Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 22, n. 1, jul. 2022
Iniciação Científica

Uma relação entre a álgebra e a geometria na parábola

A relation between algebra and geometry in the parabola

Renata Teófilo de Sousa
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
rtsnaty@gmail.com

Francisco Régis Vieira Alves
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
fregis@ifce.edu.br

Resumo

Neste trabalho trazemos uma discussão sobre a parábola, pelo prisma das funções polinomiais do 2º grau e pelo viés da geometria analítica, fazendo uma ponte entre estes dois assuntos. A parábola no campo da geometria analítica comumente é dissociada do estudo da função quadrática nos livros didáticos da educação básica, sendo estes assuntos trabalhados de forma desarticulada. Assim, fazemos uma demonstração da relação entre a função quadrática e a equação da parábola a partir da forma canônica da função quadrática, visando enriquecer a discussão sobre o tema e auxiliar o docente de matemática em sua prática docente, bem como trazemos possibilidades de construção geométrica da parábola utilizando técnicas de desenho geométrico e o software GeoGebra.

Palavras-chave: Parábola. Função quadrática. Geometria Analítica. Equação da parábola. GeoGebra.

Abstract

In this work we bring a discussion about the parabola, through the prism of the polynomial functions of the 2nd degree and through the bias of analytic geometry, making a bridge between these two subjects. The parable in the field of analytic geometry is commonly dissociated from the study of the quadratic function in basic education textbooks, and these issues are worked on in a disjointed way. Thus, we demonstrate the relationship between the quadratic function and the equation of the parabola from the canonical form of the quadratic function, aiming to enrich the discussion on the subject and help the mathematics teacher in their teaching practice, as well as we bring possibilities for the geometric construction of the parabola using geometric design techniques and GeoGebra software.

Keywords: Parable. Quadratic function. Analytical Geometry. Parabola equation. GeoGebra.

Artigo recebido em out. 2021 e aceito em fev. 2022

Este artigo está licenciado com uma Licença Creative Commons Attribution 4.0 International, podendo ser usado, distribuído e reproduzido, sem restrições, desde que o trabalho original seja devidamente citado.

1 Introdução

Na Geometria analítica há uma relação entre álgebra e geometria, em que podemos analisar questões algébricas de forma geométrica e vice-versa. No caso das parábolas, estas são comumente estudadas na educação básica de forma relacionada ao gráfico de uma função quadrática, contudo seu estudo dentro do campo da geometria analítica ocorre geralmente de forma dissociada ao estudo das funções (CERQUEIRA, 2015; MACEDO, 2015; SIQUEIRA, 2016). Muitos métodos para a construção do gráfico de uma função quadrática, por exemplo, decorrem de procedimentos algébricos, sendo por vezes insuficientes para a interpretação geométrica da parábola, dificultando a compreensão pelo prisma da Geometria Analítica.

Em decorrência deste fato, há uma grande dificuldade do aluno em compreender de forma gráfica o que a equação da parábola representa e qual a relação entre suas variáveis para solucionar problemas (HALBERSTADT, 2015). A compreensão da função polinomial do 2º grau na forma canônica, onde a equação pode ser escrita a partir de seus vértices, é um caminho para compreender a equação da parábola dentro da Geometria Analítica, bem como seus elementos foco, vértice e diretriz. Contudo, ainda segundo o autor, esta abordagem é pouco explorada em sala de aula, acarretando dificuldades para o aluno ao ingressar em cursos de nível superior na área de ciências exatas e se deparar com disciplinas que demandam este conhecimento. Louzada (2013, p. 10) complementa que "no caso da parábola, se o professor não tiver o devido cuidado, o estudante pode ter a concepção da definição cíclica de que essa curva no plano é o gráfico da função quadrática e que o gráfico da função quadrática é uma parábola", desconsiderando, assim, outras formas de visualização e interpretação desta curva.

Lucena e Gitirana (2016, p. 25) apontam que o estudo da parábola ocorre por meio de "um ensino que prioriza o tratamento algébrico e deixa a desejar a interpretação geométrica do objeto matemático representado, o que dificulta um aprofundamento maior dos conceitos em foco", o que nos fez refletir sobre a importância de buscar diferentes abordagens para o ensino desta temática voltadas para a sala de aula da educação básica, bem como promover o diálogo entre a álgebra e a geometria da parábola.

Assim, trazemos neste artigo uma discussão e demonstração da relação existente entre a função quadrática e a equação da parábola, a partir da forma canônica da função do 2º grau, bem como diferentes possibilidades de construção geométrica da parábola, utilizando técnicas de desenho geométrico e o *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Deste modo, buscamos ampliar a discussão do tema e facilitar o entendimento do estudante a partir da visualização geométrica, tendo em vista que esta relação é pouco discutida nos livros didáticos.

2 O conceito de parábola

Desde muito tempo as cônicas são estudadas, em que sua definição principal foi deduzida na obra prima de Apolônio de Perga (262-190 a.C.) denominada "As Cônicas", que rendeu a este matemático o título de "O Grande Geômetra" (BOYER, 2012; EVES, 2011; FRIED, 2011). Contudo, as aplicações mais famosas das cônicas devem-se a Galileu (1564-1640) que em 1604 chegou à conclusão de que a trajetória da bala de um canhão descreve uma parábola, bem como Kepler (1571-1630) e Newton (1643-1727) que constataram por meio de suas pesquisas que as órbitas dos planetas são elípticas.

Uma observação interessante apontada por Hodgkin (2005, p. 150) é que "Galileu se esforça muito para estabelecer, usando as Cônicas de Apolônio, que um projétil descreve uma parábola, fato que se segue muito facilmente ao encontrar sua equação", no caso após usar métodos mais simplificados e esclarecidos que podem ser encontrados na obra de Apolônio.

Venturi (2003) explana que a parábola é uma cônica gerada pela secção de um plano α sobre um cone circular reto. Ou seja, a parábola é oriunda da intersecção de uma superfície cônica de segundo grau e um plano paralelo à geratriz do cone, como mostra a Figura 1:

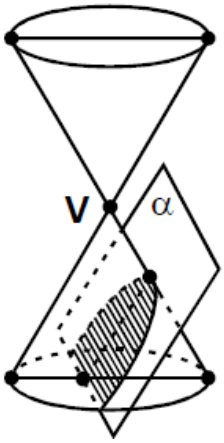

Figura 1: A cônica parábola (Venturi, 2003, p. 119)

Também podemos definir a parábola a partir do prisma da geometria analítica, como Lima (2014, p. 115), em que diz "sejam d uma reta e F um ponto fora dela. No plano determinado por d e F, chama-se parábola de foco F e diretriz d ao conjunto dos pontos equidistantes de d e F", o que pode ser representado pelo esquema dado na Figura 2:

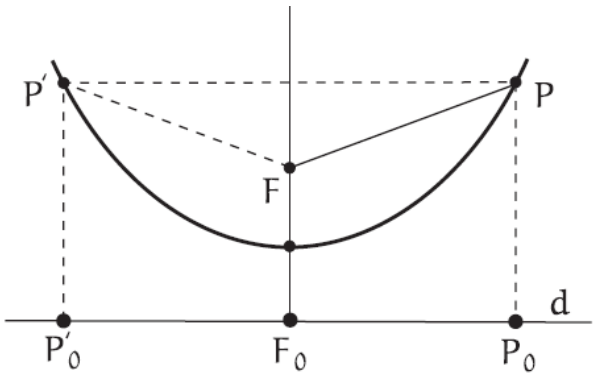

Figura 2: Representação geométrica da parábola (Lima, 2014, p. 115)

Segundo Lima (2014) o ponto P pertence à parábola de foco F e de diretriz d, pois a distância do ponto P à F é a mesma distância entre o ponto P e P_0, em que P_0 é um ponto pertencente à diretriz d. Ou seja, a $d(P,F) = d(P,P_0)$, com o segmento PP_0 perpendicular à diretriz d e a perpendicular FF_0 baixada do foco sobre a diretriz configura-se em um eixo de simetria, sendo a definição da parábola enquanto lugar geométrico.

A dedução da equação de uma parábola de foco F e diretriz d, com $p > 0$ representando a distância de F a d pode ser demonstrada como em Lima (2014) da seguinte forma, como apontada na Figura 3:

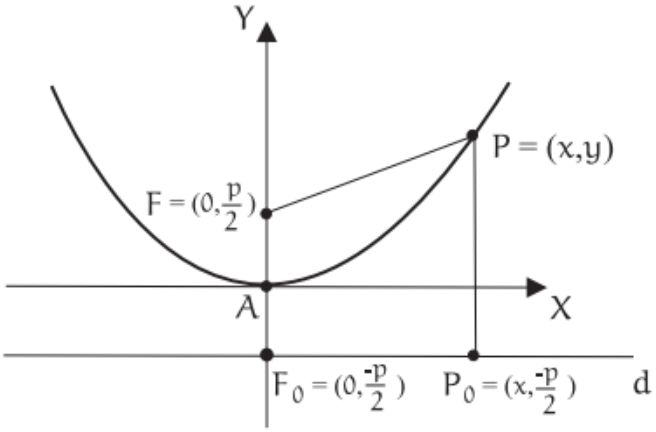

Figura 3: Dedução da equação da parábola (Lima, 2014, p. 116)

Na dedução de Lima (2014) toma-se um sistema de eixos em que o vértice da parábola é a origem do sistema e o eixo vertical, também chamado eixo de simetria, é a reta FF_0. Observe que o ponto F tem coordenadas $F = (0, \frac{p}{2})$ e a equação da diretriz d é $y = -\frac{p}{2}$. Se o ponto $P = (x, y)$ pertence à parábola, logo temos que $y \geq 0$. Sendo o eixo vertical o eixo de simetria e tendo $P = (x, y)$ pertencente à parábola, então $P' = (-x, y)$ também pertence à mesma parábola.

Deste modo, sendo $P = (x, y)$ um ponto genérico da parábola. Temos que a distância de P à diretriz d é igual a $y + p/2$, enquanto a distância de P ao foco F é $\sqrt{x^2 + (y - p/2)^2}$. E como P é um ponto pertencente à parábola, temos que:

$$y + p/2 = \sqrt{x^2 + (y - p/2)^2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado e desenvolvendo a expressão, temos:

$$(y + \frac{p}{2})^2 = x^2 + (y - p/2)^2$$
$$y^2 + py + \frac{p^2}{4} = x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4}.$$

Reduzindo os termos semelhantes temos:

$$x^2 = 2py \text{ ou } y = \frac{x^2}{2p}.$$

Esta equação representa a equação canônica da parábola com vértice na origem e eixo de simetria FF_0. Podemos observar ainda, sobre o parâmetro p, que:

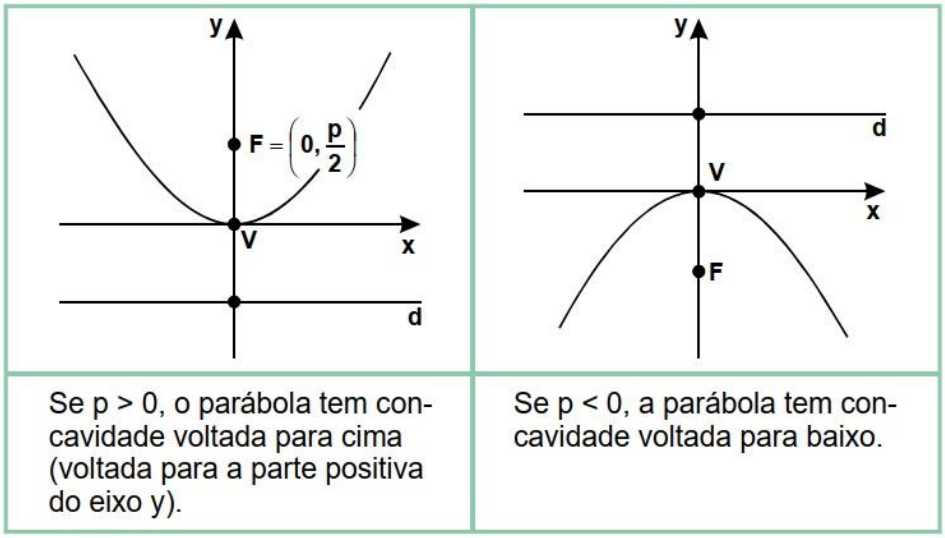

Figura 4: Influência do parâmetro p na concavidade da parábola (Venturi, 2003, p. 44)

Por analogia, podemos estabelecer a equação canônica da parábola com vértice na origem e eixo de simetria coincidente com o eixo x. Neste caso a equação da diretriz seria $x = -p/2$ e encontramos a expressão $y^2 = 2px$, como sendo a equação canônica ou reduzida de uma parábola cujo eixo de simetria coincide com o eixo x. Neste caso, com relação ao parâmetro p, temos:

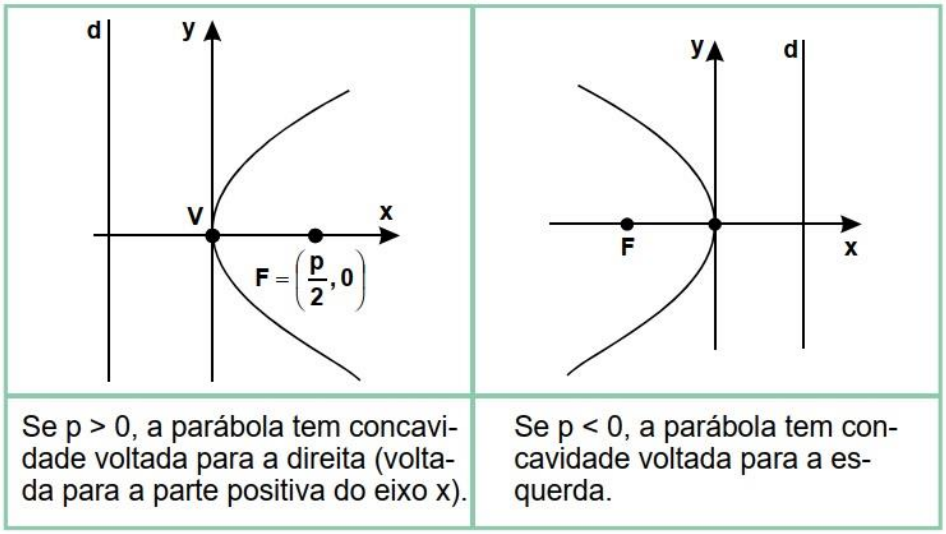

Figura 5: Influência do parâmetro p na concavidade da parábola (Venturi, 2003, p. 43)

No caso de uma parábola com vértice fora da origem, ou seja, a partir de uma translação dos eixos, de modo que o eixo x seja paralelo à x' e o eixo y seja paralelo à y'. Ao considerarmos os eixos x' e y'e o vértice como ponto $\mathrm{V}(x_0, y_0)$, teremos o esquema, como mostrado na Figura 6:

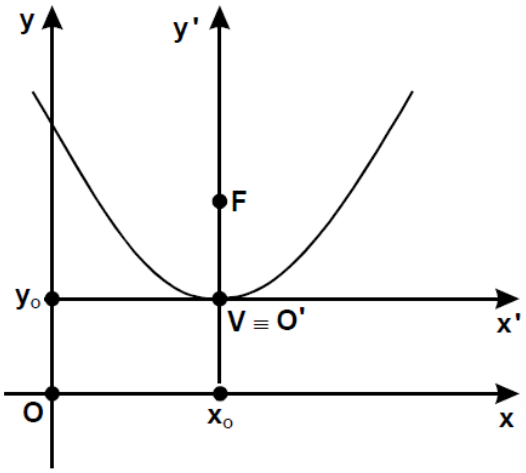

Figura 6: Parábola com vértice fora da origem (Venturi, 2003, p. 51)

A partir disso, temos que a equação da parábola é (I) $(x')^2 = 2py'$. Ao observar o esquema da Figura 6, temos que (II) $x' = x - x_0$ e (III) $y' = y - y_0$. Ao substituirmos (II) e (III) em (I), encontramos que:

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$$

Como uma expressão que representa uma parábola de vértice $V(x_0, y_0)$ e eixo de simetria paralelo ao eixo y.

As definições apresentadas por Venturi (2003) e Lima (2014) são vistas em outros livros de Geometria Analítica, com poucas diferenças, com uma abordagem por um viés mais voltado para a álgebra.

Já no contexto das funções polinomiais do 2º grau, na educação básica especialmente, a definição de parábola é apresentada nos livros didáticos como o gráfico da função quadrática. Esta definição geralmente vem acompanhada de uma explicação que aponta que quando as parábolas representam uma função quadrática, estas podem ter sua abertura (concavidade) voltada para cima ou para baixo (LEONARDO, 2016) sem mencionar muitas vezes porque isto ocorre, ou mesmo a diferença entre uma parábola e uma catenária, por exemplo. Possivelmente esta confusão aparente pode ocorrer geometricamente, uma vez que as expressões algébricas dos dois objetos são diferentes. Contudo, seria um fato importante a ser apontado.

Portanto, na seção seguinte demonstramos como se obtém a forma canônica da função do 2º grau, como uma maneira de ampliar a discussão e chegar à compreensão da parábola pela perspectiva da Geometria Analítica.

3 A forma canônica da função quadrática

Uma maneira de reescrever a função polinomial do 2º grau, associando-a à equação da parábola em Geometria Analítica, é a sua forma canônica, em que a função pode ser escrita a partir das coordenadas de seu vértice. Este formato é pouco explorado nas aulas de Matemática da educação básica, bem como muitos livros didáticos não contemplam este tópico (CERQUEIRA, 2015; MACEDO, 2015).

De acordo Lima *et al* (2006) temos que as coordenadas do vértice (x_v, y_v) de uma parábola que é associada a uma função quadrática podem ser obtidas de diferentes formas. Caso a função esteja na forma canônica, como em:

$$f(x) = a \cdot (x - h)^2 + k.$$

o vértice é dado pelas coordenadas do ponto (h, k). Utilizando o método de completar quadrados, podemos reescrever a forma geral da função do 2º grau $f(x) = a \cdot x^2 + bx + c$ para a forma canônica: $f(x) = a \cdot (x - h)^2 + k$. Sabemos que as coordenadas do vértice da parábola são:

$$V\ (x_v, y_v) = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}).$$

com $h = -\frac{b}{2a}$ e $k = -\frac{\Delta}{4a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Demonstrando esta relação, dada a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, colocaremos a em evidência e buscaremos reescrever a função a partir das coordenadas (x_v, y_v), assim podemos escrever:

$$f(x) = a\ \left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c.$$

Para transformar a expressão $x^2 + \frac{b}{a}x$ em um produto notável, devemos fazer aparecer um trinômio quadrado perfeito na expressão. Para isso, devemos escrever:

$$f(x) = a\left[x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c.$$

Considerando que a expressão $x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ pode ser escrita como um produto notável e desenvolvendo o termo $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ temos:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c$$
$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + c$$
$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Reorganizando a função para que fiquem explícitas as expressões que representam as coordenadas do vértice, temos:

$$f(x) = a\left[(x - \left(x - -\frac{b}{2a}\right))^2\right] + \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$
$$f(x) = a\left[(x - \left(-\frac{b}{2a}\right))^2\right] + \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a}$$
$$f(x) = a\left[(x - \left(-\frac{b}{2a}\right))^2\right] + \frac{-\Delta}{4a}$$
$$f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v.$$

Chegando à forma canônica da função quadrática, escrita em função das coordenadas $V(x_v, y_v)$. Devemos compreender as coordenadas do vértice como sendo o ponto da parábola mais próximo da diretriz, sendo este o ponto médio do segmento cujas extremidades são o

foco *F* da parábola e a interseção do eixo de simetria com a reta diretriz *d*. A forma canônica é viável na resolução de situações em que as coordenadas do vértice são conhecidas.

Na seção seguinte veremos a relação entre a forma canônica da função quadrática e a equação da parábola.

4 Da forma canônica ao foco e diretriz de uma parábola

A partir da forma canônica mostrada na seção anterior, temos que a equação da parábola em sua forma explícita é dada por $(I)\ y = ax^2 + bx + c$ e que também pode ser relacionada à expressão (II) $(x - h)^2 = 2p(y - k)$. Ao considerarmos que o eixo de simetria da parábola é paralelo ao eixo y, as coordenadas do vértice da parábola $\mathrm{V}(x_v, y_v)$ correspondem a um ponto $\mathrm{V}(h, k)$ fora da origem do sistema de coordenadas e $2p$ corresponde à distância do foco *F* da parábola até a reta diretriz *d*.

Uma maneira de mostrar a relação entre as expressões (I) e (II) é a partir da igualdade:

$$(x - h)^2 = 2p(y - k).$$

Desenvolvendo o quadrado e considerando p não nulo, temos:

$$x^2 - 2xh + h^2 = 2py - 2pk$$

$$2py = x^2 - 2xh + h^2 + 2pk.$$

Isolando o y, temos:

$$y = \frac{x^2 - 2xh + h^2 + 2pk}{2p}$$

.

$$y = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{2h}{2p}x + \frac{h^2 + 2pk}{2p}$$

$$y = \frac{1}{2p}x^2 - \frac{h}{p}x + \frac{h^2 + 2pk}{2p}$$

Fazendo $a = \frac{1}{2p}$, $b = -\frac{h}{p}$ e c $= \frac{h^2+2pk}{2p}$, chegamos à forma padrão $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, pois $p \neq 0$.

A recíproca também é válida, pois dada uma equação na forma explícita podemos conduzi-la à sua forma padrão. Consequentemente, temos que o gráfico de $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ é sempre uma parábola de eixo de simetria paralelo ao eixo y. E ainda, analogamente, temos que $(y - k)^2 = 2p(x - h)$ gera a equação na forma explícita $x = ay^2 + by + c$, caso a parábola tenha eixo de simetria paralelo ao eixo x.

Podemos estabelecer a relação entre a forma canônica da função quadrática e a equação da parábola, dado o fato de que o gráfico da função quadrática $f(x) = a \cdot (x - h)^2 + k$ é obtido do gráfico de $g(x) = a \cdot (x - h)^2$ por meio da translação vertical $(x, y) \mapsto (x, y + k)$, que leva o eixo OX na reta $y = k$ e a reta $y = -1/4a$ na reta $y = k - 1/4a$ (LIMA *et al*, 2006).

Assim, podemos inferir que o gráfico de qualquer função quadrática $f(x) = a \cdot x^2 + bx + c$ é uma parábola, cuja diretriz é a reta horizontal, dada pela expressão:

$$y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$$

cujo foco é o ponto:

$$F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 - 1}{4a} \right)$$

e que o parâmetro a determina se a concavidade da parábola está voltada para cima ($a > 0$) ou para baixo ($a < 0$).

Esta demonstração breve nos mostra a relação existente entre esses dois assuntos (função quadrática e equação da parábola), o que reforça a importância da articulação entre eles.

5 A parábola por uma perspectiva geométrica

Nesta seção, buscamos trazer diferentes formas de se construir uma parábola, com sugestões didáticas a partir de técnicas de desenho geométrico de forma manual até as possibilidades com o *software* de geometria dinâmica GeoGebra, de modo a facilitar o trabalho docente e a visualização geométrica do estudante.

5.1 Parábolas com dobraduras de papel

Os passos para a compreensão desta construção são, respectivamente:

1. Ao tomarmos uma folha de papel quadrada (de preferência), devemos traçar uma reta d e marcar um ponto F no interior da folha, não pertencente à reta d;
2. A partir disso, escolha um ponto qualquer, pertencente à reta d e dobre a folha, de modo que tal ponto escolhido coincida com o ponto F;
3. Ao desdobrar a folha, devemos obter vincos produzidos pela dobradura feita;
4. Ao repetir este processo várias vezes, considerando o máximo de pontos possíveis, veremos que todos os vincos demarcados no papel formarão a figura aproximada de uma parábola de foco F e de diretriz d, correspondente à reta traçada no papel inicialmente;

Podemos ver esta construção exemplificada na Figura 7:

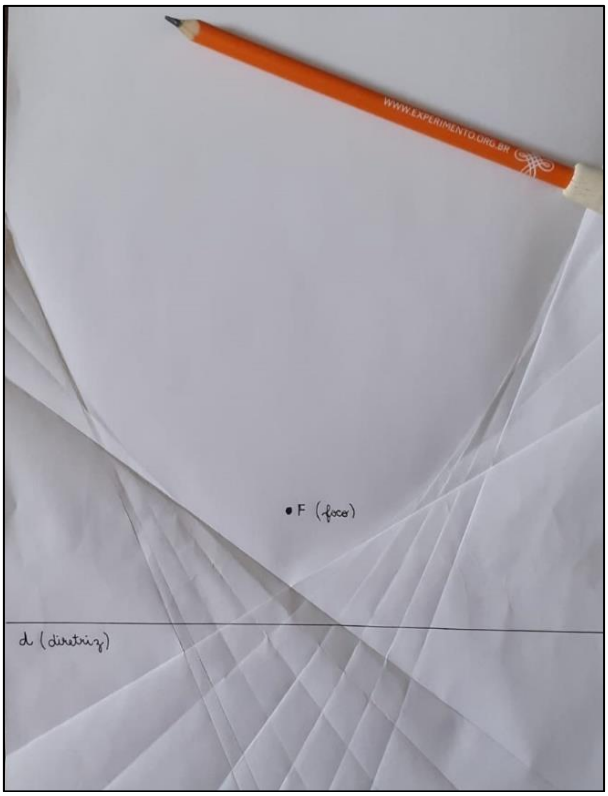

Figura 7: Parábola com dobraduras de papel, construção manual (Elaboração dos autores)

Uma outra possibilidade seria transpor esta construção realizada com lápis e papel de forma física para o ambiente de geometria dinâmica GeoGebra, como na Figura 8:

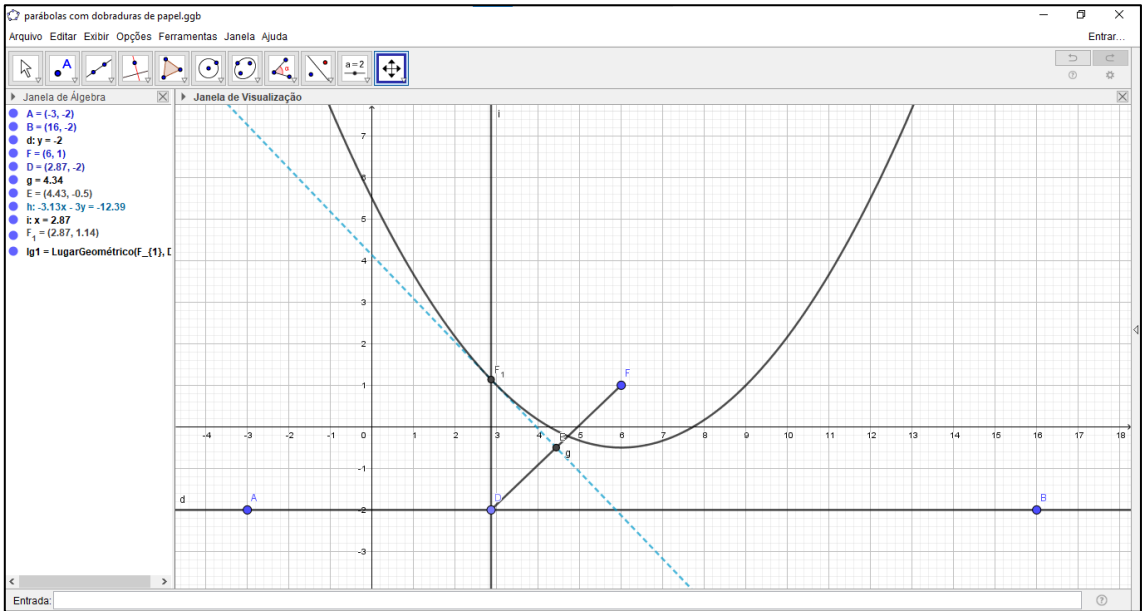

Figura 8: Estrutura da parábola com dobraduras no ambiente GeoGebra (Elaboração dos autores)

A reta h em azul, mostradas na Figura 8, representa uma reta tangente à parábola de foco F e diretriz d. Ao habilitar a função “exibir rastro”, temos as várias retas tangentes possíveis

de serem traçadas e que correspondem ao lugar geométrico parábola, como ilustrado na Figura 9:

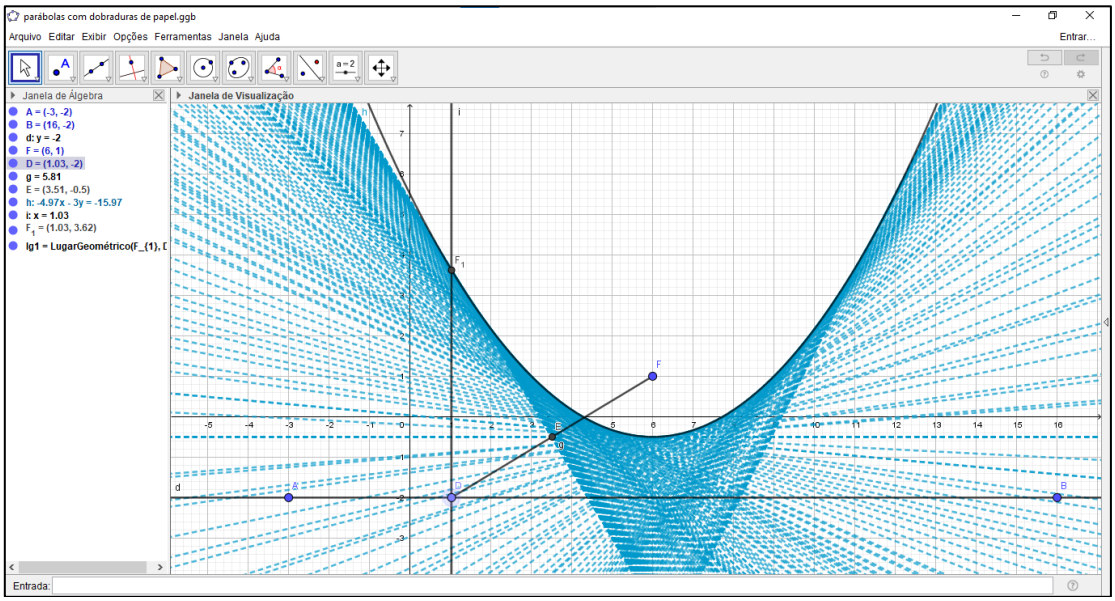

Figura 9: Retas tangentes à parábola de foco F e diretriz d (Elaboração dos autores)

As retas tangentes em azul correspondem às dobraduras de papel e podem ser construídas em uma sequência de passos simples no GeoGebra, tanto na versão *software*, quanto na versão aplicativo para *smartphones*:

1. Construa uma reta d que será a diretriz da parábola e um ponto F fora da reta d, que corresponderá ao foco da parábola;
2. Construa um ponto D deslizante sobre a reta diretriz d, utilizando a ferramenta "ponto em objeto";
3. Trace um segmento de reta ligando o ponto D ao ponto F;
4. Com a ferramenta "ponto médio", construa o ponto médio do segmento $\overline{DF}$;
5. Trace uma reta perpendicular ao segmento $\overline{DF}$, passando pelo ponto médio construído;
6. Trace outra reta perpendicular à reta diretriz d, passando pelo ponto deslizante D sobre ela;
7. Com a ferramenta "intersecção entre dois objetos", construa o ponto de intersecção entre as duas perpendiculares construídas;
8. Com a ferramenta "lugar geométrico", clique sobre o ponto deslizante D na reta diretriz e sobre o ponto de intersecção das duas perpendiculares;
9. Aparecerá um lugar geométrico correspondente à parábola de foco F e diretriz d; pois a distância do ponto F_1 à F é a mesma distância entre o ponto F e D, em que D é um ponto pertencente à diretriz d
10. A reta perpendicular que passa pelo ponto médio de $\overline{DF}$ é tangente à parábola. Ao clicar sobre esta reta com o botão direito do mouse e "habilitar rastro", movimente o ponto D deslizante sobrea diretriz e as retas tangentes à parábola, correspondente às dobraduras de papel serão traçadas.

Esta construção está disponível na comunidade geogebra.org e pode ser acessada através do link: https://www.geogebra.org/m/ujp8gymj.

Com os comandos do GeoGebra, o estudante tem a possibilidade de compreender de forma mais clara cada um dos elementos da parábola e manipulá-los, estimulando sua percepção geométrica a partir da visualização.

5.2 Parábolas construídas com régua e compasso

Outra possibilidade de construção da parábola enquanto lugar geométrico é por meio do uso de técnicas de desenho geométrico com os instrumentos régua e compasso.

Ao considerarmos um plano β, uma reta diretriz d contida em β e um ponto F no plano, mas não pertencente à d, temos que a parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de F e d, como representado no GeoGebra e ilustrado na Figura 10:

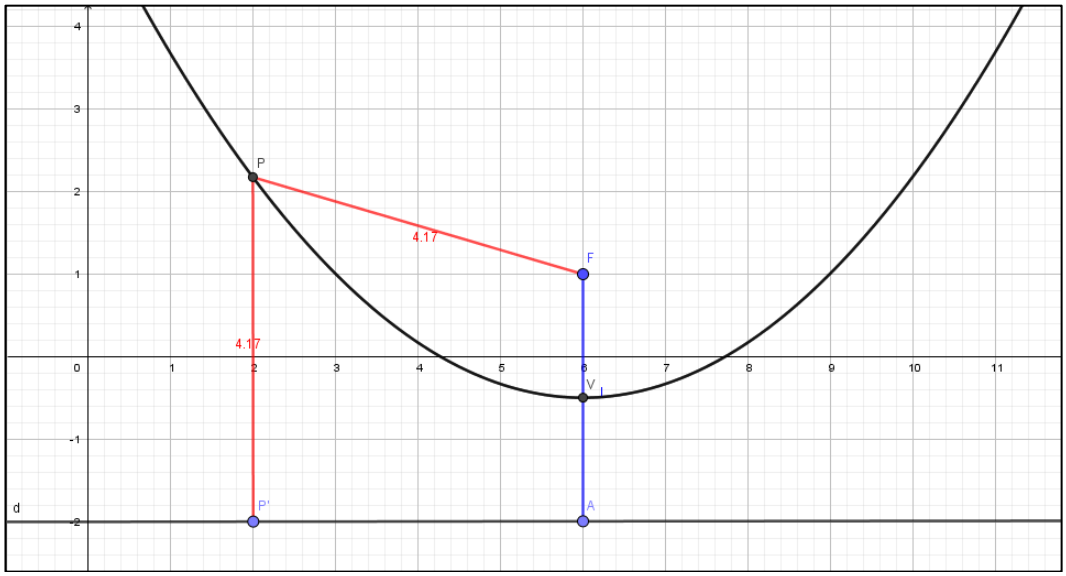

Figura 10: Definição da parábola enquanto lugar geométrico (Elaboração dos autores)

Observe que para que a curva descrita seja uma parábola, a distância entre PF e PP' devem ter a mesma medida (o que aparece na construção com a medida 4,17, mas a o movimentarmos o ponto P' esse valor se altera, mantendo a condição $PF = PP'$). Uma outra observação é que à medida que F se aproxima de A, a parábola tende a uma reta paralela à diretriz (o que ocorre, de fato, quando $F = A$).

Assim, podemos iniciar o esboço dessa construção a partir da sequência de passos descrita em Kilhian (2011):

1. Trace uma reta diretriz d e um ponto F qualquer fora de d, que será o foco da parábola;
2. Trace uma reta perpendicular a d passando por F. O ponto de intersecção da reta perpendicular e da diretriz d é nosso ponto A (tal como na Figura 10);
3. Obtenha o ponto médio do segmento $\overline{FA}$ como o ponto V, vértice da parábola;
4. Trace uma outra reta r paralela à d, à uma distância h_1;
5. Trace quantas retas paralelas à d você desejar, considerando as distâncias como sendo $h_2, h_3, ..., h_n$. Meça essas distâncias com a própria abertura do compasso;
6. Coloque a ponta seca do compasso em F e abertura formando um raio igual a h_1. A partir disso, descreva um arco interceptando r_1 nos pontos P_1 e P_1';
7. A seguir, a abertura do compasso com raio igual a h_2, trace outro arco interceptando r_2 em P_2 e P_2', e assim sucessivamente, até os pontos P_n e P_n';
8. A parábola será a curva que passa por V e os pares de pontos P_1 e P_1', P_2 e P_2', P_3 e P_3' até P_n e P_n'.

Um esboço deste modelo pode ser apresentado nas Figuras 11, 12 e 13:

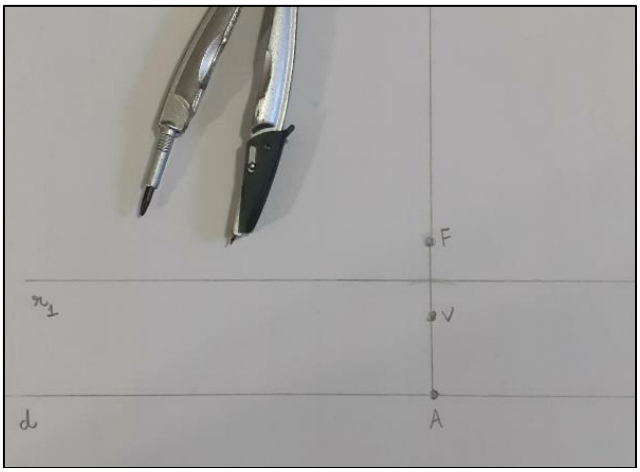

Figura 11: Passos 1 a 3 (Elaborado pelos autores)

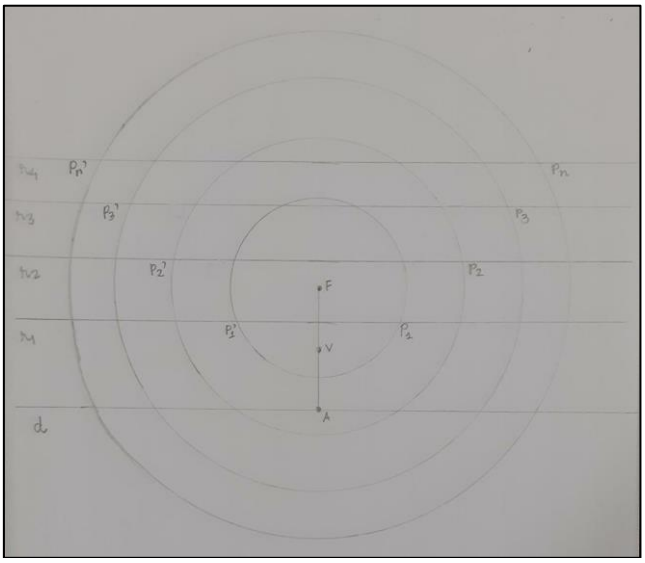

Figura 12: Passos 4 a 7 (Elaborado pelos autores)

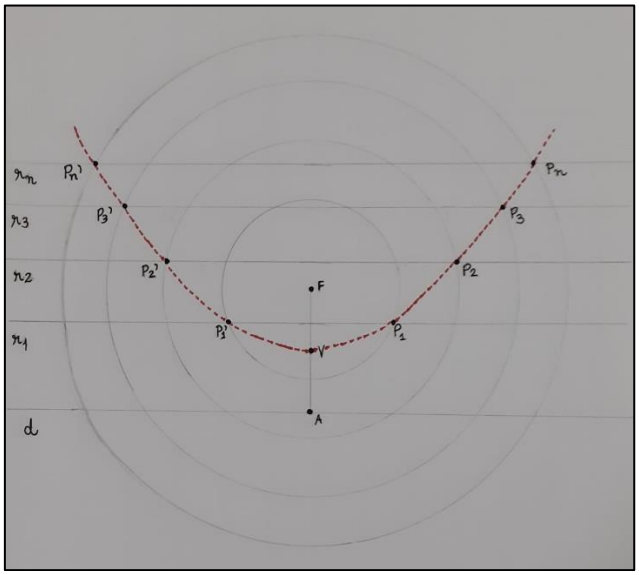

Figura 13: Passo 8 (Elaborado pelos autores)

Note que a curva que passa pelos pontos V, P_n e P_n' forma a parábola indicada. Podemos também realizar esta construção no GeoGebra, como ilustrado na figura 14:

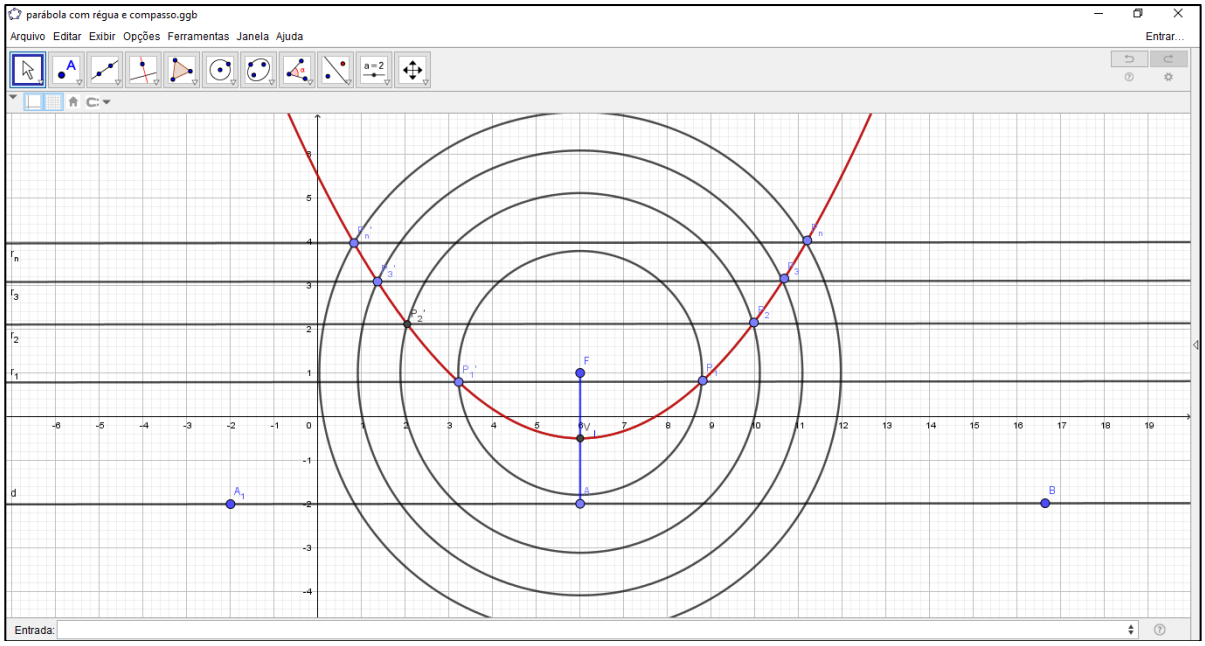

Figura 14: Parábola com régua e compasso ilustrada no GeoGebra (Elaboração dos autores)

É possível notar a simetria da parábola ao traçarmos uma reta que passa pelo segmento $\overline{FA}$. Esta construção está disponível no link https://www.geogebra.org/m/kc7axkh6.

5.3 Parábolas a partir de circunferências

Uma definição menos comum, mas não menos importante, para a parábola é trazida por Souza Jr. e Cardoso (2003) na Revista do Professor de Matemática (RPM edição 68), em que mostra como podemos considerar a parábola a partir de uma perspectiva diferente do que se traz comumente nos livros didáticos, com uso de circunferências. Nas palavras dos autores, temos que:

> A definição usual de parábola é: A parábola de foco F e reta diretriz d é o lugar geométrico dos pontos equidistantes do foco e da diretriz. Se P for um ponto da parábola, a perpendicular a d por P corta d em T, tal que $PT = PF$. Portanto, $C(P, PF2)$ é tangente a d em T. Essa construção pode ser revertida, de forma que chegamos a uma outra definição de parábola, equivalente à usual: A parábola é o lugar geométrico dos centros das circunferências que contêm o ponto F e tangenciam a reta d (com F d). (SOUZA JR.; CARDOSO, 2003, p. 2).

A partir desta definição, podemos inferir que: dado um foco F e uma reta diretriz d, consideremos todas as circunferências que passam por F e são tangentes à d. O conjunto dos centros C de todas estas circunferências corresponde à uma parábola de foco F e diretriz d. Tal definição pode ser observada na Figura 10:

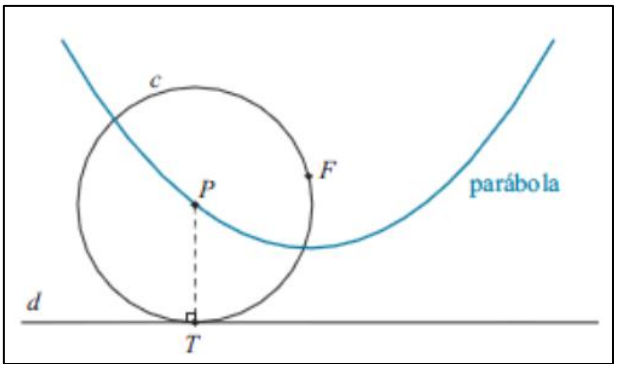

Figura 10: Parábola a partir de circunferências - RPM 68 (SOUZA JR.; CARDOSO, 2003).

O GeoGebra, como sugerido por Souza Jr. e Cardoso (2003), traz uma forma de compreender a definição apontada na Figura 10 de maneira mais dinâmica, como exemplificado nas Figuras 11 e 12:

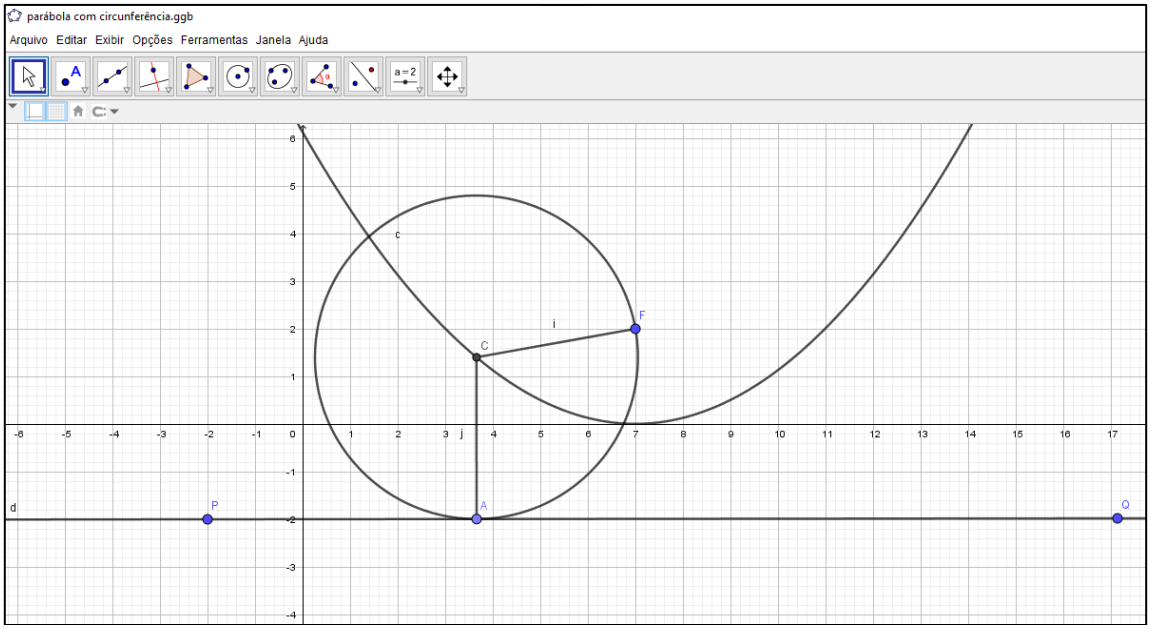

Figura 11: Parábola a partir de circunferências (Elaboração dos autores)

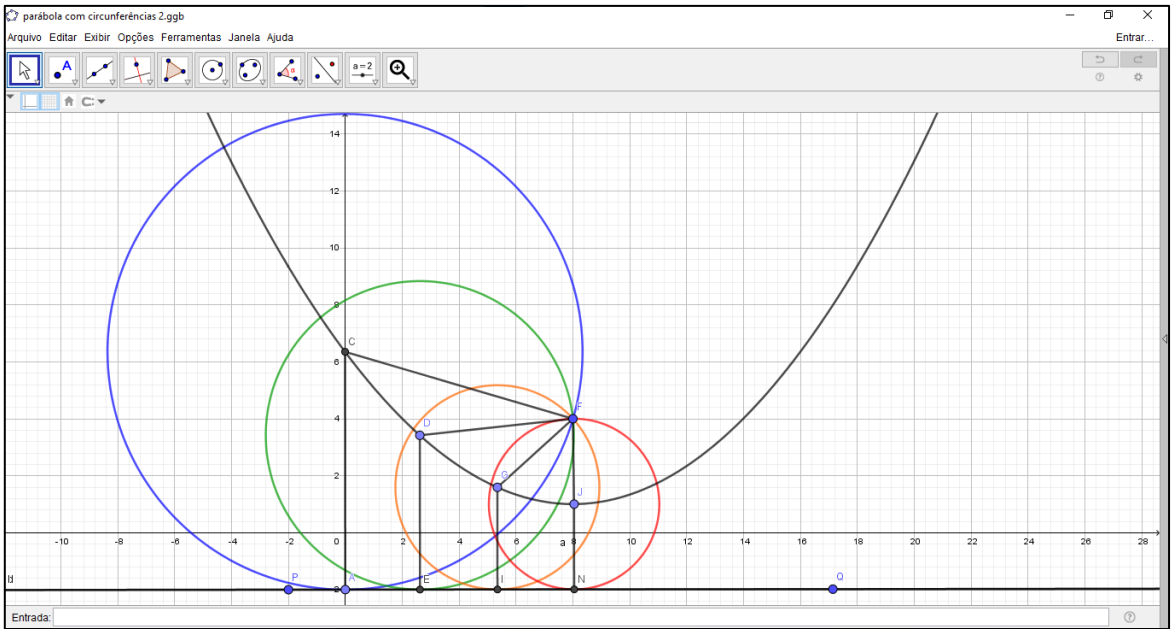

Figura 12: Parábola a partir de circunferências, replicação das circunferências (Elaboração dos autores)

Vale ressaltar que esta abordagem é pouco usual, de fato. Mas que também se utiliza da distância entre dois pontos em Geometria Analítica para comprovar que a medida do raio da circunferência corresponde à medida da distância do centro desta circunferência à reta diretriz, atendendo a definição matemática de parábola. Parte do protocolo desta construção é similar à construção apresentada na subseção anterior, com o diferencial da visão das circunferências e de seus raios. Esta construção também está disponível na comunidade geogebra.org por meio do link https://www.geogebra.org/m/sdkgzavy e pronta para uso em sala de aula.

5.3 Parábola com vértice fora da origem e forma canônica

Outra possibilidade de se trabalhar a parábola explorando o contexto das funções é apresentar a equação da parábola com vértice $V(h,k)$ fora da origem e buscar um comparativo com a função quadrática de mesmo vértice $V(h,k)$. Para isso, construímos no GeoGebra a equação $(eq1)$ o e a função quadrática (f) por meio dos controles deslizantes h e k (coordenadas do vértice da parábola), a e p (parâmetros que definem a abertura da concavidade da parábola e sua posição – para cima ou para baixo), onde $a = \frac{1}{2p}$ (como mostrado na seção 4). Observemos esta construção na Figura 13:

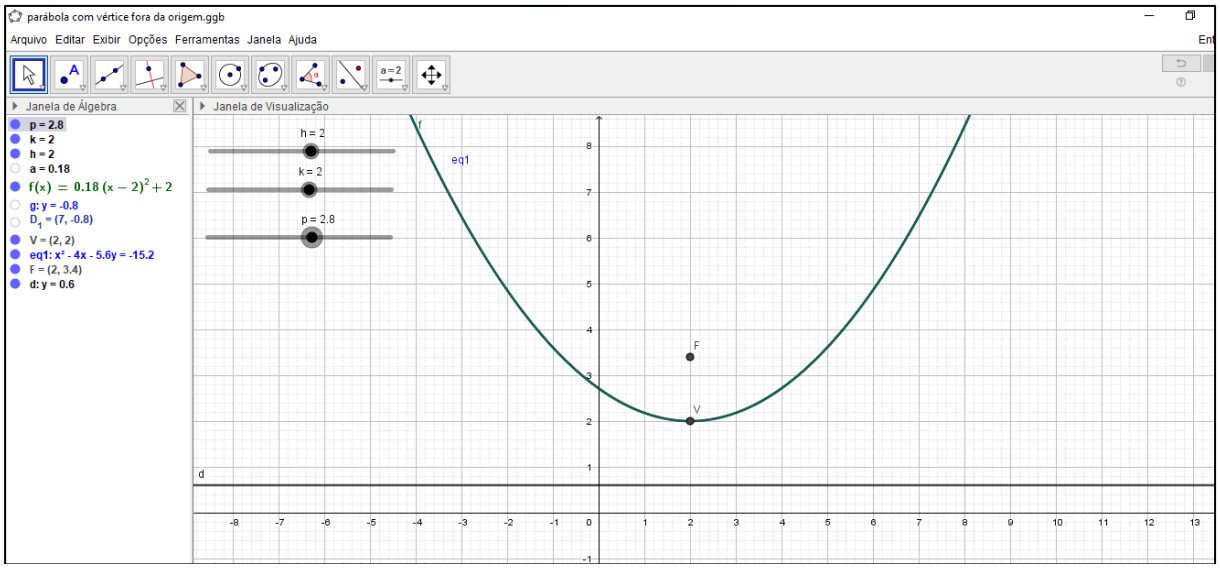

Figura 12: Comparativo entre a equação da parábola e a forma canônica da função quadrática (Elaborado pelos autores)

Observe que o gráficos $eq1$ representa uma parábola de vértice $\mathrm{V}(h,k)$ fora da origem e foco F e que existe uma relação entre as expressões $f(x)$ e $eq1$ com base nos parâmetros h, k e p. Ao movimentar os controles deslizantes h e k, definimos onde se situará o vértice da parábola. Já no controle deslizante p temos um movimento que reflete na mudança da concavidade da parábola (abertura ou fechamento, mudança de posição para cima ou para baixo), além de influenciar diretamente na distância entre o foco e a reta diretriz (quanto maior o valor de p, maior a distância entre o foco e a reta diretriz da parábola).

Note que desta forma o estudante pode observar de forma mais clara a relação entre as expressões $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$, com $\mathrm{V}(x_v, y_v) = (h,k)$, que corresponde à forma canônica da função quadrática e $(x-h)^2 = 2p(y-k)$, como expressão que representa a equação da parábola com vértice fora da origem (vale ressaltar que o ponto (h,k) pode assumir as coordenadas $(0{,}0)$ na construção).

É importante lembrar que esta construção pode ser modificada para obtermos uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo x, a partir de uma expressão do tipo $(y-k)^2 = 2p(x-h)$ em $eq1$.

Esta construção está disponível na comunidade geogebra.org por meio do link https://www.geogebra.org/m/dtpazcyg para uso em sala de aula.

6 Considerações finais

O primeiro contato entre o estudante e a parábola ocorre, geralmente, no final do Ensino Fundamental e início do Ensino Médio, com o estudo das funções quadráticas, perpassando ao final desta etapa de ensino pelas noções de cônicas em Geometria, quando tal estudo ocorre. Entretanto, por vezes não há uma abordagem por parte do docente que faça a relação entre estas distintas formas de compreender a parábola. Verifica-se, no geral, um estudo de forma fragmentada, o que gera uma lacuna na compreensão desse ente geométrico no percurso entre a Educação Básica e o Ensino Superior, ocasionando dificuldades em sua compreensão e aplicações em disciplinas como Geometria Analítica, Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Linear, entre outras áreas do conhecimento, o que justifica a importância da discussão apresentada neste artigo.

As parábolas além de representar de forma geométrica as funções quadráticas (ou do 2º grau), também são resultantes do estudos das cônicas em Geometria Analítica. Cerqueira (2015), Macedo (2015) e Siqueira (2016) apontam em seus trabalhos que este assunto é abordado de modo lacônico, em uma visão analítica/algébrica, não explorando as características e possibilidades geométricas da parábola, nem relacionando os elementos foco, diretriz, vértice e eixo de simetria ao estudo das funções quadráticas, como forma de fazer um paralelo entre esses dois assuntos. Com o auxílio das obras de Lima *et al* (2006), Lima (2014) e Venturi (2003) foi possível reescrever esta relação buscando deixá-la de forma mais explícita ao leitor (estudante ou docente).

Partindo dessa premissa, procuramos explorar neste trabalho a parábola e suas características, visando uma compreensão que relacione o contexto das funções quadráticas à Geometria Analítica. Além disso, também trouxemos o uso da tecnologia na exploração de seus elementos com uso do *software* de geometria dinâmica GeoGebra, a partir de algumas possibilidades de construção geométrica da parábola, visando subsidiar o trabalho do professor de Matemática e oferecer uma leitura que auxilie o estudante no entendimento deste assunto, por meio da visualização geométrica.

7 Referências

BOYER, C. B. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blücher, 2012.

CERQUEIRA, A. A. **Parábola e suas aplicações.** 2015. 55 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FRIED, M. N. **Edmond Halley's reconstruction of the lost book of Apollonius's conics**. New York: Springer, 2011.

HALBERSTADT, F. F. **A aprendizagem da geometria analítica no ensino médio e suas representações semióticas no Grafeq**. 2015. 173 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) – Centro de Ciências Naturais e Exatas, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

HODGKIN, L. **A history of mathematics:** from Mesopotamia to modernity. New York: Oxford University Press, 2005.

KILHIAN, K. **Construção geométrica da parábola com régua e compasso.** O Baricentro da Mente, 2011. Disponível em: https://www.obaricentrodamente.com/2011/06/construcao-geometrica-da-parabola-com.html. Acesso em: 26 out. 2021.

LEONARDO, F. M. (ed.). **Conexões com a matemática**. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016. v. 1.

LIMA, E. L. **Geometria analítica e álgebra linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. (Coleção Matemática Universitária).

LIMA, E. L. *et al*. **A matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006. v. 1. (Coleção do Professor de Matemática).

LOUZADA, S. **Relações entre cônicas e funções no ensino médio**. 2013. 65 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2013. Disponível em: http://repositorio.ufes.br/handle/10/4813. Acesso em: 20 jul. 2021.

LUCENA, R.; GITIRANA, V. articulações internas à matemática: a parábola e a função quadrática com o GeoGebra. **Educação Matemática em Revista**, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, n. 51, p. 25-34, 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/679. Acesso em: 11 jan. 2022.

MACEDO, H. R. **Estudo sistemático das parábolas. 2015.** 55f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015.

SIQUEIRA, C. A. F. **Um estudo didático das cônicas: quadros, registros e pontos de vista**. 2016. 167 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

SOUZA JR, J. C.; CARDOSO, A. Estudo das cônicas com geometria dinâmica. **RPM - Revista do Professor de Matemática**, v. 68, 2003.

VENTURI, J. J. **Cônicas e quádricas.** Curitiba: Livrarias Curitiba, 2003.