Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 20, jul. 2021

Cinco problemas sobre potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em Olimpíadas Internacionais de Matemática

Five problems about the power of a point in relation to a circumference and radical axis in International Mathematics Olympics

Juan López Linares
Faculdade de Zootecnia e Engenharia de Alimentos
Universidade de São Paulo
jlopez@usp.br

João Paulo Martins dos Santos
Academia da Força Aérea–AFA
Pirassununga-SP
jp2@alumni.usp.br

Alessandro Firmiano de Jesus
Academia da Força Aérea–AFA
Pirassununga-SP
lezandro@gmail.com

Resumo

Três problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) e dois para a Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO) são discutidos em detalhe. Todos relacionados à potência de um ponto relativo a uma circunferência, ao teorema das cordas e eixo e centro radical. Porém, uma combinação de outros conteúdos também são requeridos: equação quadrática, teorema de Pitágoras, circuncentro de um triângulo, retas tangentes, ângulos inscritos e de segmentos, quadriláteros cíclicos ou inscritíveis, semelhanças e congruências. As demonstrações envolvidas nas soluções são complementadas pela disponibilização dos respectivos links das figuras interativas usando o Geogebra. É esperado que o artigo possa ser apreciado tanto por estudantes que se preparam para as fases finais de competições nacionais ou internacionais, quanto por professores que atuam no ensino e se interessem em problemas mais desafiadores.
Palavras-chave: Olimpíadas Internacionais de Matemática. Potência de um ponto em relação a uma circunferência. Ensino Médio e Universitário. Geometria.

Abstract

Three problems proposed for the International Mathematical Olympiad (IMO) and two for the Iranian Geometry Olympiad (IGO) are discussed in detail. All are related to the power of a point relative to a circumference and radical axis. The solutions, however, require the combination of other contents: quadratic equation, Pythagorean theorem, circumcenter of a triangle, tangent lines, inscribed and segment angles, cyclic or inscribable quadrilaterals and similarities and congruences of triangles. Demonstrations are complemented by links to interactive constructions in Geogebra. It is expected that the article can be appreciated both by students who are preparing for the final stages of national or international competitions, and by teachers interested in more challenging problems.
Keywords: International Mathematics Olympics. Power of a point in relation to a circle. High School and University. Geometry.

Artigo recebido em jan. 2021 e aceito em mar. 2021

Este artigo está licenciado com uma Licença Creative Commons Attribution 4.0 International, podendo ser usado, distribuído e reproduzido, sem restrições, desde que o trabalho original seja devidamente citado.

1 Introdução

Uma mostra da importância das Olimpíadas Internacionais de Matemática é que a participação de um programa de computador como concorrente virou um dos próximos desafios da inteligência artificial (HARTNETT, 2020). Isto acontece após diferentes softwares terem vencido os grandes mestres dos jogos de Xadrez e Go.

O raciocínio matemático é o elemento desafiador na obtenção de tais softwares (SAXTON *et al*, 2019). Não chegamos a entender e resolver problemas somente baseados na experiência, mas também pelo poder de inferir e explorar leis, axiomas e regras de manipulação de símbolos. Às vezes, a ideia inicial ou ponto de partida, resulta ser a mais difícil de encontrar.

Neste contexto, ao resolver problemas de olimpíadas internacionais de Matemática pretendemos incentivar estudantes e professores do Ensino Fundamental e Médio a aumentar seus conhecimentos, pois são desafios que requerem uma solução em múltiplos passos, onde se integram várias habilidades.

As soluções apresentadas complementam algumas disponíveis em fóruns em língua inglesa. Usando argumentos menos rebuscados, focamos na apresentação mais detalhada das transições, possibilitando que alunos em níveis menos avançados consigam acompanhar o desenvolvimento do problema. Adicionalmente, uma versão interativa das figuras do texto também é disponibilizada no site do Geogebra.

No primeiro problema são dadas duas circunferências tangentes externamente e uma reta que intercepta cada uma delas em dois pontos formando três segmentos de igual medida. É pedido encontrar o comprimento comum dos segmentos e sob quais restrições essa construção é possível.

O segundo problema apresenta três circunferências tangentes externamente entre si e a duas linhas paralelas. É pedido mostrar que o circuncentro do triângulo formado pelos pontos de tangências das circunferências entre si coincide com a interseção de dois segmentos da construção.

No terceiro problema é dado um triângulo retângulo e um ponto X na altura correspondente ao ângulo reto. Várias construções são feitas a partir de X. Se pede demonstrar que dois segmentos têm igual medida. Uma das chaves para a solução é perceber que X é o centro radical de três circunferências.

O quarto problema usa a igualdade de um ângulo inscrito com um de segmento para provar que determinada reta é tangente a uma circunferência. A solução envolve descobrir duas de quatro circunferências usadas e dois centros radicais.

No problema cinco um triângulo acutângulo e uma circunferência são dados. Um conjunto adicional de construções é feito e se pede mostrar a congruência de dois ângulos. Durante a solução outras duas circunferências são encontradas e o centro radical das mesmas.

Anteriormente discutimos problemas de olimpíadas internacionais de Matemática sobre Série Harmônica (LÓPEZ LINARES; BRUNO-ALFONSO; BARBOSA, 2020a), Desigualdades (LÓPEZ LINARES; BRUNO-ALFONSO; BARBOSA, 2020b) e Partições (LÓPEZ LINARES, 2020).

Iniciamos com uma introdução dos conceitos básicos sobre a potência de um ponto relativo a uma circunferência, o teorema das cordas e a teoria de eixo e centro radical.

2 Conceitos básicos

Dado um ponto P, uma circunferência c e uma reta que passa por P e intercepta c nos pontos A e B (corda AB) o produto $PA \cdot PB$ é invariante quando A e B variam. Esse resultado é conhecido

como Teorema das Cordas e será apresentado formalmente nas próximas linhas. Mas antes vamos definir a potência de um ponto relativo a uma circunferência.

Definição 1. *Seja c uma circunferência de raio r e um ponto P no mesmo plano a uma distância d do centro de c. A potência do ponto P, relativo a c, será denotada como $Pot_c(P)$ e calculada por $Pot_c(P) = d^2 - r^2$.*

Segue da definição que, se P é um ponto no exterior de c, então $Pot_c(P) > 0$. No caso em que $P \in c$, temos $Pot_c(P) = 0$ e quando P é um ponto interior a c teremos $-r^2 \leq Pot_c(P) < 0$.

Teorema 2 (Teorema das Cordas)**.** *Sejam A, B, C, D e P (K, L, M, N e J) pontos do plano tais que $AB \cap CD = \{P\}$ ($KM \cap LN = \{J\}$). O quadrilátero $ABCD$ ($KLMN$) é inscritível se, e somente se, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ ($JK \cdot JM = JL \cdot JN$).*

A Figura 1 ilustra duas construções geométricas possíveis relativas ao Teorema 2. No lado esquerdo, quando o ponto P é exterior à circunferência c e o direito, quando o ponto J é interior à circunferência e.

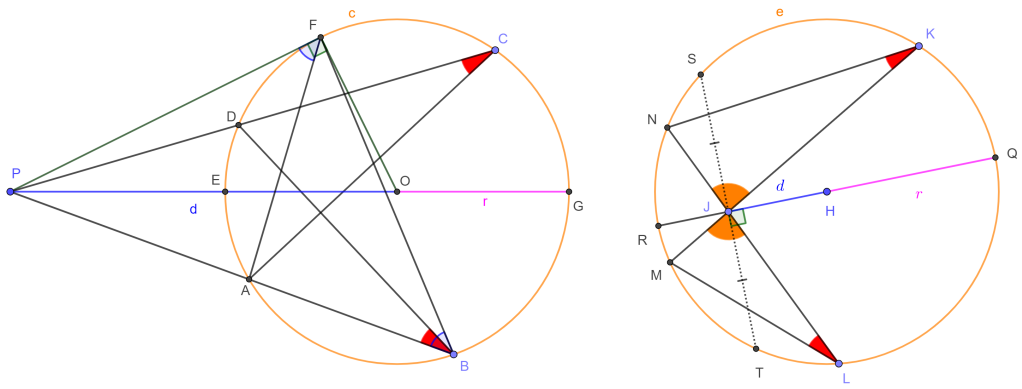

Figura 1: O lado esquerdo ilustra o caso em que P é um ponto exterior à circunferência c, $r = OG$ e $d = PO$. O lado direito, quando o ponto J é interior à circunferência e, $r = HQ$ e $d = JH$. O ponto $F \in c$ é de tangência e ilustra o caso particular em que C e D se aproximam a ele. Versão interativa aqui.

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, que o quadrilátero $ABCD$ ($KLMN$) é inscritível.

Os ângulos ACD e ABD (MKN e MLN) são congruentes, pois enxergam o mesmo arco menor AD (MN). No lado esquerdo, temos $\angle CPA = \angle BPD$ (comum) e no lado direito $\angle KJN = \angle LJM$ (opostos pelo vértice). Consequentemente, pelo critério ângulo-ângulo, temos $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ ($\triangle KJN \sim \triangle LJM$).

Os lados correspondentes em triângulos semelhantes são proporcionais:

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} = \frac{AC}{DB},$$

$$\frac{JK}{JL} = \frac{JN}{JM} = \frac{KN}{LM}.$$

Das equações anteriores encontramos que

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD, \tag{1}$$

$$JK \cdot JM = JL \cdot JN. \tag{2}$$

Reciprocamente, suponhamos que valem (1) e (2). Segue que

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB},$$

$$\frac{JK}{JL} = \frac{JN}{JM}.$$

Adicionalmente, no lado esquerdo da Figura 1 temos $\angle CPA = \angle BPD$ (comum) e no lado direito $\angle KJN = \angle LJM$ (opostos pelo vértice). Pelo critério de semelhança lado-ângulo-lado segue que $\triangle PAC \sim \triangle PDB$ e $\triangle KJN \sim \triangle LJM$. Como consequência, $\angle ACD = \angle ABD$ e $\angle MKN = \angle MLN$. Isto é, os quadriláteros $ABCD$ e $KLMN$ são inscritíveis. □

Observação 3. *Estudaremos agora um caso particular no lado esquerdo da Figura 1. O segmento PF é tangente a circunferência c. Os ângulos PFA e PBF são congruentes, pois um é de segmento e o segundo inscrito em relação a corda AF. Consequentemente, pelo critério ângulo-ângulo, temos $\triangle PFA \sim \triangle PBF$.*

Da proporcionalidade dos lados encontramos:

$$\frac{PF}{PB} = \frac{PA}{PF},$$

$$PF^2 = PA \cdot PB. \tag{3}$$

A equação (3) *pode ser obtida de* (1) *simplesmente notando que quando o ponto C se aproxima de F o ponto D também o faz.*

Por outro lado, um caso particular no lado direito da Figura 1 é escolher a corda com menor comprimento passando por J. Isto é, ST, perpendicular ao segmento JH. Temos que $SJ = JT$, logo $Pot_e(J) = SJ^2 = JT^2$.

Observação 4. *Ainda usando como referência a Figura 1 consideramos a reta PO (JH) que determina o diâmetro EG (RQ). Chamando $PO = d$ e $EO = GO = r$ ($JH = d$ e $RH = QH = r$) e usando as equações* (1)*,* (2) *e* (3) *podemos escrever:*

$$PF^2 = PA \cdot PB = PE \cdot PG = (d - r)(d + r) = d^2 - r^2 = Pot_c(P),$$

$$JK \cdot JM = JR \cdot JQ = (r - d)(r + d) = r^2 - d^2 = -Pot_e(J).$$

Resumimos os resultados anteriores no Corolário a seguir.

Corolário 5. *Seja c uma circunferência, P um ponto no mesmo plano e a reta que passa por P intercepta c nos pontos A e B. Vale que*

$$PA \cdot PB = |Pot_c(P)|.$$

Definição 6. *Eixo radical é o nome dado ao lugar geométrico dos pontos que possuem a mesma potência com relação a duas circunferências c e d. Isto é, o ponto P pertence ao eixo radical quando $Pot_c(P) = Pot_d(P)$.*

Proposição 7. *O eixo radical a duas circunferências é uma reta perpendicular ao segmento que contém os centros das mesmas.*

A Figura 2 ilustra uma construção geométrica possível relativa à Proposição 7.

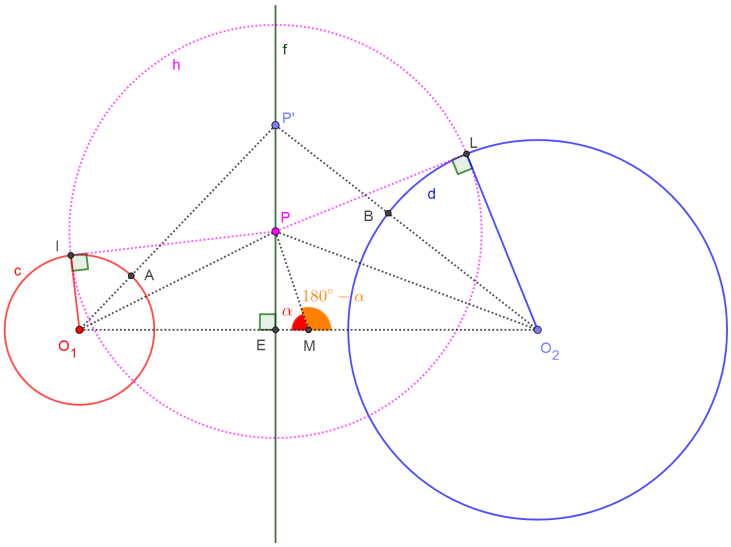

Figura 2: O eixo radical f (verde) das circunferências c (vermelho) e d (azul) é uma reta perpendicular a O_1O_2. Todo ponto P do eixo radical é centro de uma circunferência h que intercepta a c e d perpendicularmente. M é o ponto médio de O_1O_2. Versão interativa aqui.

Demonstração. Usaremos a Figura 2 como referência. Suponhamos, inicialmente, que $Pot_c(P) = Pot_d(P)$. Iremos mostrar que o ponto P pertence a uma reta perpendicular à O_1O_2.

Sejam $I \in c$ e $L \in d$ tal que $PI \perp O_1I$ e $PL \perp O_2L$. Usando a Definição 1 temos:

$$Pot_c(P) = PO_1^2 - O_1I^2 = PO_2^2 - O_2L^2 = Pot_d(P), \tag{4}$$

$$PO_2^2 - PO_1^2 = O_2L^2 - O_1I^2. \tag{5}$$

Sejam E e M a projeção do ponto P sobre O_1O_2 e ponto médio de O_1O_2, respectivamente. Seja $\angle PMO_1 = \alpha$, segue que $\angle PMO_2 = 180° - \alpha$. Escrevemos agora a lei dos cossenos no $\triangle PMO_2$ e no $\triangle PMO_1$:

$$PO_2^2 = PM^2 + MO_2^2 - 2 \cdot PM \cdot MO_2 \cdot \cos(180° - \alpha),$$

$$PO_2^2 = PM^2 + MO_2^2 + 2 \cdot PM \cdot MO_2 \cdot \cos(\alpha), \tag{6}$$

$$PO_1^2 = PM^2 + MO_1^2 - 2 \cdot PM \cdot MO_1 \cdot \cos(\alpha). \tag{7}$$

Como $MO_2 = MO_1$, $MO_1 + MO_2 = O_1O_2$ e subtraindo (7) de (6), encontramos:

$$PO_2^2 - PO_1^2 = 2 \cdot PM \cdot O_1O_2 \cdot \cos(\alpha). \tag{8}$$

Adicionalmente,

$$PM \cdot \cos(\alpha) = EM. \tag{9}$$

Substituindo (5) e (9) em (8) encontramos:

$$O_2L^2 - O_1I^2 = 2 \cdot O_1O_2 \cdot EM,$$

$$EM = \frac{O_2L^2 - O_1I^2}{2 \cdot O_1O_2}.$$

Este último resultado indica que EM é um número que somente depende dos raios das duas circunferências e da distância entre elas, mas não de P. Isto é, os pontos do eixo radical pertencem a reta $f \perp O_1O_2$ e $E \in f$.

Reciprocamente, iremos provar que todo ponto $P' \in f$ pertence ao conjunto de pontos chamado eixo radical.

Pelo Teorema de Pitágoras temos:

$$P'O_2^2 = P'E^2 + EO_2^2,$$

$$P'O_1^2 = P'E^2 + EO_1^2,$$

$$PO_2^2 = PE^2 + EO_2^2,$$

$$PO_1^2 = PE^2 + EO_1^2.$$

Das equações anteriores subtraindo as duas primeiras e as duas últimas:

$$P'O_2^2 - P'O_1^2 = EO_2^2 - EO_1^2,$$

$$PO_2^2 - PO_1^2 = EO_2^2 - EO_1^2,$$

$$P'O_2^2 - P'O_1^2 = PO_2^2 - PO_1^2. \tag{10}$$

Sejam A e B as interseções dos segmentos PO_1 e PO_2 com c e d, respectivamente. De (5) temos:

$$PO_2^2 - PO_1^2 = O_2L^2 - O_1I^2 = O_2B^2 - O_1A^2. \tag{11}$$

Usando (10) e (11) encontramos

$$P'O_2^2 - P'O_1^2 = O_2B^2 - O_1A^2,$$

$$P'O_2^2 - O_2B^2 = P'O_1^2 - O_1A^2,$$

$$Pot_d(P') = Pot_c(P').$$

Isto é, todo ponto $P' \in f$ pertence ao eixo radical. Logo, a reta f, perpendicular a O_1O_2, é o lugar geométrico dos pontos que possuem a mesma potência com relação as circunferências c e d. □

A Figura 2 e a equação (4) também mostram que todo ponto P do eixo radical é centro de uma circunferência h que intercepta a c e d perpendicularmente.

Quando duas circunferências são tangentes o eixo radical das mesmas passa pelo ponto de tangência, uma vez que a potência deste ponto é zero com respeito às duas (Figura 3, parte superior esquerda).

No caso em que as duas circunferências são secantes o eixo radical passa pelos pontos de interceptação, pois a potência destes é zero com respeito às duas (Figura 3, parte superior direita).

Pode ser mostrado que para três circunferências com centros não colineares os eixos radicais dos pares concorrem em um ponto C, denominado centro radical (Figura 3, parte inferior). A potência de C é a mesma em relação às três circunferências e C é o único ponto com esta propriedade. Outros exemplos podem ser encontrados em (MUNIZ NETO, 2013).

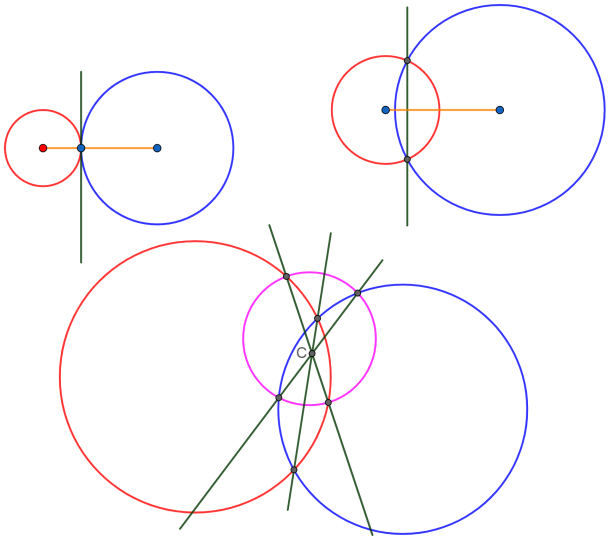

Figura 3: Exemplos de eixo radical (linhas em verde). Parte superior esquerda, quando duas circunferências são tangentes o eixo radical das mesmas passa pelo ponto de tangência. Parte superior direita, no caso em que as duas circunferências são secantes o eixo radical passa pelos pontos de interceptação. Parte inferior, para três circunferências com centros não colineares os eixos radicais dos pares concorrem em um ponto C denominado centro radical. A potência de C é a mesma em relação às três circunferências. Versão interativa aqui.

3 Eixo radical, teorema de Tales, equação quadrática. SL IMO 1971 P4

Problema 1. *Duas circunferências tangentes em um plano, com raios r_1 e r_2, são dadas. Uma reta intercepta as duas circunferências em quatro pontos determinando três segmentos de igual medida. Encontrar o comprimento dos segmentos em função de r_1 e r_2 e as condições sobre as quais o problema tem solução.*

A IMO 1971 foi realizada nas cidade de Bratislava e Zilina, na Eslováquia (INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD, 2019). O problema acima foi proposto pela delegação do Reino Unido (DJUKIC *et al*, 2006).

3.1 Resolução

A Figura 4 ajuda entender a descrição que segue. Resolveremos o problema em um sistema cartesiano de coordenadas. Para tal colocamos o eixo x passando pelo centro das duas circunferências e o eixo y pelo ponto de tangência, O. Consideramos que as circunferências Γ_1 (azul) e Γ_2 (vermelha), com centros em O_1 e O_2, têm raios r_1 e r_2, respectivamente.

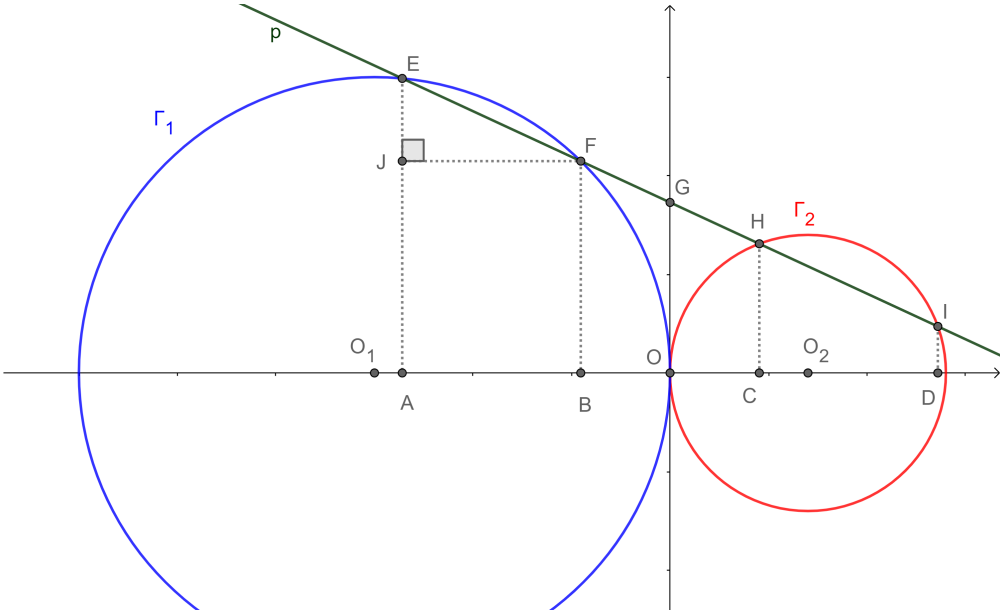

Figura 4: Uma solução do Problema 1. As circunferências Γ_1 e Γ_2 com centros em O_1 (azul) e O_2 (vermelha) têm raios r_1 e r_2, respectivamente. A reta p intercepta as duas circunferências em quatro pontos determinando três segmentos de igual medida. Versão interativa aqui.

Seja p a reta (verde) de equação

$$y = ax + b, \tag{12}$$

com a e b números reais a serem determinados, que intercepta a Γ_1 em E e F e a Γ_2 em H e I, respectivamente. G é o ponto de interseção de p com o eixo y.

Por hipótese temos $EF = FH = HI = d$. Os pontos $A = (x_A, 0)$, $B = (x_B, 0)$, $C = (x_C, 0)$ e $D = (x_D, 0)$ são as projeções ortogonais dos pontos E, F, H e I sobre o eixo x, respectivamente. Segue pelo teorema de Tales que

$$AB = BC = CD = x_B - x_A = x_C - x_B = x_D - x_C = d_x.$$

Como vimos anteriormente, o eixo radical de duas circunferências tangentes passa pelo ponto de tangência e é perpendicular a linha que une os centros das mesmas. Isto é, o eixo y na figura acima é o conjunto de pontos com a mesma potência em relação a Γ_1 e Γ_2. Em particular, para o ponto G podemos escrever

$$GE \cdot GF = GI \cdot GH.$$

Sejam $u = GF$ e $v = GH$, segue que

$$(d + u) \cdot u = (d + v) \cdot v,$$

$$u + v = d.$$

Resolvendo o sistema das duas equações anteriores se encontra que

$$u = v = \frac{d}{2}.$$

O resultado anterior implica que $GE = 3GF$ e $GI = 3GH$. Usando novamente o teorema de Tales temos que $OA = 3OB$ e $OD = 3OC$ ou

$$x_A = 3x_B, \tag{13}$$

$$x_D = 3x_C. \tag{14}$$

Por outro lado, a equação em coordenadas cartesianas da circunferência Γ_1 é

$$(x + r_1)^2 + y^2 = r_1^2,$$

$$x^2 + y^2 + 2xr_1 = 0. \tag{15}$$

A equação em coordenadas cartesianas da circunferência Γ_2 é

$$(x - r_2)^2 + y^2 = r_2^2,$$

$$x^2 + y^2 - 2xr_2 = 0. \tag{16}$$

Substituindo (12) em (15) encontramos que x_A e x_B satisfazem

$$x^2 + (ax + b)^2 + 2xr_1 = 0,$$

$$\left(1 + a^2\right) x^2 + 2\left(ab + r_1\right) x + b^2 = 0.$$

Resolvendo a equação quadrática anterior encontramos

$$x_A = \frac{-\left(ab + r_1\right) - \sqrt{\left(ab + r_1\right)^2 - \left(1 + a^2\right) b^2}}{1 + a^2}, \tag{17}$$

$$x_B = \frac{-\left(ab + r_1\right) + \sqrt{\left(ab + r_1\right)^2 - \left(1 + a^2\right) b^2}}{1 + a^2}. \tag{18}$$

Segue que

$$d_x = x_B - x_A = \frac{2\sqrt{\left(ab + r_1\right)^2 - \left(1 + a^2\right) b^2}}{1 + a^2}. \tag{19}$$

Usando as equações (13), (17) e (18) encontramos

$$ab + r_1 = 2\sqrt{\left(ab + r_1\right)^2 - \left(1 + a^2\right) b^2}. \tag{20}$$

Logo, substituindo (20) em (19) temos

$$d_x = x_B - x_A = \frac{ab + r_1}{1 + a^2}. \tag{21}$$

De forma análoga, substituindo (12) em (16) encontramos que x_C e x_D satisfazem

$$x^2 + (ax + b)^2 - 2xr_2 = 0,$$

$$\left(1 + a^2\right) x^2 + 2\left(ab - r_2\right) x + b^2 = 0.$$

Resolvendo a equação quadrática anterior encontramos

$$x_C = \frac{r_2 - ab - \sqrt{\left(ab - r_2\right)^2 - \left(1 + a^2\right) b^2}}{1 + a^2}, \tag{22}$$

$$x_D = \frac{r_2 - ab + \sqrt{(ab - r_2)^2 - \left(1 + a^2\right) b^2}}{1 + a^2}. \tag{23}$$

Segue que

$$d_x = x_D - x_C = \frac{2\sqrt{(ab - r_2)^2 - \left(1 + a^2\right) b^2}}{1 + a^2}. \tag{24}$$

Usando as equações (14), (22) e (23) encontramos

$$r_2 - ab = 2\sqrt{(ab - r_2)^2 - \left(1 + a^2\right) b^2}. \tag{25}$$

Logo, substituindo (25) em (24) temos

$$d_x = x_D - x_C = \frac{r_2 - ab}{1 + a^2}. \tag{26}$$

De (21) e (26) segue que

$$ab = \frac{r_2 - r_1}{2}. \tag{27}$$

Como também vale que $d_x = x_C - x_B$ e temos (22) e (18), então

$$d_x = \frac{r_2 + r_1 - \sqrt{(ab - r_2)^2 - \left(1 + a^2\right) b^2} - \sqrt{(ab + r_1)^2 - \left(1 + a^2\right) b^2}}{1 + a^2}. \tag{28}$$

Da igualdade de (26) e (28) e substituindo (27) encontramos

$$\frac{r_1 - r_2}{2} = r_1 - 2\sqrt{\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 - b^2 - \left(\frac{r_2 - r_1}{2}\right)^2},$$

$$b^2 = \frac{14 r_1 r_2 - r_1^2 - r_2^2}{16}. \tag{29}$$

Elevando ao quadrado (27) e usando (29) encontramos

$$a^2 = \frac{4\left(r_2 - r_1\right)^2}{14 r_1 r_2 - r_1^2 - r_2^2}. \tag{30}$$

De (26), (27) e (30) segue que

$$d_x = \frac{14 r_1 r_2 - r_1^2 - r_2^2}{6\left(r_1 + r_2\right)}.$$

Adicionalmente, aplicando o teorema de Pitágoras, por exemplo, no triângulo EFJ, temos $d = \sqrt{1 + a^2} d_x$. Segue que

$$d = \sqrt{\frac{14 r_1 r_2 - r_1^2 - r_2^2}{12}}.$$

Como r_1 e r_2 são números positivos devemos ter $14 r_1 r_2 - r_1^2 - r_2^2 > 0$. Isto é, $r_1^2 - 2 r_1 r_2 + r_2^2 < 12 r_1 r_2$. Logo somente existe solução quando

$$\frac{\left(r_1 - r_2\right)^2}{r_1 r_2} < 12.$$

Chamando $\lambda = \frac{r_1}{r_2}$ a desigualdade anterior pode ser reescrita como

$$\lambda^2 - 14\lambda + 1 < 0.$$

A mesma se verifica quando

$$7 - 4\sqrt{3} < \lambda < 7 + 4\sqrt{3},$$

$$7 - 4\sqrt{3} < \frac{r_1}{r_2} < 7 + 4\sqrt{3}.$$

4 Eixo radical, teorema de Pitágoras e semelhança de triângulos. SL IMO 1994 P15

Problema 2. *Uma circunferência w é tangente a duas linhas paralelas l_1 e l_2. Uma segunda circunferência w_1 é tangente a l_1 em A e a w externamente em C. Uma terceira circunferência w_2 é tangente a l_2 em B, externamente a w em D e a w_1 externamente em E. Os segmentos AD e BC se interceptam no ponto Q. Provar que Q é o circuncentro do triângulo CDE.*

A IMO 1994 foi realizada em Hong Kong, região administrativa especial chinesa (INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD, 2019). O problema acima foi proposto pela delegação da Rússia (DJUKIC *et al*, 2006).

4.1 Resolução

A Figura 5 será usada como referência para auxiliar na interpretação.

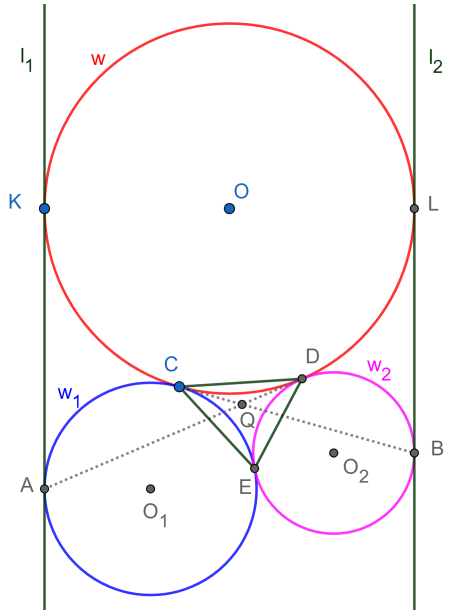

Figura 5: Construção geométrica para auxiliar na interpretação do Problema 2. Versão interativa aqui.

Sejam as circunferências w, w_1 e w_2 de centros O, O_1 e O_2 e raios r, r_1 e r_2, respectivamente. Sejam os pontos K e L de tangência de w com l_1 e l_2, respectivamente.

A ideia da prova será mostrar que a reta AD é uma tangente comum às circunferências w e w_2. Com isto, a reta AD é o eixo radical de w e w_2. Analogamente, mostrando que a reta BC é uma tangente comum às circunferências w e w_1, segue que a reta BC é o eixo radical de w e w_1. Consequentemente, Q é o centro radical das três circunferências: w, w_1 e w_2. O centro radical tem a mesma potência em relação às três circunferências, logo equidista dos pontos de tangência C, D e E.

Iniciamos conetando os centros das circunferências e traçando o diâmetro KL. Como K e L são pontos de tangência o diâmetro KL é perpendicular a l_1 e l_2. Determinamos os pontos H e J como os pés das perpendiculares a KL que passam por O_1 e O_2, respectivamente. O ponto I é encontrado na interseção da reta JO_2 com uma reta paralela a KL passando por O_1 (Figura 6).

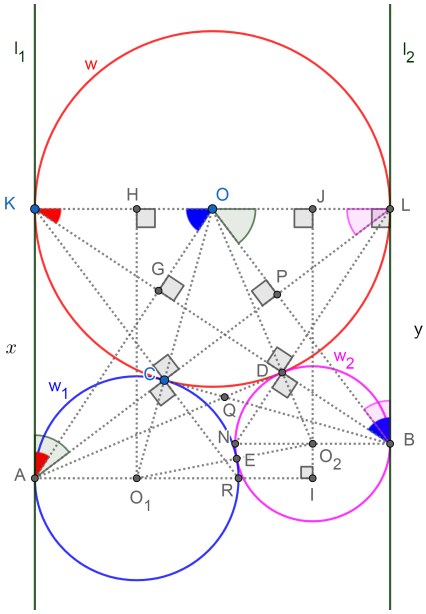

Figura 6: Construção adicional para auxiliar na interpretação do Problema 2. Versão interativa aqui.

Sejam $KA = HO_1 = x$ e $LB = JO_2 = y$. Temos que $OO_1 = r + r_1$, $OO_2 = r + r_2$, $O_1O_2 = r_1 + r_2$, $HO = r - r_1$, $OJ = r - r_2$, $O_1I = 2r - r_1 - r_2$ e $O_2I = x - y$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo O_1HO, retângulo em H, temos

$$x^2 = (r + r_1)^2 - (r - r_1)^2,$$

$$x^2 = 4rr_1. \tag{31}$$

Analogamente, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo O_2JO, retângulo em J, temos

$$y^2 = (r + r_2)^2 - (r - r_2)^2,$$

$$y^2 = 4rr_2. \tag{32}$$

E aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo O_1IO_2, retângulo em I, temos

$$(x - y)^2 = (r_1 + r_2)^2 - (2r - r_1 - r_2)^2,$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = 4rr_1 + 4rr_2 - 4r^2. \tag{33}$$

Substituindo (31) e (32) em (33) encontramos

$$xy = 2r^2,$$

$$\frac{x}{r} = \frac{2r}{y}. \tag{34}$$

A equação (34) implica que os triângulos AKO e KLB são semelhantes pelo critério LAL, um par de lados proporcionais e o ângulo compreendido entre os mesmos congruente ($\angle AKO = \angle BLK = 90°$). Segue KB é perpendicular a AO, pois $AK \parallel BL$ e $KO \parallel KL$. Seja $G = KB \cap AO$, temos $\angle OGD = 90°$.

Seja $N \in w_2$ tal que NB é diâmetro. Temos que $\angle NDB = \angle KDL = 90°$, logo $D = BK \cap NL$. Como o triângulo OKD é isósceles de base KD ($OK = OD$) e OG é altura segue que OG também é bissetriz do ângulo KOD e $\angle KOG = \angle DOG$. Os triângulos AKO e ADO são congruentes por LAL (AO é comum e KO e DO são raios de w). Concluímos que $\angle AKO = \angle ADO = 90°$ e a reta AD é tangente a w e w_2.

Analogamente, a equação (34) também implica que os triângulos AKL e BLO são semelhantes pelo critério LAL, um par de lados proporcionais e o ângulo compreendido entre os mesmos congruente ($\angle AKL = \angle BLO = 90°$). Segue AL é perpendicular a BO, pois $AK \parallel BL$ e $LK \parallel LO$. Seja $P = AL \cap BO$, temos $\angle OPC = 90°$.

Seja $R \in w_1$ tal que AR é diâmetro. Temos que $\angle ACR = \angle KCL = 90°$, logo $C = AL \cap KR$. Como o triângulo OCL é isósceles de base CL ($OL = OC$) e OP é altura segue que OP também é bissetriz do ângulo COL e $\angle COP = \angle LOP$.

Os triângulos COB e LOB são congruentes por LAL (OB é comum e CO e LO são raios de w). Concluímos que $\angle OLB = \angle OCB = 90°$ e a reta BC é tangente a w e w_1.

5 Potência de um ponto, eixo radical, quadrilátero inscritível e semelhança de triângulos. IMO 2012 P5.

Problema 3. *Seja ABC um triângulo tal que $\angle BCA = 90°$, e seja C_0 o pé da altura relativa a C. Seja X um ponto no interior do segmento CC_0. Seja K o ponto do segmento AX tal que $BK = BC$. Analogamente, seja L o ponto do segmento BX tal que $AL = AC$. Seja M o ponto de interseção de AL com BK. Provar que $MK = ML$.*

A IMO 2012 foi realizada na cidade de Mar del Plata, Argentina (INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD, 2019).

5.1 Resolução

A Figura 7 ajuda entender a descrição que segue.

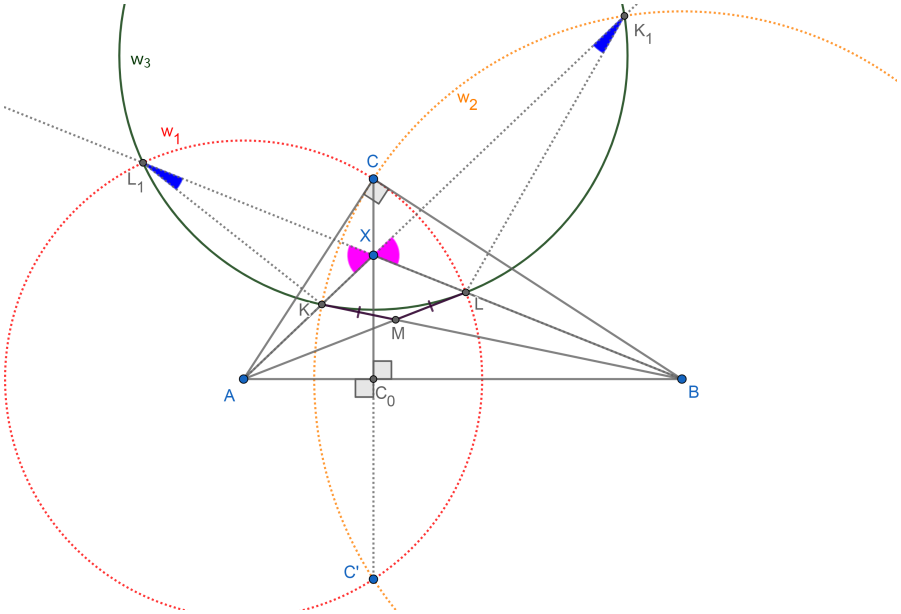

Figura 7: Uma solução do Problema 3. Versão interativa aqui.

Seja C' a reflexão do ponto C na linha AB, e w_1 e w_2 circunferências com centros A e B, que passam por L e K, respectivamente. Devido a $AC' = AC = AL$ e $BC' = BC = BK$, tanto w_1 como w_2 passam por C e C'. De $\angle BCA = 90°$ temos que AC é tangente a w_2 em C, e BC é tangente a w_1 em C. Seja $K_1 \neq K$ a segunda interseção de AX e w_2, e $L_1 \neq L$ a segunda interseção de BX e w_1.

Notamos que X é um ponto do eixo radical das circunferências w_1 e w_2, pois $X \in CC'$. Pelo Teorema das Cordas, a potência do ponto X com relação a w_2 e w_1 pode ser escrita como:

$$Pot_{w_2}(X) = XK \cdot XK_1 = XC \cdot XC' = XL \cdot XL_1 = Pot_{w_1}(X). \tag{35}$$

Da equação (35) segue que

$$\frac{XK}{XL} = \frac{XL_1}{XK_1}.$$

O resultado anterior e o fato que $\angle L_1XK = \angle K_1XL$ (opostos pelo vértice) indicam que $\triangle L_1XK \sim \triangle K_1XL$. Como consequência temos que $\angle KL_1X = \angle LK_1X$, o qual leva a que o quadrilátero K_1LKL_1 é inscritível (circunferência w_3).

Notamos que X também é um ponto do eixo radical das circunferências w_1 e w_3, pois $X \in LL_1$ e das circunferências w_2 e w_3, pois $X \in KK_1$. Isto é, X é o centro radical de w_1, w_2 e w_3.

A potência de A com relação a w_2 pode ser calculada de duas formas:

$$AC^2 = Pot_{w_2}(A) = AK \cdot AK_1.$$

Como, por hipótese, $AC = AL$ temos que:

$$AL^2 = AK \cdot AK_1 = Pot_{w_3}(A).$$

Isto é, AL é tangente a w_3.

Analogamente, a potência de B com relação a w_1 pode ser calculada de duas formas:

$$BC^2 = Pot_{w_1}(B) = BL \cdot BL_1.$$

Por hipótese $BC = BK$, logo:

$$BK^2 = BL \cdot BL_1 = Pot_{w_3}(B).$$

Isto é, BK é tangente a w_3. Segue que MK e ML são duas tangentes de M a w_3 e $MK = ML$.

6 Tangência a uma circunferência, ângulos inscritos e de segmento, potência de um ponto e eixo radical. P8 NA IGO 2014-5.

Problema 4. *O triângulo ABC é acutângulo com $AC > AB$, de circunferência circunscrita c e circuncentro O. A linha tangente a c em A intercepta a continuação de BC em P. X é o ponto de OP tal que $\angle AXP = 90°$. Os pontos $E \in AB$ e $F \in AC$ são escolhidos no mesmo lado de OP e satisfazem que $\angle EXP = \angle ACX$ e $\angle FXO = \angle ABX$. Se K, L são os pontos de interseção de EF com c, mostrar que OP é tangente ao circuncírculo d do $\triangle KLX$.*

Problema 8 (Nível Avançado) da 1 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2014-2015, proposto por Mahdi Etesami Fard (IGO, 2014).

6.1 Resolução

A Figura 8 mostra uma construção geométrica inicial para o Problema 4.

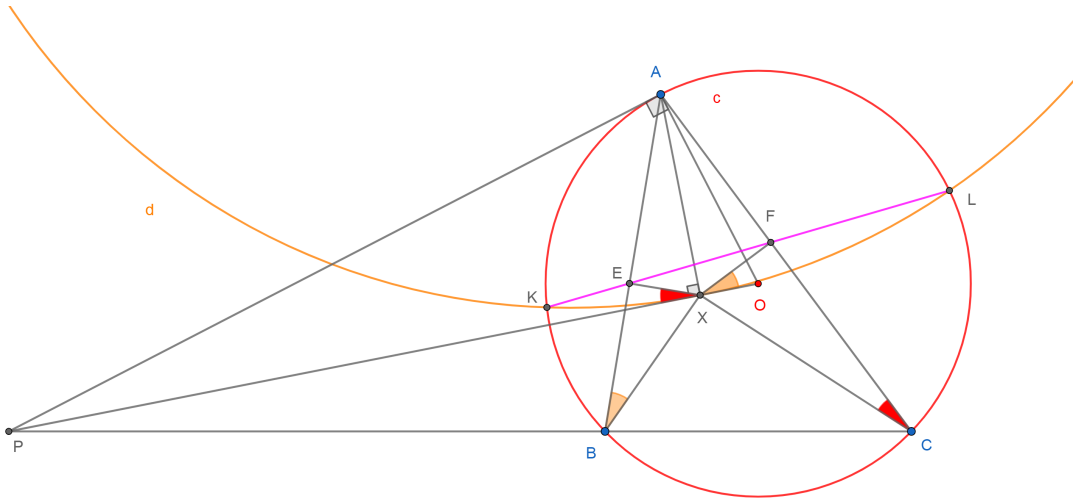

Figura 8: Construção geométrica inicial do Problema 4. Versão interativa aqui.

Sejam M e N na continuação de XF e XE tal que M, L, X e K e N estejam na mesma circunferência d.

A seguir provaremos que $\angle AMX = \angle ACX = \angle NXP$. Depois que N, A e M são colineares, logo $\angle AMX = \angle NMX$. Em referência à corda NX de d o $\angle NMX$ é inscrito. No caso de tangência de PX com d o $\angle NXP$ é de segmento. Sendo válido que $\angle NMX = \angle NXP$ estará demonstrada a tangência de PO com d.

O ponto F está sobre o eixo radical das circunferências c e d. Logo podemos calcular a potência de F como $XF \cdot FM = FL \cdot FK = AF \cdot FC$. Segue que o quadrilátero $AMCX$ é cíclico (circunferência e) e $\angle AMX = \angle ACX$. F é centro radical de c, d e e.

Analogamente, o ponto E está sobre o eixo radical das circunferências c e d. Logo podemos calcular a potência de E como $XE \cdot EN = EL \cdot EK = AE \cdot EB$. Segue que o quadrilátero $ANBX$ é cíclico (circunferência f) e $\angle ANX = \angle ABX$. E é centro radical de c, d e f.

Agora provaremos que N, A e M são colineares. Como $ANBX$ e $AMCX$ são cíclicos segue

$$\angle NAM = \angle NAE + \angle A + \angle FAM = \angle EXB + \angle A + \angle CXF.$$

Na equação anterior usaremos que a soma dos ângulos numa volta completa ao redor do ponto X é $360°$, $\angle AXE = 90° - \angle EXP = 90° - \angle ACX$ e $\angle AXF = 90° - \angle FXO = 90° - \angle ABX$:

$$\angle NAM = \angle A + 180° - \angle BXC + \angle ABX + \angle ACX =$$

$$= \angle A + 180° - \angle BXC + \angle BXC - \angle A = 180°.$$

Concluímos que $\angle AMX = \angle NMX$. Sendo válido que $\angle NMX = \angle NXP$ está demonstrada a tangência de PO com d. Em referência à corda NX de d o $\angle NMX$ é inscrito e o $\angle NXP$ é de segmento. A Figura 9 permite acompanhar a resolução do Problema 4.

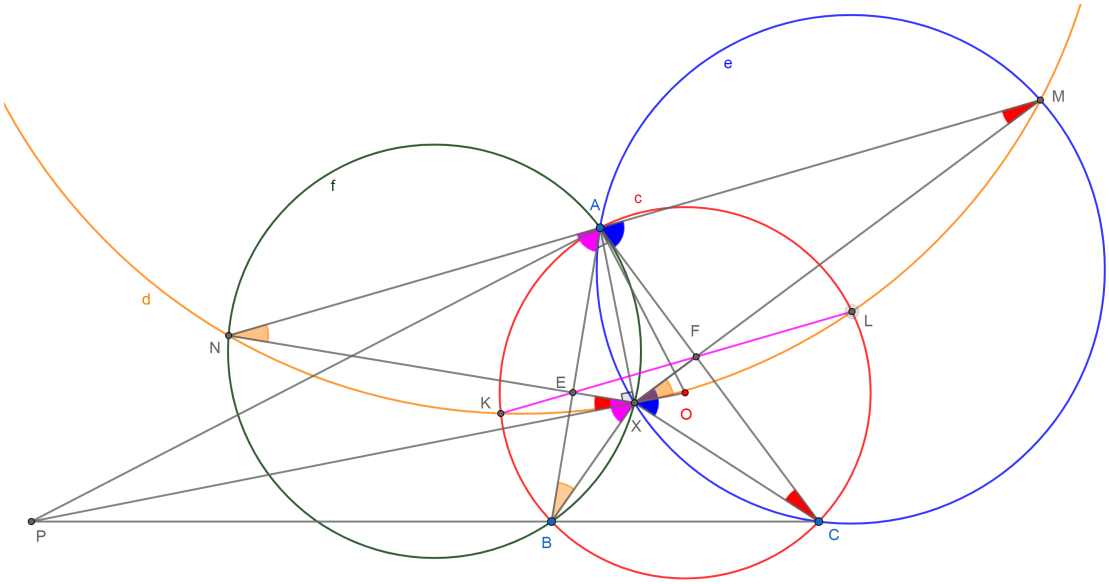

Figura 9: Guia para a resolução do Problema 4. Versão interativa aqui.

7 Quadriláteros cíclicos, potência de um ponto relativa à uma circunferência e semelhança de triângulos. P7 NA IGO 2014-5.

Problema 5. *Um triângulo acutângulo ABC é dado. Uma circunferência de diâmetro BC intercepta AB, AC em E, F, respectivamente. Seja M o ponto médio de BC e P o ponto de interseção de AM e EF. X é um ponto no arco menor de EF e Y o segundo ponto de interseção de XP com a circunferência mencionada anteriormente. Mostrar que $\angle XAY = \angle XYM$.*

Problema 7 (Nível Avançado) da 1 Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO, Iranian Geometry Olympiad) de 2014-2015, proposto por Ali Zooelm (IGO, 2014).

7.1 Resolução

A Figura 10 permite acompanhar a resolução da primeira parte do Problema 5.

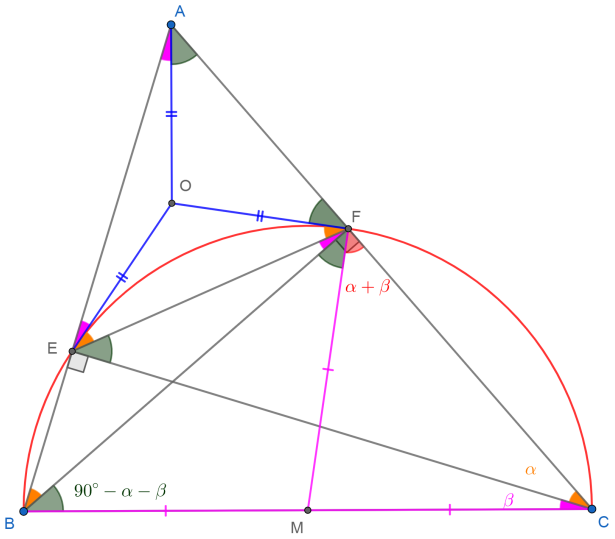

Figura 10: Guia para a resolução da primeira parte do Problema 5. Versão interativa aqui.

Temos $\angle BFC = \angle BEC = 90°$. Sejam $\angle FCE = \alpha$ e $\angle ECB = \beta$. Como $BEFC$ é um quadrilátero cíclico segue que $\angle FBE = \angle FCE = \alpha$ e $\angle EFB = \angle ECB = \beta$.

Como $MF = MB = MC$ temos $\angle MFC = \angle MCF = \alpha + \beta$ e $\angle FBC = \angle CEF = \angle MFB = 90° - \alpha - \beta$.

Também se encontram os ângulos suplementares a $\angle BEF$ e a $\angle CFE$. Isto é, $\angle AEF = \alpha + \beta$ e $\angle AFE = 90° - \beta$. Pela soma dos ângulos internos no $\triangle AEF$ segue que $\angle EAF = 90° - \alpha$.

Chamamos com a letra O ao circuncentro do $\triangle AEF$. Isto define os triângulos isósceles OEF, OFA e OAE de bases EF, FA e AE, respectivamente.

Sejam $\angle OEF = \angle OFE = x$, $\angle OEA = \angle OAE = y$ e $\angle OAF = \angle OFA = z$. Como $x + y = \alpha + \beta$, $x + z = 90° - \beta$ e $y + z = 90° - \alpha$, resolvendo o sistema encontramos $\angle OEF = \angle OFE = x = \alpha$, $\angle OEA = \angle OAE = y = \beta$ e $\angle OAF = \angle OFA = z = 90° - \alpha - \beta$. Logo, $\angle MFO = 90°$.

A Figura 11 permite acompanhar a resolução da segunda parte do Problema 5.

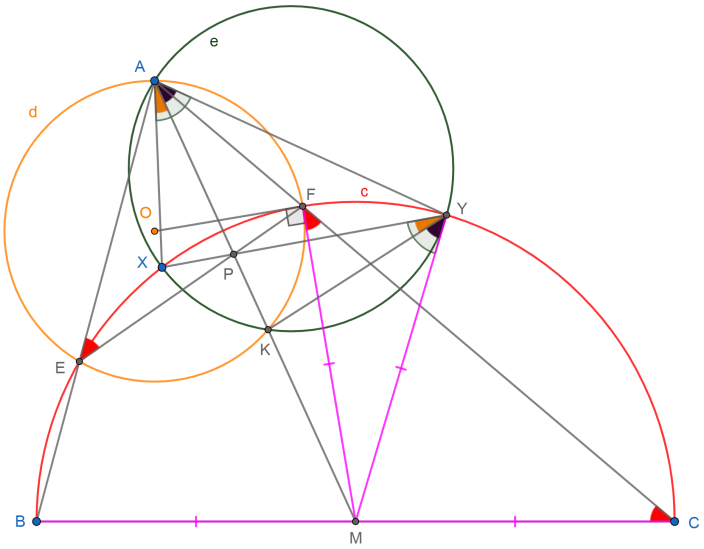

Figura 11: Guia para a resolução da segunda parte do Problema 5. Versão interativa aqui.

Suponhamos que o ponto K é a interseção de AM com o círculo circunscrito (circunferência d, em amarelo) ao $\triangle AEF$. Vimos que $\angle MFO = 90°$, então MF é tangente a d em F.

A potência do ponto M relativa à circunferência d pode ser escrita usando a tangente MF ou a corda KA: $MF^2 = MK \cdot MA$. Por outro lado, $MY = MF$. Logo, $MY^2 = MK \cdot MA$. Como $\angle AMY = \angle YMK$ (comum) e $\frac{MY}{MA} = \frac{MK}{MY}$, então pelo critério de semelhança LAL temos $\triangle MYA \sim \triangle MKY$ e $\angle YAM = \angle KYM$.

Adicionalmente, como P está no eixo radical de c e d calculamos a potência do ponto P de três formas: $AP \cdot PK = PE \cdot PF = PX \cdot PY$. Logo $AXKY$ é cíclico (circunferência e, em verde). Isto é, P é centro radical de c, d e e. Com isto, $\angle XAK = \angle XYK$. Concluímos que $\angle XAY = \angle XYM$.

8 Comentários finais

Problemas de olimpíadas são classificados como de elevado nível de dificuldade. Isto é traduzido em uma solução em múltiplos passos que combinam análise e planejamento.

Foi feita uma introdução dos conceitos básicos sobre a potência de um ponto relativo a uma circunferência, o teorema das cordas e a teoria de eixo e centro radical.

No primeiro problema foram dadas duas circunferências tangentes externamente e uma reta que intercepta cada uma delas em dois pontos formando três segmentos de igual medida. Foi pedido encontrar o comprimento comum dos segmentos e sob quais restrições essa construção é possível.

O segundo problema apresentou três circunferências tangentes externamente entre si e a duas linhas paralelas. Foi pedido mostrar que o circuncentro do triângulo formado pelos pontos de tangências das circunferências entre si coincide com a interseção de dois segmentos da construção.

No terceiro problema foi dado um triângulo retângulo e um ponto X na altura correspondente ao ângulo reto. Várias construções foram feitas a partir de X. Uma das chaves para a solução foi perceber que X é o centro radical de três circunferências.

O quarto problema usou a igualdade de um ângulo inscrito com um de segmento para provar que determinada reta é tangente a uma circunferência. A solução envolveu descobrir duas de quatro circunferências usadas e dois centros radicais.

No problema cinco um triângulo acutângulo e uma circunferência foram dados. Após explicitar construções adicionais, se pediu para mostrar a congruência de dois ângulos. Durante a solução outras duas circunferências e o centro radical das mesmas foram encontrados.

9 Referências Bibliográficas

DJUKIC, D. *et al.* **The IMO compendium:** a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2004. New York: Springer, 2006. Disponível em: http://web.cs.elte.hu/~nagyzoli/compendium.pdf. Acesso em: 15 jan. 2021.

HARTNETT, K. At the Math Olympiad, Computers Prepare to Go for the Gold. **Quanta Magazine.** 21 set. 2020. Disponível em: https://www.quantamagazine.org. Acesso em: 15 jan. 2021.

IGO. **Problems and Solutions of 1st IGO.** 2014. Disponível em: https://igo-official.ir/events/1/. Acesso em: 15 jan. 2021.

INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD. **Problems.** 2019. Disponível em: http://www.imo-official.org/problems.aspx. Acesso em: 15 jan. 2021.

LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 17, p. 127-138, fev. 2020a. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdvol17ermac202023169664jllabagfb127138. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd. Acesso em: 15 jan. 2021.

LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 78-88, jul. 2020b. DOI: 10.21167/cqdvol18202023169664jllabagfb7888. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd. Acesso em: 15 jan. 2021.

LÓPEZ LINARES, J. Três problemas sobre partições na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 19, p. 118-127, dez. 2020. DOI: 10.21167/cqdvol192020231696664jll118127. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd. Acesso em: 15 jan. 2021.

MUNIZ NETO, A. C. **Geometria.** Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção ProfMat).

SAXTON, D. *et al.* Analysing mathematical reasoning abilities of neural models. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON LEARNING REPRESENTATIONS, 7., 2019, New Orleans. **Proceedings** [...]. [*S. l.: s. n.*], 2019. Disponível em: https://arxiv.org/abs/1904.01557. Acesso em: 15 jan. 2021.