



**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
v. 22, n. 1, jul. 2022
Iniciação Científica

Bruna Zampieri Centurion

Instituto de Biociências, Letras e
Ciências Exatas

UNESP - Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
bruna.centurion@unesp.br

O Teorema de Lax-Milgram

The Lax-Milgram's Theorem

Resumo

No estudo das equações diferenciais, pode ser um grande desafio garantir a existência e unicidade de solução para os problemas de valor de contorno utilizando apenas recursos da Análise Matemática. Neste trabalho, apresentamos o Teorema de Lax-Milgram e sua aplicabilidade no estudo de problemas de valor de contorno.

Palavras-chave: Lax-Milgram. Equações diferenciais. Problema de valor de contorno.

Abstract

In the study of differential equations, it might be a great challenge to guarantee the existence and uniqueness of solution for boundary value problems using just resources from Real Analysis. In this work, we introduce the Lax-Milgram Theorem and its applicability to solve boundary value problems.

Keywords: Lax-Milgram. Differential equations. Boundary value problems.



1 Introdução

A Análise Funcional, apesar de ser uma teoria bastante abstrata, nos fornece ferramentas bastante úteis para garantir a existência de solução para problemas reais e até mesmo para encontrar tais soluções.

Os Teoremas de Stampacchia e Lax-Milgram, temas deste artigo, a princípio se apresentam como resultados puramente teóricos. Entretanto, são muito úteis na resolução de equações diferenciais e, como veremos, nos permitem reduzir problemas complexos a outros mais simples ([1], [2]).

Neste trabalho, vamos considerar um espaço de Hilbert real, H , equipado com o produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e a norma $|\cdot|$ induzida pelo produto escalar. Denotaremos por H' o dual topológico de H . Seja $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear e $\varphi : H \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear.

Consideremos os seguintes problemas:

i) Dado $v \in H$, encontrar $u \in H$ tal que $a(u, v) = \varphi(v)$, $\forall v \in H$, i.e.,

$$\text{Encontrar } u \in H \text{ solução de } a(u, v) = \varphi(v), \forall v \in H. \quad (\text{PV})$$

ii) Dado $v \in H$, encontrar $u \in H$ tal que $J(u) \equiv \min_{v \in H} J(v)$, i.e.,

$$\text{Encontrar } u \in H \text{ solução de } J(u) \equiv \min_{v \in H} J(v), \forall v \in H, \quad (\text{PM})$$

onde $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v)$.

Os problemas (PV) e (PM) são chamados de problema variacional e problema de minimização, respectivamente.

Neste artigo, veremos que, com as condições adequadas, podemos reduzir um problema variacional a um problema de minimização, e vice-versa. Esse resultado é obtido a partir dos teoremas de Stampacchia e Lax-Milgram.

2 O Teorema de Lax-Milgram

Antes de enunciarmos o Teorema Lax-Milgram, vamos ver alguns resultados que serão necessários neste trabalho.

Teorema 1 *Sejam H um espaço de Hilbert e $\emptyset \neq K \subset H$ um subconjunto fechado e convexo. Então, para todo $x \in H$, existe um único $u \in K$ tal que*

$$|x - u| = \inf_{v \in K} |x - v| = \text{dist}(x, K).$$

Além disso, u é caracterizado pela propriedade

$$u \in K \text{ e } \langle x - u, v - u \rangle \leq 0, \forall v \in K.$$

Demonstração. Denotemos por $d = \inf_{v \in K} |x - v|$.

Afirmção 1: Existe uma sequência (v_n) em K tal que $d_n \rightarrow d$, $n \rightarrow \infty$, onde $d_n = |x - v_n|$.

De fato, como $d = \inf_{v \in K} |x - v|$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $v_\varepsilon \in K$ tal que $d \leq |x - v_\varepsilon| < d + \varepsilon$.

Para $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, existe $v_n \in K$ tal que

$$d \leq |x - v_n| < d + \frac{1}{n}.$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$, segue, do Teorema do Confronto, que $|x - v_n| \rightarrow d$.

Afirmção 2: (v_n) é de Cauchy.

De fato, pela Lei do Paralelogramo, para $m, n \in \mathbb{N}^*$, temos

$$\left| \frac{(x - v_n) + (x - v_m)}{2} \right|^2 + \left| \frac{(x - v_n) - (x - v_m)}{2} \right|^2 = \frac{|x - v_n|^2 + |x - v_m|^2}{2}$$

$$\left| x - \frac{v_n + v_m}{2} \right|^2 + \left| \frac{v_n - v_m}{2} \right|^2 = \frac{d_n^2 + d_m^2}{2}.$$

Como K é convexo, $\frac{v_n + v_m}{2} \in K$ e, daí, $\left| x - \frac{v_n + v_m}{2} \right| \geq d = \inf_{v \in K} |x - v|$. Então

$$\left| \frac{v_n - v_m}{2} \right|^2 = \frac{d_n^2 + d_m^2}{2} - \left| x - \frac{v_n + v_m}{2} \right|^2 \leq \frac{d_n^2 + d_m^2}{2} - d^2.$$

Quando $m, n \rightarrow \infty$, $\frac{d_n^2 + d_m^2}{2} \rightarrow \frac{2d^2}{2} = d^2$. Logo, $\left| \frac{v_n - v_m}{2} \right|^2 \rightarrow 0$, $m, n \rightarrow \infty$. Disto segue que $|v_n - v_m| \rightarrow 0$, $m, n \rightarrow \infty$ e, portanto, (v_n) é de Cauchy.

Agora, notemos que, como $K \subset H$ é fechado segue que $v_n \rightarrow u$, $n \rightarrow \infty$, para algum $u \in K$. Daí, como $d_n = |x - v_n| \rightarrow d$, $n \rightarrow \infty$, segue que $d = |x - u|$.

Afirmção 3: $|x - u| = \inf_{v \in K} |x - v| \Leftrightarrow \langle x - u, v - u \rangle \leq 0, \forall v \in K$.

($\Rightarrow$) De fato, seja $v \in K$. Como K é convexo, então $w = (1 - t)u + tv \in K$, $\forall t \in [0, 1]$. Daí, como $|x - u| = \inf_{v \in K} |x - v|$, então, $\forall t \in [0, 1]$,

$$|x - u| \leq |x - ((1 - t)u + tv)| = |(x - u) - t(v - u)|$$

$$|x - u|^2 \leq |(x - u)|^2 - 2t\langle x - u, v - u \rangle + t^2|(v - u)|^2$$

$$2t\langle x - u, v - u \rangle \leq t^2|(v - u)|^2$$

$$\langle x - u, v - u \rangle \leq \frac{t}{2}|(v - u)|^2.$$

Se $t \rightarrow 0$, temos $\langle x - u, v - u \rangle \leq 0, \forall v \in K$.

($\Leftarrow$) Observemos que, se $\langle x - u, v - u \rangle \leq 0, \forall v \in K$, então

$$2\langle x - u, v - u \rangle - |v - u|^2 \leq 0, \forall v \in K.$$

Agora, notemos que, para todo $v \in K$,

$$|v - x|^2 = |(v - u) + (u - x)|^2$$

$$= |v - u|^2 + 2\langle u - x, v - u \rangle + |u - x|^2$$

$$= |v - u|^2 - 2\langle x - u, v - u \rangle + |u - x|^2.$$

Daí, para todo $v \in K$,

$$-|v - x|^2 = -|v - u|^2 + 2\langle x - u, v - u \rangle - |u - x|^2$$

$$|u - x|^2 - |v - x|^2 = 2\langle x - u, v - u \rangle - |v - u|^2 \leq 0.$$

Logo, $|u - x|^2 - |v - x|^2 \leq 0$. Daí

$$|x - u| \leq |x - v|, \forall v \in K,$$

i.e., $|x - u| = \inf_{v \in K} |x - v|$.

Para provar a unicidade, basta tomarmos $u_1, u_2 \in K$ tais que $\langle x - u_1, v - u_1 \rangle \leq 0$, $\langle x - u_2, v - u_2 \rangle \leq 0$, $\forall v \in K$. Daí, para todo $v \in K$

$$\langle x - u_1, v - u_1 \rangle + \langle x - u_2, v - u_2 \rangle \leq 0.$$

Como é válido para todo $v \in K$, em particular vale para u_1 e u_2 . Fazendo $v = u_2$ em $\langle x - u_1, v - u_1 \rangle$ e $v = u_1$ em $\langle x - u_2, v - u_2 \rangle$, temos

$$\begin{aligned} \langle x - u_1, u_2 - u_1 \rangle + \langle x - u_2, u_1 - u_2 \rangle &\leq 0 \\ \langle x - u_1, u_2 - u_1 \rangle - \langle x - u_2, u_2 - u_1 \rangle &\leq 0 \\ \langle u_2 - u_1, u_2 - u_1 \rangle &\leq 0 \\ |u_2 - u_1|^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Como $|u_2 - u_1|^2 \geq 0$, então $|u_2 - u_1|^2 = 0$. Logo, $|u_2 - u_1| = 0$ e, portanto, $u_1 = u_2$. ■

O elemento u é a **projeção de x em K** e denotamos por

$$u = P_K x.$$

Proposição 2 *Sejam H um espaço de Hilbert e $\emptyset \neq K \subset H$ um subconjunto fechado e convexo. Então, P_K satisfaz*

$$|P_K x_2 - P_K x_1| \leq |x_2 - x_1|, \forall x_1, x_2 \in H.$$

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in H$, $u_1 = P_K x_1 \in K$ e $u_2 = P_K x_2 \in K$. Pelo Teorema 1, temos as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} \langle x_1 - u_1, v_1 - u_1 \rangle &\leq 0, \forall v_1 \in K, \\ \langle x_2 - u_2, v_2 - u_2 \rangle &\leq 0, \forall v_2 \in K. \end{aligned}$$

Tomando $v_1 = u_2$ e $v_2 = u_1$, segue que

$$\begin{aligned} \langle x_1 - u_1, u_2 - u_1 \rangle &\leq 0, \\ \langle x_2 - u_2, u_1 - u_2 \rangle &\leq 0. \end{aligned}$$

Observemos que $\langle x_2 - u_2, u_1 - u_2 \rangle = -\langle x_2 - u_2, u_2 - u_1 \rangle$. Daí,

$$\begin{aligned} \langle x_1 - u_1, u_2 - u_1 \rangle - \langle x_2 - u_2, u_2 - u_1 \rangle &\leq 0 \\ \langle (x_1 - u_1) - (x_2 - u_2), u_2 - u_1 \rangle &\leq 0 \\ \langle (x_1 - x_2) - (u_1 - u_2), u_2 - u_1 \rangle &\leq 0 \\ \langle x_1 - x_2, u_2 - u_1 \rangle + \langle u_2 - u_1, u_2 - u_1 \rangle &\leq 0 \\ \langle u_2 - u_1, u_2 - u_1 \rangle &\leq -\langle x_1 - x_2, u_2 - u_1 \rangle = \langle x_2 - x_1, u_2 - u_1 \rangle. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, $\langle x_2 - x_1, u_2 - u_1 \rangle \leq |x_2 - x_1| |u_2 - u_1|$. Logo, como $\langle u_2 - u_1, u_2 - u_1 \rangle = |u_2 - u_1|^2$, temos

$$|u_2 - u_1|^2 \leq |x_2 - x_1| |u_2 - u_1| \Rightarrow |u_2 - u_1| \leq |x_2 - x_1|,$$

como queríamos. ■

Proposição 3 *Sejam H um espaço de Hilbert e $f \in H$. Uma aplicação do tipo*

$$\begin{aligned} T_f : H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto T_f(u) = \langle f, u \rangle \end{aligned}$$

é um funcional linear contínuo em H .

Demonstração. Sejam $u, v \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Temos

$$T_f(\alpha u + \beta v) = \langle f, \alpha u + \beta v \rangle = \langle f, \alpha u \rangle + \langle f, \beta v \rangle = \alpha \langle f, u \rangle + \beta \langle f, v \rangle = \alpha T_f(u) + \beta T_f(v).$$

Logo, T_f é linear.

Para mostrar a continuidade, basta mostrar que T_f é limitado. De fato, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$|\langle f, u \rangle| \leq \|f\| \|u\|, \quad u \in H.$$

Denotando por $C = \|f\|$, temos

$$|T_f(u)| = |\langle f, u \rangle| \leq C \|u\|, \quad \forall u \in H.$$

Portanto, $T_f \in H'$. ■

O Teorema a seguir nos mostra que todo funcional linear contínuo num espaço de Hilbert é da forma

$$\begin{aligned} T_f : H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto T_f(u) = \langle f, u \rangle. \end{aligned}$$

Teorema 4 (Riesz-Fréchet) *Sejam H um espaço de Hilbert e $\varphi \in H'$. Então, existe um único $f \in H$ tal que*

$$\varphi(u) = \langle f, u \rangle, \quad \forall u \in H.$$

Além disso, $\|f\| = \|\varphi\|_{H'}$.

Demonstração. Definimos

$$\begin{aligned} T : H &\longrightarrow H' \\ f &\longmapsto T_f, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} T_f : H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto T_f(u) = \langle f, u \rangle. \end{aligned}$$

Afirmção 1: T é linear.

De fato, sejam $u, v \in H$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Daí, para todo $w \in H$,

$$T_{\alpha u + \beta v}(w) = \langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle = \alpha T_u(w) + \beta T_v(w).$$

Disto, temos

$$T_{\alpha u + \beta v} = \alpha T_u + \beta T_v.$$

Logo,

$$T(\alpha u + \beta v) = T_{\alpha u + \beta v} = \alpha T_u + \beta T_v = \alpha T(u) + \beta T(v).$$

Portanto, T é linear.

Agora, observemos que $|T_f(u)| = |\langle f, u \rangle| \leq |f||u|$, $\forall u \in H$. Se $|u| \leq 1$, então $|T_f(u)| \leq |f|$ e, assim, $\|T_f\|_{H'} \leq |f|$.

Notemos que $\|T_f\|_{H'} \geq |\langle f, u \rangle|$, $\forall u \in H$, $|u| \leq 1$. Tomando $u = \frac{f}{|f|}$, temos $|u| = 1 \leq 1$ e

$$\langle f, u \rangle = \left\langle f, \frac{f}{|f|} \right\rangle = \frac{1}{|f|} \langle f, f \rangle = \frac{|f|^2}{|f|} = |f|.$$

Logo,

$$\|T_f\|_{H'} \geq \left| \left\langle f, \frac{f}{|f|} \right\rangle \right| = |f| = |f|.$$

Portanto, $\|T_f\|_{H'} = |f|$.

Para finalizar a demonstração, basta mostrarmos a seguinte afirmação:

Afirmção 2: $T(H)$ é denso em H' .

De fato, seja $h \in H''$ tal que $h \equiv 0$ em $T(H) \subset H'$. Como H é reflexivo, então $h \in H$.

Agora, dado $f \in H$, temos o funcional $T_f \in T(H)$. Como $h \equiv 0$ em $T(H) \subset H'$, então $T_f(h) = 0$. Mas $0 = T_f(h) = \langle f, h \rangle$. Como $f \in H$ é arbitrário, concluímos que $h = 0$ em H . Daí, pelo Corolário 1.8 [1, p. 8], $T(H)$ é denso em H' .

Com isso, concluímos que todo $\varphi \in H'$ tem a forma

$$\begin{aligned} \varphi &= T_f : H \longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto T_f(u) = \langle f, u \rangle, \end{aligned}$$

para algum $f \in H$. ■

Definição 5 Seja H um espaço de Hilbert.

i) Uma forma bilinear $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ é **contínua** se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq C|u||v|, \forall u, v \in H;$$

ii) Uma forma bilinear $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ é **coerciva** se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(v, v) \geq \alpha|v|^2, \forall v \in H;$$

Teorema 6 (Teorema do Ponto Fixo de Banach, [3]) Sejam $X \neq \emptyset$ um espaço métrico completo e $S : X \rightarrow X$ uma contração estrita, i.e.,

$$d(Sx_1, Sx_2) \leq Kd(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in X, K < 1.$$

Então, S tem um único ponto fixo $u = Su$.

Demonstração. Seja $m \in \mathbb{N}^*$. Denotemos por S^m a m -ésima iterada de S , i.e., $\underbrace{S \circ S \circ \dots \circ S}_{m\text{-fatores}}$.

Afirmção: Como S é uma contração, segue que

$$d(S^m(x_1), S^m(x_2)) \leq K^m d(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in X.$$

De fato, para $m = 1$, $S^1 = S$ e segue da hipótese que

$$d(S^1(x_1), S^1(x_2)) \leq K^1 d(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in X.$$

Agora, para $m = 2$, temos

$$\begin{aligned} d(S^2(x_1), S^2(x_2)) &= d(S(S(x_1)), S(S(x_2))) \leq K d(S(x_1), S(x_2)) \\ &\leq K^2 d(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in X. \end{aligned}$$

Suponhamos que, para $m = n$, $n > 2$, vale

$$d(S^n(x_1), S^n(x_2)) \leq K^n d(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in X,$$

e mostremos que a desigualdade também é válida para $m = n + 1$. Temos

$$\begin{aligned} d(S^{n+1}(x_1), S^{n+1}(x_2)) &= d(S^n(S(x_1)), S^n(S(x_2))) \leq K^n d(S(x_1), S(x_2)) \\ &\leq K^{n+1} d(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in X. \end{aligned}$$

Logo, a desigualdade é válida para $m = n + 1$. Portanto, do Princípio de Indução Finita, segue a afirmação.

Da Desigualdade Triangular, segue que

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, S(x_1)) + d(S(x_1), S(x_2)) + d(S(x_2), x_2).$$

Daí, $(1 - K)d(x_1, x_2) \leq d(x_1, S(x_1)) + d(S(x_2), x_2)$ e, como $K < 1$, segue que

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{1}{1 - K} (d(x_1, S(x_1)) + d(x_2, S(x_2))). \quad (1)$$

Para mostrar a unicidade, vamos supor que existam $x_1, x_2 \in X$ tais que x_1 e x_2 são pontos fixos de S . Da desigualdade (1), temos

$$0 \leq d(x_1, x_2) \leq \frac{1}{1 - K} (d(x_1, x_1) + d(x_2, x_2)) = 0.$$

Logo, $d(x_1, x_2) = 0$ e, portanto, $x_1 = x_2$.

Agora, para mostrar a existência, tomemos $x \in H$. Definimos $x_1 = S^n(x)$ e $x_2 = S^m(x)$. Da desigualdade (1), temos

$$\begin{aligned} d(S^n(x), S^m(x)) &\leq \frac{1}{1 - K} (d(S^n(x), S^n(S(x))) + d(S^m(x), S^m(S(x)))) \\ &\leq \frac{K^n + K^m}{1 - K} d(x, S(x)). \end{aligned}$$

Observemos que, como $K < 1$, então $K^n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Logo, $K^n + K^m \rightarrow 0, m, n \rightarrow \infty$ e, assim, $d(S^n(x), S^m(x)) \rightarrow 0, m, n \rightarrow \infty$. Portanto, a sequência $(S^n(x))$ é de Cauchy e, como X é completo, tal sequência é convergente e converge para um ponto $p \in X$, i.e., $p = \lim_{n \rightarrow \infty} S^n(x)$. Como S é contínua, segue que

$$S(p) = S(\lim_{n \rightarrow \infty} S^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(S^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} S^{n+1}x = p.$$

Portanto, p é o único ponto fixo. ■

Agora que já temos as ferramentas necessárias, enunciaremos e faremos a demonstração do Teorema de Stampacchia e do Teorema de Lax-Milgram (Corolário 8).

Teorema 7 (Stampacchia) *Sejam H um espaço de Hilbert, $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua e coerciva, $\emptyset \neq K \subset H$ um subconjunto fechado e convexo. Então, dado $\varphi \in H'$, existe um único elemento $u \in K$ tal que*

$$a(u, v - u) \geq \varphi(v - u), \quad \forall v \in K. \quad (2)$$

Além disso, se a é simétrica, então u é caracterizada pela propriedade

$$u \in K \text{ e } \frac{1}{2}a(u, u) - \varphi(u) = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v) \right\}.$$

Demonstração. Pelo Teorema da Representação de Riesz-Fréchet (Teorema 4), existe um único $f \in H$ tal que

$$\varphi(v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

Dado $u \in H$, seja $\psi : H \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\psi(v) = a(u, v)$.

Afirmção 1: $\psi \in H'$.

A linearidade de ψ segue da linearidade da forma bilinear a em relação à segunda entrada.

Para $v \in H$,

$$|\psi(v)| \leq C|u||v|, \quad \forall u, v \in H.$$

onde nós temos usado o fato que a é uma forma bilinear contínua. Logo, fazendo $C|u| = K$, temos

$$|\psi(v)| \leq K|v|, \quad \forall v \in H,$$

i.e., ψ é limitada e, consequentemente, contínua. Portanto, $\psi \in H'$.

Novamente pelo Teorema da Representação de Riesz-Fréchet (Teorema 4), existe um único elemento $Au \in H$ dependente de u tal que $\psi(v) = a(u, v) = \langle Au, v \rangle, \forall v \in H$.

Observemos que o operador $A : H \rightarrow H$ é linear, pois dados $u_1, u_2 \in H, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos, para todo $v \in H$,

$$\langle A(\alpha u_1 + \beta u_2), v \rangle = a(\alpha u_1 + \beta u_2, v) = \alpha a(u_1, v) + \beta a(u_2, v) = \alpha \langle Au_1, v \rangle + \beta \langle Au_2, v \rangle,$$

pois a é uma forma bilinear. Logo,

$$\begin{aligned} \langle A(\alpha u_1 + \beta u_2), v \rangle &= \langle \alpha Au_1 + \beta Au_2, v \rangle \\ \langle A(\alpha u_1 + \beta u_2) - \alpha Au_1 + \beta Au_2, v \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Tomando $v = A(\alpha u_1 + \beta u_2) - \alpha Au_1 + \beta Au_2$, obtemos

$$\begin{aligned} |A(\alpha u_1 + \beta u_2) - \alpha Au_1 + \beta Au_2|^2 &= 0 \\ A(\alpha u_1 + \beta u_2) - \alpha Au_1 + \beta Au_2 &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, $A(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha Au_1 + \beta Au_2$.

Notemos ainda que, como a é contínua e coerciva, então para todo $u \in H$, temos

i) $|Au|^2 = \langle Au, Au \rangle = a(u, Au) \leq C|u||Au|$, i.e.,

$$|Au| \leq C|u|;$$

ii) $\langle Au, u \rangle = a(u, u) \geq \alpha|u|^2$, i.e.,

$$\langle Au, u \rangle \geq \alpha|u|^2.$$

Para mostrar a equação (2), devemos mostrar que existe um único $u \in K$ tal que

$$\langle Au, v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle, \forall v \in K. \quad (3)$$

Seja $\rho > 0$ uma constante a ser determinada depois. Observemos que (3) é equivalente a

$$\langle \rho f - \rho Au + u - u, v - u \rangle \leq 0, \forall v \in K, \quad (4)$$

ou seja, $u = P_K(\rho f - \rho Au + u)$, pelo Teorema 1.

Seja $S : K \rightarrow K$ dada por $Sv = P_K(\rho f - \rho Av + v)$.

Afirmção 2: Se $\rho > 0$ é escolhido adequadamente, então S é uma contração.

De fato, dados $v_1, v_2 \in K$, segue da Proposição 2

$$\begin{aligned} |Sv_1 - Sv_2| &= |P_K(\rho f - \rho Av_1 + v_1) - P_K(\rho f - \rho Av_2 + v_2)| \\ &\leq |(\rho f - \rho Av_1 + v_1) - (\rho f - \rho Av_2 + v_2)| \\ &= |(v_1 - v_2) - \rho(Av_1 - Av_2)|. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |Sv_1 - Sv_2|^2 &= |(v_1 - v_2) - \rho(Av_1 - Av_2)|^2 \\ &= |v_1 - v_2|^2 - 2\rho \langle Av_1 - Av_2, v_1 - v_2 \rangle + \rho^2 |Av_1 - Av_2|^2 \\ &= |v_1 - v_2|^2 - 2\rho \langle A(v_1 - v_2), v_1 - v_2 \rangle + \rho^2 |A(v_1 - v_2)|^2. \end{aligned}$$

Como $-2\rho \langle A(v_1 - v_2), v_1 - v_2 \rangle \leq -2\rho\alpha |v_1 - v_2|^2$ e $\rho^2 |A(v_1 - v_2)|^2 \leq \rho^2 C^2 |v_1 - v_2|^2$, segue que

$$|Sv_1 - Sv_2|^2 \leq |v_1 - v_2|^2 (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2) = k^2 |v_1 - v_2|^2,$$

onde, $k^2 = 1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2$. Escolhendo $\rho > 0$ de modo que k^2 seja menor do que 1, teremos que S é uma contração, ou seja, para $0 < \rho < \frac{2\alpha}{C^2}$, $1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2 < 1$ e, então, S é uma contração.

Agora, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach (Teorema 6), sabemos que S possui um único ponto fixo, i.e., existe um único $u \in K$ tal que $Su = P_K(\rho f - \rho Au + u) = u$. Com isso, mostramos a desigualdade (4) e, consequentemente, mostramos que dado $\varphi \in H'$, existe um único elemento $u \in K$ tal que

$$a(u, v - u) \geq \varphi(v - u), \forall v \in K.$$

Se a é uma forma bilinear simétrica, então a define um novo produto escalar em H .

Afirmção 3: A norma definida por esse novo produto escalar é equivalente à norma original $|\cdot|$.

De fato, como a é contínua e coerciva, então satisfaz

$$|a(u, v)| \leq C|u||v|, \forall u, v \in H \text{ e } a(v, v) \geq \alpha|v|^2, \forall v \in H,$$

para algum $C > 0$ e para algum $\alpha > 0$. Denotando por $||\cdot||$ a norma definida por esse novo produto escalar, temos, para $u \in H$,

$$||u|| = |a(u, u)|^{\frac{1}{2}} \leq C^{\frac{1}{2}} \left(|u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = C^{\frac{1}{2}} |u|,$$

e

$$||u|| = (a(u, u))^{\frac{1}{2}} \geq \alpha^{\frac{1}{2}} \left(|u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \alpha^{\frac{1}{2}} |u|.$$

Portanto, $\|\cdot\|$ e $|\cdot|$ são equivalentes.

Logo, H é também um espaço de Hilbert com esse novo produto escalar. Pelo Teorema da Representação de Riesz-Fréchet, para todo $\varphi \in H'$, existe um único $g \in H$ tal que $\varphi(v) = a(g, v)$, $\forall v \in H$.

Daí, a primeira parte do Teorema equivale a mostrar que

$$a(g - u, v - u) \leq 0, \forall v \in K.$$

Pelo Teorema 1, $u = P_K g$, i.e., u é a projeção em K de g para o novo produto escalar a . Pelo mesmo Teorema, sabemos que u é o único elemento do K que alcança

$$\min_{v \in K} a(g - v, g - v)^{\frac{1}{2}}.$$

Isso equivale a minimizar em K a função

$$v \mapsto a(g - v, g - v) = a(v, v) - 2a(g, v) + a(g, g) = a(v, v) - 2\varphi(v) + a(g, g),$$

ou, equivalentemente, a função

$$v \mapsto \frac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v).$$

Portanto, se a é simétrica, então u é caracterizada pela propriedade

$$u \in K \text{ e } \frac{1}{2}a(u, u) - \varphi(u) = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v) \right\}.$$

■

Corolário 8 (Lax-Milgram) *Sejam H um espaço de Hilbert e $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua e coerciva. Então, dado $\varphi \in H'$, existe um único elemento $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = \varphi(v), \forall v \in H.$$

Além disso, se a é simétrica, então u é caracterizada pela propriedade

$$u \in H \text{ e } \frac{1}{2}a(u, u) - \varphi(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v) \right\}.$$

Demonstração. Aplicando o Teorema de Stampacchia (Teorema 7) para $K = H$, obtemos que existe um único elemento $u \in H$ tal que

$$a(u, v - u) \geq \varphi(v - u), \forall v \in H.$$

Além disso, se a é simétrica, então u é caracterizada pela propriedade

$$u \in H \text{ e } \frac{1}{2}a(u, u) - \varphi(u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v) \right\}.$$

Como H é um espaço vetorial, então $tv \in H$, $\forall v \in H$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Daí,

$$a(u, tv - u) \geq \varphi(tv - u), \forall v \in H, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Observemos que, $\forall v \in H, \forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} a(u, tv - u) &\geq \varphi(tv - u) \\ ta(u, v) - a(u, u) &\geq t\varphi(v) - \varphi(u) \\ t(a(u, v) - \varphi(v)) &\geq a(u, u) - \varphi(u) \end{aligned}$$

Se $t > 0$, então $a(u, v) - \varphi(v) \geq \frac{1}{t}a(u, u) - \varphi(u)$. Daí, quando $t \rightarrow +\infty$, temos

$$a(u, v) - \varphi(v) \geq 0.$$

Do mesmo modo, se $t < 0$, então $a(u, v) - \varphi(v) \geq \frac{1}{t}a(u, u) - \varphi(u)$. Daí, quando $t \rightarrow -\infty$, temos

$$a(u, v) - \varphi(v) \leq 0.$$

Logo, $a(u, v) - \varphi(v) = 0, \forall v \in H$ e, daí,

$$a(u, v) = \varphi(v), \forall v \in H.$$

■

3 Aplicações

Nesta seção, mostraremos que, com as hipóteses corretas, podemos estabelecer uma equivalência entre o problema variacional e o problema de minimização, utilizando os teoremas de Stampacchia e Lax-Milgram. Mais ainda, veremos dois exemplos da aplicação do Teorema de Lax-Milgram na resolução de problemas de valor de contorno ([1]).

Teorema 9 ([2]) *Sejam H um espaço de Hilbert, $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua e coerciva, e $\varphi \in H'$. Se a é simétrica, então o problema variacional e o problema de minimização são equivalentes, i.e., os problemas possuem a mesma e única solução $u \in H$.*

Demonstração. (PV) $\Rightarrow$ (PM) Seja $u \in H$ solução do problema variacional (PV), i.e.,

$$a(u, v) = \varphi(v), \forall v \in H. \quad (5)$$

Como H é um espaço vetorial, então para todo $v \in H, u + v \in H$. Observemos que

$$\begin{aligned} J(u + v) &= \frac{1}{2}a(u + v, u + v) - \varphi(u + v) \\ &= \frac{1}{2}[a(u, u) + a(v, u) + a(u, v) + a(v, v)] - \varphi(u) - \varphi(v) \\ &= \frac{1}{2}[a(u, u) + 2a(u, v) + a(v, v)] - \varphi(u) - \varphi(v) \\ &\stackrel{(5)}{=} \left[\frac{1}{2}a(u, u) - \varphi(u) \right] + \frac{1}{2}a(v, v) - [a(u, v) - \varphi(v)] \\ &= J(u) + \frac{1}{2}a(v, v). \end{aligned}$$

Como a é coerciva, existe $\alpha > 0$ tal que $a(v, v) \geq \alpha|v|^2 \geq 0, \forall v \in H$. Logo, $\frac{1}{2}a(v, v) \geq 0, \forall v \in H$ e, daí,

$$J(u + v) \geq J(u), \forall v \in H.$$

Portanto, $J(u) \equiv \min_{v \in H} J(v), \forall v \in H$, i.e., $u \in H$ é solução do problema de minimização (PM).

(PM) $\Rightarrow$ (PV) Seja $u \in H$ solução do problema de minimização (MP), i.e.,

$$J(u) \leq J(v), \forall v \in H. \quad (6)$$

Como H é um espaço vetorial, então para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in H, u + \lambda v \in H$. Observemos que

$$\begin{aligned} J(u + \lambda v) &= \frac{1}{2}a(u + \lambda v, u + \lambda v) - \varphi(u + \lambda v) \\ &= \frac{1}{2}[a(u, u) + \lambda a(v, u) + \lambda a(u, v) + \lambda^2 a(v, v)] - \varphi(u) - \lambda \varphi(v) \\ &= \frac{1}{2}[a(u, u) + 2\lambda a(u, v) + \lambda^2 a(v, v)] - \varphi(u) - \lambda \varphi(v) \\ &= \left[\frac{1}{2}a(u, u) - \varphi(u) \right] + \frac{\lambda^2}{2}a(v, v) + \lambda[a(u, v) - \varphi(v)] \\ &= J(u) + \frac{\lambda^2}{2}a(v, v) + \lambda[a(u, v) - \varphi(v)]. \end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{\lambda^2}{2}a(v, v) + \lambda[a(u, v) - \varphi(v)] = J(u + \lambda v) - J(u) \stackrel{(6)}{\geq} 0.$$

Definimos o polinômio $P(\lambda)$ por

$$P(\lambda) \equiv \frac{\lambda^2}{2}a(v, v) + \lambda[a(u, v) - \varphi(v)], \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como $P(\lambda) \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, então o discriminante deste polinômio de segundo grau é menor ou igual a zero, i.e.,

$$\Delta = [a(u, v) - \varphi(v)]^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}a(v, v) \cdot 0 = [a(u, v) - \varphi(v)]^2 \leq 0, \forall v \in H.$$

Mas, como $[a(u, v) - \varphi(v)]^2 \geq 0, \forall v \in H$, então $[a(u, v) - \varphi(v)]^2 = 0$. Logo

$$a(u, v) - \varphi(v) = 0 \Rightarrow a(u, v) = \varphi(v), \forall v \in H.$$

Portanto, $u \in H$ é solução do problema variacional (PV). ■

Definição 10 Consideremos o problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{em } I = (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}, \quad (7)$$

onde f é uma função dada. Definimos uma função $u \in C^2(\bar{I})$ que satisfaça (7) no sentido usual como uma **solução clássica** (ou **solução forte**) do problema (7). Uma **solução fraca** de (7) é definida como uma função $u \in H_0^1(I)$ que satisfaz

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv, \forall v \in H_0^1(I). \quad (8)$$

Exemplo 11 (Condições de Dirichlet Homogêneas) Consideremos o problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{em } I = (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}, \quad (9)$$

onde $f \in L^2(I)$ é uma função dada.

Primeiramente, observemos que toda solução clássica de (9) é uma solução fraca. De fato, se $u \in C^2(\bar{I})$ é tal que $-u'' + u = f$ em $I = (0, 1)$ e $u(0) = u(1) = 0$, então $u \in H_0^1(I)$ e, para todo $v \in H_0^1(I)$ temos, utilizando a integração por partes,

$$\begin{aligned} -u''v + uv &= fv \\ \int_I (-u''v + uv) &= \int_I fv \\ \int_I u'v' + \int_I uv &= \int_I fv, \end{aligned}$$

i.e., u é uma solução fraca de (9).

Agora, definimos, em $H_0^1(I) \times H_0^1(I)$, a forma bilinear

$$a(u, v) = \int_I u'v' + \int_I uv = \langle u, v \rangle_{H^1}, \quad (u, v) \in H_0^1(I) \times H_0^1(I).$$

Notemos que a é simétrica, contínua e coerciva, uma vez que coincide com o produto escalar de $H^1(I)$.

Definimos a função

$$\begin{aligned} \varphi : H_0^1(I) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \int_I fv. \end{aligned}$$

A função φ é um funcional linear contínuo, já que, dados $u, v \in H_0^1(I)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos

$$\varphi(\alpha u + \beta v) = \int_I f(\alpha u + \beta v) = \int_I \alpha fu + \beta fv = \alpha \int_I fu + \beta \int_I fv = \alpha \varphi(u) + \beta \varphi(v),$$

e

$$|\varphi(v)| = \left| \int_I fv \right| \leq \int_I |fv| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{W_0^{1,p}} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1}.$$

Logo, $\varphi \in H^{-1}(I)$. Daí, pelo Teorema de Lax-Milgram, existe uma única $u \in H_0^1(I)$ tal que $a(u, v) = \varphi(v)$, $\forall v \in H_0^1(I)$, i.e.,

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv, \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Portanto, $u \in H_0^1(I)$ é a única solução de (8). Mais ainda, como a é simétrica, então

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \varphi(u) = \min_{v \in H_0^1(I)} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v) \right\},$$

i.e., u é única função que minimiza $\frac{1}{2}a(v, v) - \varphi(v)$, $v \in H_0^1(I)$.

Afirmção: $u \in H^2(I)$ e, se $f \in C(\bar{I})$, então $u \in C^2(\bar{I})$.

Para provarmos que $u \in H^2(I)$, precisamos mostrar que $u' \in W^{1,2}(I)$. De fato, como u satisfaz a equação (8), então, em particular,

$$\begin{aligned} \int_I u'v' + \int_I uv &= \int_I f v, \quad \forall v \in C_c^1(I), \\ \int_I u'v' &= \int_I (f - u)v, \quad \forall v \in C_c^1(I). \end{aligned} \quad (10)$$

Notemos que, como $f \in L^2(I)$, então $f - u \in L^2(I)$ e, segue da definição que $u' \in W^{1,2}(I)$, i.e., $u \in H^2(I)$.

Agora, se $f \in C(\bar{I})$, podemos considerar $u \in C(\bar{I})$ e, assim, $f - u \in C(\bar{I})$. De (10), temos $u'' = f - u$. Disto segue que $u'' \in C(\bar{I})$ e concluímos que $u \in C^2(\bar{I})$.

Por fim, observemos que toda solução fraca de classe C^2 é uma solução clássica. De fato, se $u \in C^2([a, b])$, $u(a) = u(b) = 0$ e u satisfaz (8), podemos integrar (8) por partes e obtemos

$$\int_a^b (-u'' + u - f) \varphi = 0, \quad \forall \varphi \in C^1([a, b]), \varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$

Logo,

$$\int_a^b (-u'' + u - f) \varphi = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^1((a, b)).$$

Como $u \in C^2([a, b])$, segue que $-u'' + u = f$ a.e. em $[a, b]$.

Exemplo 12 (Condições de Neumann Homogêneas) Consideremos o problema

$$\begin{cases} -u'' + u = f, & \text{em } I = (0, 1) \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}, \quad (11)$$

onde $f \in L^2(I)$ é uma função dada.

Consideremos o espaço de funções $H^1(I)$. Seja u uma solução clássica do problema (11). Então,

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I f v, \quad \forall v \in H^1(I). \quad (12)$$

Definimos, em $H^1(I) \times H^1(I)$, a forma bilinear

$$a(u, v) = \int_I u'v' + \int_I uv,$$

que é simétrica, contínua e coerciva. Definimos, também, o funcional linear

$$\begin{aligned} \varphi : H^1(I) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \int_I f v. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema de Lax-Milgram, segue que existe uma única função $u \in H^1(I)$ que satisfaz $a(u, v) = \varphi(v)$, $\forall v \in H^1(I)$, i.e., que satisfaz (12). Mais ainda, u é obtida por

$$\min_{v \in H^1(I)} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I f v \right\}.$$

Daí, procedendo como no Exemplo 11, segue que $u \in H^2(I)$ e, se $f \in C(\bar{I})$, então $u \in C^2(\bar{I})$. Usando integração por partes em (12), obtemos

$$\begin{aligned} \int_I -u''v + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) + \int_I uv &= \int_I f v, \quad \forall v \in H^1(I) \\ \int_I (-u'' + u - f)v + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) &= 0, \quad \forall v \in H^1(I). \end{aligned}$$

Escolhendo $v \in H_0^1(I)$, segue da igualdade acima que

$$\int_I (-u'' + u - f)v = 0, \quad \forall v \in H_0^1(I),$$

i.e., $-u'' + u = f$ a.e. em I . Logo,

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0, \quad \forall v \in H^1(I).$$

Daí, como v é qualquer, segue que $u'(0) = u'(1) = 0$. Portanto, u é a solução clássica de (11).

4 Agradecimentos

Ao Prof. German Lozada-Cruz (DM/IBILCE/UNESP) pela supervisão da minha iniciação científica.

À FAPESP pelo financiamento (Processo nº 2020/01046-8, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo).

Referências

- [1] BREZIS, H. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. Universitext. Nova York: Springer, 2011.
- [2] CHASKALOVIC, J. **Mathematical and numerical methods for partial differential equations**. Cham: Springer International Publishing, 2014. (Mathematical Engineering).
- [3] PALAIS, R. S. A simple proof of the Banach contraction principle. **Journal of Fixed Point Theory and Applications**, v. 2, n. 2, p. 221-223, 2007.