+\bar{b}+1+n)\frac{(b+\bar{b}+1)_{n+1}}{(b+1)_{n+1}}\,{}_2F_1(-n-1,b+1;b+\bar{b}+1;1-z)& \\
=(\bar{b}+n+(b+1+n)z)\frac{(b+\bar{b}+1)_{n+1}}{(b+1)_{n+1}}\,{}_2F_1(-n,b+1;b+\bar{b}+1;1-z)-& \\
-nz\frac{(b+\bar{b}+1)_{n+1}}{(b+1)_{n+1}}\,{}_2F_1(-n+1,b+1;b+\bar{b}+1;1-z),& \qquad (14)
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\phi_{n+1}(b;z)=(\bar{b}+n+(b+1+n)z)\frac{1}{(b+1+n)}\phi_n(b,z)-nz\frac{(b+\bar{b}+n)}{(b+1+n)(b+n)}\phi_{n-1}(b;z).$$

Logo,

$$\phi_{n+1}(b;z)=\left(z+\frac{\bar{b}+n}{b+1+n}\right)\phi_n(b,z)-n\frac{(b+\bar{b}+n)}{(b+1+n)(b+n)}z\phi_{n-1}(b;z).$$

Portanto, os polinômios mônicos (13) satisfazem a relação de recorrência

$$\phi_{n+1}(b;z)=\left(z+\beta_{n+1}^{(b)}\right)\phi_n(b;z)-\alpha_{n+1}^{(b)}z\phi_{n-1}(b;z), \qquad (15)$$

para $n\geq 1$, com $\phi_0(b;z)=1$ e $\phi_1(b;z)=z+\beta_1^{(b)}$, onde

$$\beta_n^{(b)}=\frac{\bar{b}+n-1}{b+n}, \qquad \alpha_{n+1}^{(b)}=\frac{n(b+\bar{b}+n)}{(b+1+n)(b+n)}.$$

Observe que $\alpha_{n+1}^{(b)}\neq 0$ e $\beta_{n+1}^{(b)}\neq 0$, uma vez que $\mathrm{Re}(b)\neq -1,-2,-3,\ldots$. Assim,

$$\frac{\alpha_{n+1}^{(b)}}{\beta_{n+1}^{(b)}}=\frac{n(b+\bar{b}+n)}{(b+n)(\bar{b}+n)}.$$

Além disso, pela relação de recorrência (15) temos

$$\phi_n(b,0)=\beta_n^{(b)}\phi_{n-1}(b,0)=\cdots=\beta_n^{(b)}\beta_{n-1}^{(b)}\ldots\beta_1^{(b)},$$

isto é,

$$1-|\phi_n(b,0)|^2=1-|\beta_n^{(b)}\beta_{n-1}^{(b)}\ldots\beta_1^{(b)}|^2=1-\frac{b\bar{b}}{(b+n)(\bar{b}+n)}=\frac{n(b+\bar{b}+n)}{(b+n)(\bar{b}+n)}.$$

Disso decorre que

$$1-|\phi_n(b,0)|^2=\frac{\alpha_{n+1}^{(b)}}{\beta_{n+1}^{(b)}},$$

para $n\geq 1$.

Proposição 5 Seja $\mathrm{Re}(b) > -1/2$. Então $\{\phi_n(b;z)\}_{n=0}^{+\infty}$ são os polinômios mônicos ortogonais na circunferência unitária definidos por

$$\int_C \bar{z}^j \phi_n(b;z) d\mu(b;z) = \left(\kappa_n^{(b)}\right)^{-2} \delta_{nj}, \tag{16}$$

para $0 \leq j \leq n$, com relação a uma medida positiva $\mu(b;z)$ na circunferência unitária. Os coeficientes $\kappa_n^{(b)} = \|\phi_n(b;z)\|^{-1}$ e $a_n^{(b)} = \phi_n(b;0)$ associados a esses polinômios satisfazem

$$\kappa_n^{(b)} = \sqrt{\frac{|(b+1)_n|^2}{(b+\bar{b}+1)_n\ n!}} \quad \text{e} \quad a_n^{(b)} = \frac{(\bar{b})_n}{(b+1)_n},$$

para $n \geq 1$.

Demonstração. Temos

$$\phi_{n+1}(b;z) = \left(z + \beta_{n+1}^{(b)}\right) \phi_n(b;z) - \alpha_{n+1}^{(b)} z \phi_{n-1}(b;z),$$

com $\phi_0(b;z) = 1$ e $\phi_1(b;z) = z + \beta_1^{(b)}$, onde $\alpha_{n+1}^{(b)} \neq 0$, $\beta_{n+1}^{(b)} \neq 0$, e $1 - |\phi_n(b,0)|^2 = \dfrac{\alpha_{n+1}^{(b)}}{\beta_{n+1}^{(b)}}$, para $n \geq 1$. O Teorema 2 garante a existência de uma medida positiva $\mu(b;z)$ na circunferência unitária tal que $\{\phi_n(b;z)\}_{n=0}^{+\infty}$ são os polinômios mônicos ortogonais na circunferência unitária. Além disso,

$$\kappa_n^{(b)} = \sqrt{\frac{\beta_2^{(b)}\beta_3^{(b)} \ldots \beta_{n+1}^{(b)}}{\mu_0 \alpha_2^{(b)} \alpha_3^{(b)} \ldots \alpha_{n+1}^{(b)}}} = \sqrt{\frac{(b+1)(\bar{b}+1)}{(b+\bar{b}+1)} \frac{(b+2)(\bar{b}+2)}{2(b+\bar{b}+2)} \ldots \frac{(b+n)(\bar{b}+n)}{n(b+\bar{b}+n)}},$$

ou seja,

$$\kappa_n^{(b)} = \sqrt{\frac{|(b+1)_n|^2}{(b+\bar{b}+1)_n n!}},$$

para $n \geq 1$. Por outro lado,

$$a_n^{(b)} = \phi_n(b;0) = \beta_n^b \beta_{n-1}^b \ldots \beta_1^b = \frac{(\bar{b}+n-1)}{(b+n)} \frac{(\bar{b}+n-2)}{(b+n-1)} \ldots \frac{(\bar{b})}{(b+1)},$$

isto é,

$$a_n^{(b)} = \frac{(\bar{b})_n}{(b+1)_n},$$

para $n \geq 1$.

Também o artigo [1] nos fornece uma fórmula explícita para $\mu(b;z)$, isto é,

$$d\mu(b;z) = d\mu(b;e^{i\theta}) = \tau^{(b)} e^{(\pi-\theta)\,\mathrm{Im}(b)} [\sin(\theta/2)]^{2\,\mathrm{Re}(b)} d\theta,$$

onde $\mathrm{Re}(b) > -1/2$ e $\tau^{(b)} = \dfrac{2^{b+\bar{b}} |\Gamma(b+1)|^2}{2\pi \Gamma(b+\bar{b}+1)}$ tal que $\mu_0^{(b)} = 1$.

□

Teorema 6 Para $\mathrm{Re}(b) > -1/2$, valem os assintóticos

$$\lim_{n\to+\infty} \kappa_n^{(b)} = \frac{\sqrt{\Gamma(b+\bar{b}+1)}}{|\Gamma(b+1)|} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} n^{b-\bar{b}+1} a_n^{(b)} = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(\bar{b})}.$$

Demonstração. Da fórmula de Gauss para função Gama (veja Conway, [4]), temos

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\dots(z+n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\, n^{z-1}}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+z)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\, n^{z-1}}{(z)_n}.$$

Pela Proposição 5, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} \kappa_n^{(b)} = \sqrt{\lim_{n\to+\infty} \frac{|(b+1)_n|^2}{(b+\bar{b}+1)_n n!}} = \sqrt{\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{n! n^{b+\bar{b}}}{(b+\bar{b}+1)_n} \frac{(b+1)_n}{n! n^b} \frac{(\bar{b}+1)_n}{n! n^{\bar{b}}} \right]},$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_n^{(b)} = \sqrt{\frac{\Gamma(b+\bar{b}+1)}{|\Gamma(b+1)|^2}} = \frac{\sqrt{\Gamma(b+\bar{b}+1)}}{|\Gamma(b+1)|}.$$

Além disso,

$$\lim_{n\to+\infty} n^{b-\bar{b}+1} a_n^{(b)} = \lim_{n\to+\infty} n^{b-\bar{b}+1} \frac{(\bar{b})_n}{(b+1)_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! n^b}{(b+1)_n} \frac{(\bar{b})_n}{n! n^{\bar{b}-1}},$$

isto é,

$$\lim_{n\to+\infty} n^{b-\bar{b}+1} a_n^{(b)} = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(\bar{b})}.$$

□

Note que há uma pequena diferença no Teorema 6 com relação ao mesmo resultado dado no artigo [1], pois lá está escrito $\lim_{n\to+\infty} n^{b-\bar{b}+1} a_n^{(b)} = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(b)}$ e aqui $\lim_{n\to+\infty} n^{b-\bar{b}+1} a_n^{(b)} = \frac{\Gamma(b+1)}{\Gamma(\bar{b})}$, ou seja, corrigimos um erro de digitação.

Teorema 7 Se $\mathrm{Re}(b) > 0$, então para todo $z \in \mathbb{C}$, os polinômios $\phi_n(b,z)$ e seus recíprocos $\phi_n^*(b;z)$ podem ser dados por

$$\phi_n(b;z) = \frac{\Gamma(b+\bar{b}+n+1)}{\Gamma(b+n+1)\Gamma(b)} \int_0^1 t^b (1-t)^{\bar{b}-1} [1-(1-z)t]^n dt,$$
$$\phi_n^*(b;z) = \frac{\Gamma(b+\bar{b}+n+1)}{\Gamma(\bar{b}+n+1)\Gamma(\bar{b})} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{\bar{b}} [1-(1-z)t]^n dt,$$

para $n \geq 1$.

Demonstração. De (8) e (13), temos

$$\begin{aligned}
\phi_n(b;z) &= \frac{(b+\bar{b}+1)_n}{(b+1)_n} \, {}_2F_1(-n, b+1; b+\bar{b}+1; 1-z) \\
&= \frac{(b+\bar{b}+1)_n}{(b+1)_n} \frac{\Gamma(b+\bar{b}+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(\bar{b})} \int_0^1 t^b (1-t)^{\bar{b}-1} [1-(1-z)t]^n \, dt.
\end{aligned}$$

Devido a (6), temos que $(b+\bar{b}+1)_n = \dfrac{\Gamma(b+\bar{b}+1+n)}{\Gamma(b+\bar{b}+1)}$ e $(b+1)_n = \dfrac{\Gamma(b+1+n)}{\Gamma(b+1)}$. Isso segue que

$$\phi_n(b;z) = \frac{\Gamma(b+\bar{b}+n+1)}{\Gamma(b+n+1)\Gamma(b)} \int_0^1 t^b (1-t)^{\bar{b}-1} \left[1-(1-z)t\right]^n dt,$$

para $n \geq 1$.

Note que

$$\phi_n^*(b;z) = z^n \overline{\phi_n(b;1/\bar{z})} = z^n \frac{\Gamma(b+\bar{b}+n+1)}{\Gamma(\bar{b}+n+1)\Gamma(\bar{b})} \int_0^1 t^{\bar{b}} (1-t)^{b-1} \left[1-(1-1/z)t\right]^n dt,$$

ou seja,

$$\phi_n^*(b;z) = \frac{\Gamma(b+\bar{b}+n+1)}{\Gamma(\bar{b}+n+1)\Gamma(\bar{b})} \int_0^1 t^{\bar{b}} (1-t)^{b-1} \left[z-(z-1)t\right]^n dt.$$

Fazendo a mudança de variável $u = 1-t$, segue que

$$\phi_n^*(b;z) = \frac{\Gamma(b+\bar{b}+n+1)}{\Gamma(\bar{b}+n+1)\Gamma(\bar{b})} \int_0^1 (1-u)^{\bar{b}} u^{b-1} \left[1-(1-z)u\right]^n du,$$

para $n \geq 1$.

$\square$

Teorema 8 Seja

$$D(b;z) = \exp\left(\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log(\omega(b;\theta)) d\theta\right).$$

Então,

$$D(b;z) = \frac{|\Gamma(b+1)|}{\sqrt{\Gamma(b+\bar{b}+1)}} \frac{\Gamma(\bar{b})}{\Gamma(b)} (1-z)^b,$$

para $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Demonstração. Pelo Teorema 7, temos

$$\kappa_n^{(b)} \phi_n^*(b;z) = \kappa_n^{(b)} \frac{\Gamma(b+\bar{b}+n+1)}{\Gamma(\bar{b}+n+1)\Gamma(\bar{b})} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{\bar{b}} (1-(1-z)t)^n dt.$$

Fazendo a mudança de variável $u = nt$, segue que

$$\kappa_n^{(b)} \phi_n^*(b;z) = \kappa_n^{(b)} \frac{\Gamma(b+\bar{b}+n+1)}{\Gamma(\bar{b}+n+1)\Gamma(\bar{b})} \frac{1}{n^b} \int_0^n u^{b-1} \left(1-\frac{u}{n}\right)^{\bar{b}} \left(1-(1-z)\frac{u}{n}\right)^n du.$$

Note que $e^z = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$, assim,

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-(1-z)\frac{u}{n}\right)^n = e^{-(1-z)u}.$$

Pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue e o Teorema 6, para $0 < z < 1$, obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} \kappa_n^{(b)} \phi_n^*(b;z) = \frac{\sqrt{\Gamma(b+\bar{b}+1)}}{|\Gamma(b+1)|} \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{\Gamma(b+\bar{b}+n+1)}{\Gamma(\bar{b}+n+1)\Gamma(\bar{b})} \frac{1}{n^b}\right] \int_0^{+\infty} u^{b-1} e^{-(1-z)u} du,$$

uma vez que $\lim_{n\to+\infty}\left(1-(1-z)\frac{u}{n}\right)^n = e^{-(1-z)u}$.

Pelo livro [5] temos

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z+d)} \sim z^{a-d} \quad \text{quando} \quad z \longrightarrow +\infty,$$

ou seja,

$$\lim_{z\to+\infty} \frac{\Gamma(z+a)}{z^{a-d}\Gamma(z+d)} = 1.$$

Se fizermos $z = n,\ a = b + \bar{b} + n + 1,\ d = \bar{b} + n + 1,$ então $a - d = b$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\Gamma(b+\bar{b}+n+1)}{n^b\Gamma(\bar{b}+n+1)} = 1.$$

Logo,

$$\lim_{n\to+\infty} \kappa_n^{(b)}\phi_n^*(b;z) = \frac{\sqrt{\Gamma(b+\bar{b}+1)}}{|\Gamma(b+1)|}\frac{1}{\Gamma(\bar{b})}\int_0^{+\infty} u^{b-1}e^{-(1-z)u}du.$$

Fazendo $t = (1-z)u$, assim

$$\int_0^{+\infty} u^{b-1}e^{-(1-z)u}du = \frac{1}{(1-z)^b}\int_0^{+\infty} t^{b-1}e^{-t}dt = \frac{\Gamma(b)}{(1-z)^b}.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to+\infty} \kappa_n^{(b)}\phi_n^*(b;z) = \frac{\sqrt{\Gamma(b+\bar{b}+1)}}{|\Gamma(b+1)|}\frac{1}{\Gamma(\bar{b})}\frac{\Gamma(b)}{(1-z)^b}.$$

Para $\operatorname{Re}(b) > 0$, a sequência $\left(\kappa_n^{(b)}\phi_n^*(b;z)\right)$ converge uniformemente para $D(b;z)^{-1}$ em subconjunto compacto de $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. Disso segue que

$$D(b;z) = \frac{|\Gamma(b+1)|}{\sqrt{\Gamma(b+\bar{b}+1)}}\frac{\Gamma(\bar{b})}{\Gamma(b)}(1-z)^b.$$

□

Observe novamente que aqui há uma certa diferença no Teorema 8 com relação ao resultado dado no artigo [1]. Lá encontramos a fórmula $D(b;z) = \frac{|\Gamma(b+1)|}{\sqrt{\Gamma(b+\bar{b}+1)}}(1-z)^b$ e aqui $D(b;z) = \frac{|\Gamma(b+1)|}{\sqrt{\Gamma(b+\bar{b}+1)}}\frac{\Gamma(\bar{b})}{\Gamma(b)}(1-z)^b$.

4 Conclusão

Apresentamos explicitamente as demonstrações dos resultados dados em [1] sobre os polinômios $\phi_n(b;z)$ representados por funções hipergeométricas dados em (13). Com o conhecimento adquirido podemos continuar os estudos dos polinômios dados por

$$B_n(b,\rho;z) = \frac{\phi_n(b;z) + \rho\phi_n^*(b;z)}{1 + \rho\overline{\phi_n(b;0)}},$$

onde $\rho \in \mathbb{C}$ e $|\rho| = 1$. A representação do polinômios $B_n(b, \rho, z)$ mostra que é um polinômio para-ortogonal de grau n. Uma propriedade importante destes polinômios é que eles possuem n zeros simples localizados na circunferência unitária $C = \{z : |z| = 1\}$. Isso é diferente dos polinômios ϕ_n que têm seus zeros, não necessariamente simples e estão dentro do círculo unitário aberto $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$.

5 Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga e Profa. Dra. Cleonice Fátima Bracciali, por todo apoio durante todos esses anos e pelo apoio financeiro à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo número 2018/00396-5.

6 Referências Bibliográficas

[1] SRI RANGA, A. Szegö polynomials from hypergeometric functions. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 138, n. 12, p. 4259–4270, 2010.

[2] SIMON, B. **Orthogonal polynomials on the unit circle**: part 1: classical theory. Providence, R. I.: American Mathematical Society, 2004. (American Mathematical Society colloquium publications, v. 54).

[3] ANDREWS, G. E.; ASKEY, R.; ROY, R. **Special functions**. Cambridge; New York: Cambridge University Press, 2000. (Encyclopedia of mathematics and its applications).

[4] CONWAY, J. B. **Functions of one complex variable**. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1995. (Graduate texts in mathematics).

[5] OLVER, F. W. J. *et al* (ed.). **NIST handbook of mathematical functions**. Cambridge; New York: Cambridge University Press, 2010.