

Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 17, fev. 2020
Edição Ermac

Larissa Silva Zambrana Moraes
Faculdade de Ciências Agro-
nômicas
UNESP – Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
larissa_silvazm@hotmail.com

Eliana Contharteze Grigoletto
Faculdade de Ciências Agro-
nômicas
UNESP – Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
eliana.contharteze@unesp.br

Problemas de Stefan fracionários

Fractional Stefan problems

Resumo

O problema de Stefan é estudado na literatura científica e apresenta várias e importantes aplicações em muitos processos físicos. Neste trabalho, o problema de Stefan em uma fase, fracionário no espaço-tempo, foi resolvido usando derivadas de ordens fracionárias no tempo e espaço na equação da condução de calor de Fourier. Na variável temporal, considerou-se a derivada fracionária de ordem $\alpha \in (0, 1]$, no sentido de Caputo; na variável espacial, considerou-se a derivada fracionária de ordem 2β , com $\beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, também no sentido de Caputo. Incluindo as derivadas fracionárias no tempo e no espaço, o derretimento avança como $s \sim t^\xi$, onde $\xi = \xi(\alpha, \beta)$, sendo possível observar os comportamentos de difusão clássica ($\alpha = \beta$) e super-difusão ($\alpha > \beta$). Através do método da transformada integral de Laplace, a solução para o problema de Stefan fracionário foi obtida. Em particular, quando $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, a solução para o problema clássico com as derivadas de ordem inteira é recuperada.

Palavras-chave: Problemas de Stefan. Cálculo fracionário. Derivada fracionária de Caputo.

Abstract

The Stefan problem is well studied in the literature and presents various and important applications in many physical processes. In this work, a particular time-space fractional Stefan problem, in one-phase, including fractional order derivatives in time and space variables in the Fourier heat conduction equation was solved. For this, fractional time derivative of order $\alpha \in (0, 1]$ and fractional space derivative of order 2β with $\beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, both in the Caputo sense, were considered. Including time and space fractional derivatives, the melt front advances as $s \sim t^\xi$, where $\xi = \xi(\alpha, \beta)$, and classical diffusion ($\alpha = \beta$) and super-diffusion ($\alpha > \beta$) behaviors have been recovered. The exact solution of the fractional Stefan problem was obtained by means of the Laplace transform. The solution to the classical melting Stefan problem in one-phase is obtained with $\alpha = 1$ and $\beta = 1$.

Keywords: Stefan problems. Fractional calculus. Caputo fractional derivative.

Introdução

Em muitos processos industriais e naturais, um certo material sofre mudança de fase de uma fase para outra, ele derrete ou solidifica, e a interface sólido-líquido (ou mudança de fase), é comumente chamada de problema de Stefan (ŠARLER, 1995). O problema de Stefan apresenta várias e importantes aplicações em processos físicos que ocorrem em determinados materiais durante a transferência de calor na mudança de fase sólido-líquido (MITCHELL; VYNNYCKY, 2009), como, por exemplo, fundição de metal, conservação de alimentos, congelamento do solo, entre outras aplicações (CRANK, 1984).

O cálculo fracionário é o ramo da matemática que estuda integrais e derivadas de ordem não inteira (CAMARGO, 2009; DALIR; BASHOUR, 2010; KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006; MILLER; ROSS, 1993; SAMKO; KILBAS; MARICHEV, 1993). É tão antigo quanto o clássico cálculo diferencial e integral de ordem inteira, e é uma ferramenta muito útil no estudo de processos difusivos anômalos (METZLER; KLAFTER, 2000).

O fenômeno da difusão anômala é observado em vários sistemas complexos, incluindo polímeros, biopolímeros, proteínas, meios porosos, transporte de macromoléculas em células biológicas, fluxo turbulento, entre outros (BERKOWITZ; SCHER; SILLIMAN, 2000; COSTA; GRIGOLETTO; VAZ JR; OLIVEIRA, 2015; MARGOLIN; BERKOWITZ, 2002; SHLESINGER, 1974). Nestes casos, o deslocamento quadrático médio é uma expressão da forma $\langle x^2(t) \rangle \sim k_\xi t^\xi$. Se o expoente na variável temporal $0 < \xi < \frac{1}{2}$, então o processo é chamado de sub-difusão, na difusão clássica $\xi = \frac{1}{2}$, e se $\xi > \frac{1}{2}$, o processo é chamado de super-difusão. O cálculo fracionário vem sendo usado para modelar esses sistemas complexos, aproximando a modelagem ao que ocorre na natureza, uma vez que a utilização de derivadas fracionárias nas equações diferenciais que modelam tais fenômenos proporciona $\xi \neq \frac{1}{2}$ para o deslocamento quadrático médio (BAGLEY; TORVIK, 1983; OLIVEIRA; MAINARDI; VAZ JR, 2011; SAXENA; MATHAI; HAUBOLD, 2004).

O problema de Stefan vem sendo estudado a partir de derivadas fracionárias por alguns autores recentemente. Derivadas fracionárias nas variáveis espacial e temporal foram estudadas por Voller (2014), considerando a ordem das derivadas diferentes para cada variável. A equação de difusão com a variável temporal fracionária no sentido de Caputo foi estudada por Roscani (2016) na investigação dos problemas de Stefan fracionários com fronteira livre.

Na solução do problema de mudança de fase unidimensional, a função da interface, ou frente de fusão, é dada por $x = s(t) = k_\xi t^\xi$, em que o expoente na variável temporal pode ser $0 < \xi < \frac{1}{2}$ (sub-difusão), $\xi = \frac{1}{2}$ (difusão clássica) ou $\xi > \frac{1}{2}$ (super-difusão), e representa a posição x , em função do tempo t , da transição de fase, ou seja, é a posição que separa as fases sólida e líquida no problema de Stefan.

Este trabalho contém o detalhamento matemático dos resultados apresentados no resumo do VI ERMAC (MORAES; GRIGOLETTO, 2019, p. 496).

1 Problema de Stefan em uma fase

Nesse tipo de problema é trabalhado o processo de mudança de fase (processo de fusão ou solidificação), em que a transferência de calor é dada apenas por condução. Durante a transferência de calor, existe uma região de interface sólido-líquido de espessura nula separando as duas fases. Trata-se de um problema unidimensional no domínio semi-infinito $x > 0$.

No problema de Stefan, conforme proposto por Mitchell e Vynnycky (2009), a equação da

condução de calor de Fourier é dada por

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \text{ com } 0 < x < s(t), \text{ e } t > 0, \quad (1)$$

onde T é a temperatura adimensional na superfície x , no instante de tempo t , e conforme o tempo varia, $x = s(t)$ representa a interface sólido-líquido. Esse problema fica sujeito às condições iniciais

$$s(0) = 0, \quad (2)$$

indicando que, inicialmente, o material é completamente sólido (no processo de fusão) ou completamente líquido (no processo de solidificação),

$$T(x, 0) = 0, \quad (3)$$

que representa a temperatura inicial em qualquer posição $x > 0$. O problema também fica sujeito às condições de fronteira

$$T(0, t) = 1, \quad (4)$$

com isso, a temperatura é mantida constante na posição $x = 0$,

$$T(s(t), t) = 0, \quad (5)$$

ou seja, a temperatura na posição de interface sólido-líquido é nula. A condição de Stefan para o problema é dada por

$$\sigma \frac{ds}{dt} = - \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=s(t)}, \text{ com } \sigma > 0, \quad (6)$$

que representa a velocidade da interface, onde σ é o número de reciprocidade de Stefan (St).

A solução analítica para o problema nas equações (1)–(6) é baseada na solução de Neumann (ALEXIADES, 1992), e é obtida através da transformação da equação diferencial parcial na equação (1) em uma equação diferencial ordinária por meio de uma mudança de variáveis. A solução é dada por:

$$s(t) = 2\mu\sqrt{t}, \quad (7)$$

$$T(x, t) = 1 - \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)}{\operatorname{erf}(\mu)}, \quad (8)$$

onde $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\tau^2} d\tau$ é a função erro. Os parâmetros σ e μ devem satisfazer a seguinte equação transcendental

$$\sqrt{\pi}\sigma\mu \operatorname{erf}(\mu) e^{\mu^2} = 1. \quad (9)$$

2 Cálculo fracionário

O cálculo fracionário é uma ferramenta útil no estudo de processos difusivos anômalos e desempenha um papel importante em muitos problemas (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006). Neste ramo, trabalha-se com derivadas e integrais de ordem não inteira, que são uma generalização das de ordem inteira. Existem diversas formas de definir tais integrais e derivadas, dependendo da sua aplicação.

A seguir, serão introduzidas a derivada fracionária de Caputo e a função de Mittag-Leffler.

2.1 Derivada fracionária de Caputo

A derivada fracionária de Caputo à esquerda, de uma função $f \in C^n [0, b]$, com respeito a y , de ordem $\alpha > 0$, com $\alpha \notin \mathbb{N}$, é definida por:

$$({}^c D_{0+}^\alpha f)(y) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\int_0^y \frac{f^{(n)}(\tau)}{(y-\tau)^{1-n+\alpha}} d\tau \right), \quad \text{para } 0 \leq y \leq b, \quad (10)$$

onde¹ $n = [\alpha] + 1$ e $\Gamma(\cdot)$ denota a função gama. Se $\alpha = n \in \mathbb{N}$, então $({}^c D_{0+}^n f)(y) := f^{(n)}(y)$.

Seja $I = [a, b]$ um intervalo da reta real \mathbb{R} , $\mu > -1$ e $\alpha > 0$, com $\alpha \notin \mathbb{N}$. Para $x \in I$, temos que

$${}_x D_{a+}^\alpha [(x-a)^\mu] = \begin{cases} 0, & \text{para } \mu = 0, 1, 2, \dots, [\alpha], \\ \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\alpha+1)} (x-a)^{\mu-\alpha}, & \text{para } \mu > [\alpha]. \end{cases} \quad (11)$$

Se $\mu = 0$ na equação (11), então ${}_x D_{a+}^\alpha 1 = 0$, com isso, nota-se que a derivada de Caputo de uma constante k é ${}_x D_{a+}^\alpha k = 0$.

A transformada de Laplace da derivada de Caputo à esquerda de uma função $\phi(x, t)$, com respeito a t , é dada por

$$\mathcal{L} [{}_t D_{0+}^\alpha \phi](x, s) = s^\alpha \mathcal{L} [\phi](x, s) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} s^{\alpha-1-k} \frac{\partial^{(k)} \phi}{\partial t^k}(x, 0^+). \quad (12)$$

2.2 Função de Mittag-Leffler

A função clássica de Mittag-Leffler, denotada por $E_\alpha(x)$, é definida por

$$E_\alpha(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma(\alpha j + 1)}, \quad (\alpha > 0). \quad (13)$$

Já a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, $E_{\alpha, \beta}(x)$, é uma generalização da função acima e é definida por

$$E_{\alpha, \beta}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)}, \quad (\alpha, \beta > 0). \quad (14)$$

Duas relações importantes usadas na resolução do problema de Stefan fracionário envolvem as funções de Mittag-Leffler $E_2(x)$ e $E_{2,2}(x)$, descritas e provadas por Camargo (2009, p. 73) e Grigoletto (2014, p. 45), respectivamente:

$$E_{2\alpha}(x) = \frac{1}{2} \left[E_\alpha(x^{\frac{1}{2}}) + E_\alpha(-(x^{\frac{1}{2}})) \right] \Rightarrow E_2(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2}. \quad (15)$$

$$E_{2,2}(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}. \quad (16)$$

¹ $[\alpha]$ indica a parte inteira de α .

Teorema 1 Seja $\Lambda = [0, b]$ um intervalo da reta real \mathbb{R} , n um número natural e $\frac{n-1}{n} < \alpha \leq 1$. Então a solução geral da equação diferencial fracionária linear

$$({}_x^c D_{0+}^{n\alpha} \varphi)(x) - \lambda \varphi(x) = 0 \quad (17)$$

pode ser escrita como

$$\varphi_\alpha(x) = \sum_{k=1}^n c_k x^{k-1} E_{n\alpha, k}(\lambda x^{n\alpha}), \quad (18)$$

onde $\{c_k\}_{k=1}^n$ são constantes arbitrárias e $x \in \Lambda$ (GRIGOLETTO; OLIVEIRA; CAMARGO, 2018).

3 Problema de Stefan fracionário

O modelo matemático na versão fracionária do problema de Stefan em uma fase e unidimensional, com o domínio semi-infinito $x > 0$, é dado por:

$${}_t^c D_{0+}^\alpha T(x, t) = {}_x^c D_{0+}^{2\beta} T(x, t), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (19)$$

onde T é a temperatura adimensional na superfície x , no instante de tempo t , e conforme o tempo varia, $x = s(t)$ representa a interface sólido-líquido, $\alpha \in (0, 1]$ e $\beta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Esse problema de Stefan fica sujeito às seguintes condições iniciais

$$s(0) = 0, \quad T(x, 0) = 0, \quad (20)$$

condições de fronteira

$$T(0, t) = 1, \quad T(s(t), t) = 0, \quad (21)$$

e condição de Stefan

$$\sigma \frac{ds}{dt} = -{}_x^c D_{0+}^\beta T(x, t) \Big|_{x=s(t)}, \quad \text{with } \sigma > 0, \quad (22)$$

que representa a velocidade da interface, onde σ é o número de reciprocidade de Stefan (St).

Para resolver a equação de Fourier com parâmetros fracionários, aplicou-se a transformada de Laplace na equação (19) e na condição de fronteira $T(0, t) = 1$ na equação (21), e usou-se a equação (18) do Teorema 1, com isso:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [{}_t^c D_{0+}^\alpha T(x, t)] &= \mathcal{L} [{}_x^c D_{0+}^{2\beta} T(x, t)], \\ s^\alpha T(x, s) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} s^{\alpha-1-k} \frac{\partial^{(k)} T}{\partial t^k}(x, 0^+) &= {}_x^c D_{0+}^{2\beta} T(x, s), \\ {}_x^c D_{0+}^{2\beta} T(x, s) - s^\alpha T(x, s) &= 0. \end{aligned}$$

De onde segue que

$$T(x, s) = \frac{1}{s} E_{2\beta} \left(s^\alpha x^{2\beta} \right) + c_2 x E_{2\beta, 2} \left(s^\alpha x^{2\beta} \right). \quad (23)$$

Se $\alpha = \beta = 1$ na equação (23), a função $T(x, s)$, reescrita pelas relações das funções de Mittag-Leffler nas equações (15) e (16), fica da seguinte forma:

$$T(x, s) = \frac{1}{s} \left(\frac{e^{\sqrt{sx}} + e^{-\sqrt{sx}}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{e^{\sqrt{sx}} - e^{-\sqrt{sx}}}{2\sqrt{s}} \right).$$

Neste caso, deve-se adotar $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{s}}$, caso contrário, a função $T(x, t)$ não obedecerá a condição de fronteira $T(s(t), t) = 0$. Assim, adotou-se $c_2 = -s^{\frac{\alpha}{2\beta}-1}$ na equação (23) por recuperar o caso inteiro. Ou seja,

$$T(x, s) = \frac{1}{s} E_{2\beta} \left(s^\alpha x^{2\beta} \right) - s^{\frac{\alpha}{2\beta}-1} x E_{2\beta,2} \left(s^\alpha x^{2\beta} \right). \quad (24)$$

Substituindo as funções de Mittag-Leffler nas equações (13) e (14) na equação (24), e tomando a transformada de Laplace inversa, obteve-se

$$T(x, t) = 1 - \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{2\beta}}} \right) \left(\frac{x^{2\beta}}{t^\alpha} \right)^j}{\Gamma(2\beta j + 2) \Gamma(-\alpha j - \frac{\alpha}{2\beta} + 1)} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^{2\beta}}{t^\alpha} \right)^j}{\Gamma(2\beta j + 1) \Gamma(1 - \alpha j)} \right]. \quad (25)$$

Adotou-se a interface $s(t)$ como sendo proporcional a $t^{\frac{\alpha}{2\beta}}$ para qualquer valor de t ,

$$s(t) = \gamma t^{\frac{\alpha}{2\beta}}, \quad (26)$$

onde γ é uma constante a ser determinada.

Sabendo que a solução deve satisfazer a condição de fronteira $T(s(t), t) = 0$, introduziu-se a constante η na função $T(x, t)$, escrevendo:

$$T(x, t) = 1 - \frac{1}{\eta} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{t^{\frac{1}{2\beta}}} \right) \left(\frac{x^{2\beta}}{t^\alpha} \right)^j}{\Gamma(2\beta j + 2) \Gamma(-\alpha j - \frac{\alpha}{2\beta} + 1)} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x^{2\beta}}{t^\alpha} \right)^j}{\Gamma(2\beta j + 1) \Gamma(1 - \alpha j)} \right]. \quad (27)$$

Substituindo a equação (31) na equação (27) e usando a condição de fronteira $T(s(t), t) = 0$, obteve-se:

$$\eta = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\gamma^{2\beta j+1}}{\Gamma(2\beta j + 2) \Gamma(-\alpha j - \frac{\alpha}{2\beta} + 1)} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma^{2\beta j}}{\Gamma(2\beta j + 1) \Gamma(1 - \alpha j)}. \quad (28)$$

Assumindo que

$$\alpha = \frac{2\beta}{1 + \beta}, \quad (29)$$

a partir da equação (22), obtém-se a equação transcendental

$$\sigma \gamma^{\beta+1} \frac{\alpha}{2\beta} \eta = \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\gamma^{2\beta j+1}}{\Gamma(2\beta j + 2 - \beta) \Gamma(-\alpha j - \frac{\alpha}{2\beta} + 1)} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma^{2\beta j}}{\Gamma(2\beta j + 1 - \beta) \Gamma(1 - \alpha j)} \right]. \quad (30)$$

Particularmente, quando $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, a solução da equação (27) coincide com a solução da equação (8), considerando $\gamma = 2\mu$.

4 Resultados

Sendo $\alpha = \frac{2\beta}{1+\beta}$, a interface fracionária na equação (31) pode ser reescrita apenas em função de β , por

$$s(t) = \gamma t^{\frac{1}{1+\beta}}. \quad (31)$$

Quando $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$, como $\alpha = \frac{2\beta}{1+\beta}$, tem-se que $\frac{2}{3} < \alpha \leq 1$.

É possível obter o processo de super-difusão quando $\alpha > \beta$, e de difusão clássica quando $\alpha = \beta$.

Na figura a seguir, a ilustração gráfica da função $\Psi = s(t, \beta)$ é exibida, com os seguintes parâmetros:

$$\gamma = 1.24, \quad \sigma = 1 \quad \frac{1}{2} < \beta \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 < t \leq 50.$$

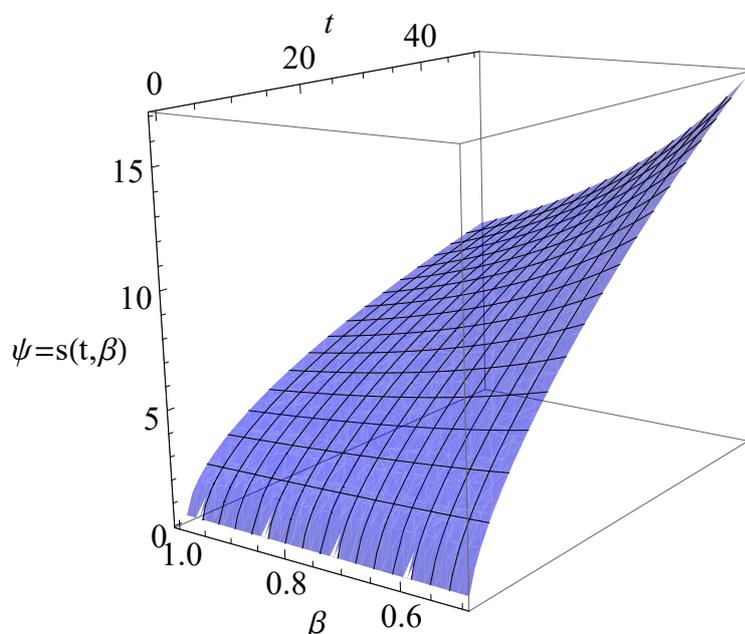


Figura 1: Gráfico da função $\Psi = s(t, \beta)$.

Na Figura 1 pode-se observar a evolução da posição de interface sólido-líquido em função do tempo, representada pela função $\Psi = s(t, \beta)$, para os casos: super-difusão ($\frac{1}{2} < \beta < 1$) e difusão clássica ($\beta = 1$). A posição de interface é tal que $s(t, \beta_1) > s(t, \beta_2)$ para $\beta_1 < \beta_2$ e $t > 1$, o que também pode ser notado através da Figura 2 a seguir, que ilustra o gráfico da função de interface fracionária $s(t)$, adotando valores fixos para β , com $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$, $0 < t \leq 10$, $\sigma = 1$ e $\gamma = 1.24$.

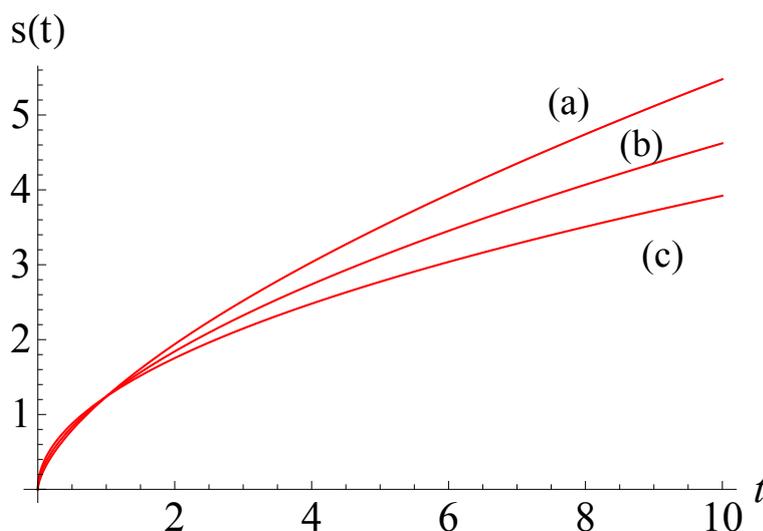


Figura 2: Gráfico da função da interface fracionária.

Na Figura 2, (a) Corresponde a $\beta = 0.55$ e $\alpha \sim 0.709$ (super-difusão); (b) Corresponde a $\beta = 0.75$ e $\alpha \sim 0.857$ (super-difusão); (c) Corresponde a $\beta = 1$ e $\alpha = 1$ (difusão clássica). Para $t > 1$, a posição de interface é maior quanto menor for o parâmetro β .

Conclusão

Durante a resolução da nova modelagem para o Problema de Stefan, adotou-se a derivada fracionária de Caputo à esquerda em ambas as variáveis espacial e temporal. A solução $T(x, t)$ generalizada do problema de Stefan através do cálculo fracionário foi obtida. A partir da solução, os processos de super-difusão ($\alpha > \beta$) e difusão clássica ($\alpha = \beta$) puderam ser observados. Quando os parâmetros fracionários α e β tendem ambos a 1, recuperou-se a solução para o problema com derivadas de ordem inteira, associada ao processo clássico de difusão. O processo de sub-difusão ($\alpha < \beta$) não foi obtido através dessa modelagem, pois, para este caso ocorrer, a condição $\beta > 1$ deveria ser adotada, o que fica como perspectivas futuras de trabalho.

Agradecimentos

As autoras agradecem aos editores e revisores do IV ERMAC – Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional e da Revista Eletrônica Paulista de Matemática–C.Q.D., pelo tempo e pelo cuidadoso trabalho de revisão, que contribuiu significativamente para o aprimoramento do presente trabalho. As autoras agradecem ainda o auxílio financeiro fornecido pela FAPESP. Processo 2018/05611-1.

5 Referências bibliográficas

ALEXIADES, V. **Mathematical modeling of melting and freezing processes**. New York: CRC Press, 1992.



- BAGLEY, R. L.; TORVIK, P. J. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. **J. Rheology**, v. 27, n. 3, p. 201–210, 1983.
- BERKOWITZ, B.; SCHER, H.; SILLIMAN, S. E. Anomalous transport in laboratory-scale, heterogeneous porous media. **Water Resour. Res.**, v. 36, n. 1, p. 149–158, 2000.
- CAMARGO, R. F. **Cálculo fracionário e aplicações**. 2009. 135 f. Tese (Doutorado em Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas 2009.
- COSTA, F. S.; GRIGOLETTO, E. C.; VAZ JR., J.; OLIVEIRA, E. C. Slowing-down of neutrons: a fractional model. **Commun. Appl. Ind. Math.**, v. 6, n. 2, 2015.
- CRANK, J. **Free and moving boundary problems**. Oxford: Clarendon Press, 1984.
- DALIR, M.; BASHOUR, M. Applications of fractional calculus. **Appl. Math. Sci.**, v. 4, n. 21, p. 1021–1032, 2010.
- GRIGOLETTO, E. C. **Equações diferenciais fracionárias e as funções de Mittag-Leffler**. 2014. 138 f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas 2014.
- GRIGOLETTO, E. C.; OLIVEIRA, E. C.; CAMARGO, R. F. Linear fractional differential equations and eigenfunctions of fractional differential operators. **Comp. Appl. Math.**, v. 37, n. 2, p. 1012–1026, 2018.
- KILBAS, A. A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J. **Theory and applications of fractional differential equations**. Amsterdam: Elsevier, 2006.
- MARGOLIN, G.; BERKOWITZ, B. Spatial behavior of anomalous transport. **Phys. Rev. E Stat. Nonlin. Soft. Matter. Phys.**, v. 65, n. 3 pt. 1, p. 031101, 2002.
- METZLER, R.; KLAFTER, J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. **Phys. Rep.**, v. 339, n. 1, p. 1–77, 2000.
- MILLER, K. S.; ROSS, B. **An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993.
- MITCHELL, S. L.; VYNNYCKY, M. Finite-difference methods with increased accuracy and correct initialization for one-dimensional Stefan problems. **Appl. Math. Comput.**, v. 215, n. 4, p. 1609–1621, 2009.
- MORAES, L. S. Z.; GRIGOLETTO, E. C. Problemas de Stefan fracionários. *In*: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 6., 2019, Bauru. **Caderno de trabalhos completos e resumos [...]**. Bauru: Unesp, Faculdade de Ciências, 2019. p. 496–497. Disponível em: <http://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/eventos2341/ermac-2019/caderno-de-trabalhos-e-resumos/>. Acesso em: 06 ago. 2019.
- OLIVEIRA, E. C.; MAINARDI, F.; VAZ JR., J. Models based on Mittag-Leffler functions for anomalous relaxation in dielectrics. **Eur. Phys. J. Special Topics**, v. 193, n. 1, p. 161–171, 2011.



ROSCANI, S. D. Hopf lemma for the fractional diffusion operator and its application to a fractional free-boundary problem. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 434, n. 1, p. 125–135, 2016.

SAMKO, S. G.; KILBAS, A. A.; MARICHEV, O. I. **Fractional integrals and derivatives: theory and applications**. Switzerland: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

ŠARLER, B. Stefan's work on solid-liquid phase change. **Eng. Anal. Bound. Elem.**, v. 16, n. 2, p. 83–92, 1995.

SAXENA, R. K.; MATHAI, A. M.; HAUBOLD, H. J. Unified fractional kinetic equation and a fractional diffusion equation. **Astrophys. Space Sci.**, v. 209, n. 3–4, p. 299–310, 2004.

SHLESINGER, M. F. Asymptotic solutions of continuous-time random walks. **J. Stat. Phys.**, v. 10, n. 5, p. 421–434, 1974.

VOLLER, V. R. Fractional Stefan problems. **Int. J. Heat Mass Transfer**, v. 74, p. 269–277, 2014.