Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 22, n. 1, jul. 2022
Iniciação Científica

**Fernando Soares de Carvalho**
Câmpus de Arraias
Universidade Federal do Tocantins
fscarvalho@uft.edu.br

**Eudes Antonio Costa**
Câmpus de Arraias
Universidade Federal do Tocantins
eudes@uft.edu.br

# Números quasemonodígitos primos ou quadrados perfeitos

Prime quasimonodigits numbers or perfect squares

**Resumo**

Os números monodígitos podem ser vistos como casos particulares dos números inteiros quasemonodígitos. Contudo, em Beiler [1] observa-se que nenhum monodígito, não repunidade, é um número primo. Enquanto que em Williams [2] são apresentadas algumas propriedades dos números quaserrepunidades e uma lista de primos nesta classe. Nestas notas, motivados pelos trabalhos [1, 2, 3, 4] expomos nossa pesquisa acerca dos quasemonodígitos, apresentamos algumas propriedades relativas a critérios de divisibilidade e quadrados perfeitos, também exibimos os números primos em três subclasses de quasemonodígitos. As ferramentas e propriedades utilizadas nas demonstrações dos resultados são elementares, envolvendo essencialmente divisibilidade e congruência.
**Palavras-chave:** Divisibilidade, Primos, Quadrados perfeitos, Quasemonodígitos.

**Abstract**

Monodigit numbers can be seen as particular cases of quasi-monodigit integers. However, in Beiler [1] it is observed that no single digit, not repunity, is a prime number. Whereas in Williams [2] some properties of quasi-repunctual numbers and a list of primes in this class are presented. In these notes, motivated by the works [1, 2, 3, 4] we expose our research on quasi-monodigits, we present some properties related to divisibility criteria and perfect squares, we also show the prime numbers in three subclasses of quasi-monodigits. The tools and properties used in the income statements are elementary, essentially involving divisibility and congruence.
**Keywords:** Divisibility, Prime, Perfect squares, Quasimonodigits.

Artigo recebido em nov. 2021 e aceito em mar. 2022

# 1 Introdução

A Teoria elementar dos Números (ou Aritmética) é um dos tópicos relevantes na Matemática. Uma classe de números que provocam o interesse de matemáticos (e aficionados) há tempos (desde os Pitagóricos) são os números primos. Para estudantes de graduação, com um conhecimento básico dessa área já é possível apresentar problemas interessantes, por exemplo: "Equações Diofantinas", "Números Repunidades"ou "Teorema de Fermat". Neste trabalho, apresentaremos nosso estudo sobre os números *quasemonodígitos*.

Um número *monodígito* (um dígito) ou *repdígito* (repetição de um dígito) é um número natural não nulo formado pela repetição do mesmo dígito (algarismo) num sistema numérico posicional em uma base $b > 1$ fixada. Aqui utilizaremos a base decimal, ou seja $b = 10$. São exemplos de números *monodígitos* : 2, 33, 111, 4444, 55555555 e 999999. O conceito de números *monodígitos* foi usado pela primeira vez por Beiler [1], que também apresentou o termo *repunidades* (repetição da unidade) no caso em que o dígito repetido for 1, ou seja, a unidade. Uma relação interessante pode ser observada em [5], neste encontra-se todos os *monodígitos* na base 10 que são somas de três números de Fibonacci.

Usaremos a seguinte notação $M_n = \underbrace{aa\ldots a}_{n\,\text{vezes}}, n \geq 1$ para os *monodígitos*, em que $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$; e para as *repunidades*, $R_n = \underbrace{11\ldots 1}_{n\,\text{vezes}}, n \geq 1$. Em notação decimal, temos a seguinte expressão geral para um número *repunidade*,

$$R_n = \frac{10^n - 1}{9}, \quad \text{para todo } n \geq 1. \tag{1}$$

Algumas propriedades relacionadas aos números *repunidades* $R_n$, podem ser encontradas em [1, 4, 6, 7].

Os números *monodígitos* (*repdígitos*), assim como os números *palindrômicos*, isto é, números que têm a mesma representação decimal quando lido tanto da direita para a esquerda como da esquerda para a direita, são bastante conhecidos na *matemática recreativa*. Duas propriedades fáceis de observar: (I) os *monodítigos* são *palindrômicos* (algumas propriedades dos *monodígitos* podem ser consultadas em [8], bem como a introdução do termo *repdígito*). (II) os *monodígitos* com mais de um dígito, não *repunidades*, são números compostos e múltiplos de *repunidades*. De fato, se $M_n$ é um *monodídito* com $n \geq 2$ e $a \in \{2, 3, \ldots, 8, 9\}$ , ou seja, $M_n = \underbrace{aa\ldots a}_{n\,\text{vezes}}$. Pela Equação (1), tem-se

$$M_n = \underbrace{aa\ldots a}_{n\,\text{vezes}} = a \cdot \underbrace{11\ldots 1}_{n\,\text{vezes}} = a \cdot R_n.$$

Assim, o número $M_n$ é composto e múltiplo da *repunidade* $R_n$. Dessa forma, um *monodígito* com mais de 2 dígitos, não *repunidade* $(a \neq 1)$, não é primo.

A seguir definimos uma outra classe de números, chamada de *quasemonodígitos*, que é o foco deste trabalho.

**Definição 1** *No sistema decimal, um número natural $N \neq 0$, formado por $n \geq 2$ dígitos, em que o dígito a apareça exatamente $n - 1$ vezes e o dígito b uma única vez é um quasemonodígito, sendo a e b distintos com $a, b \in \{1, 2 \ldots, 8, 9\}$. No caso em que o algarismo a for 1 (unidade) diremos que o número N é uma quaserrepunidade.*

São exemplos de números *quasemonodígitos*: 112, 2122, 444344, 544444, 6667666, 8888882 e 91111111. Em destaque, os números 112 e 91111111 são também *quaserrepunidades*.

Nestas notas, serão apresentadas algumas propriedades relacionadas a critérios de divisibilidades de números *quasemonodígitos*, bem como alguns números primos que satisfazem a Definição 1 serão exibidos.

De acordo com Ribenboim [6], os valores de $n$ para os quais sabemos que $R_n$ é primo são $n = 2,\ 19,\ 23,\ 317$ e $1031$. Sabe-se que há uma dificuldade computacional para determinar se $R_n$ é um número primo ou composto, tal dificuldade decorre do fato de que ainda não se conhece um algoritmo eficiente que fatore um inteiro arbitrário (imagine, por exemplo, $R_n$ com milhões de algarismos) e esta dificuldade é mencionada em vários trabalhos, por exemplo em [1, 3, 9, 10, 11]. Não sabemos se existem infinitos números repunidades primos. Assim como não sabemos se existem infinitos *quaserrepunidades* e *quasemonodígitos* primos.

A seguir apresentamos nosso estudo sobre dibisibilidade e primalidade de números *quasemonodígitos*. Porém, este restringe-se aos casos particulares:

$$\begin{aligned} QM_1(n+1,a,b) &= \underbrace{aa\dots a}_{n}\,b\ , \\ QM_2(n+1,a,b) &= b\,\underbrace{aa\dots a}_{n}\ , \\ QM_3(2n+1,a,b) &= \underbrace{aa\dots a}_{n}\,b\,\underbrace{aa\dots a}_{n}\ . \end{aligned} \tag{2}$$

Por exemplo, $QM_1(7,2,8) = 2222228$, $QM_2(6,4,5) = 544444$ e $QM_3(7,9,5) = 9995999$. No caso em que $a = 1$ usaremos a seguinte notação para as *quaserrepunidades*

$$\begin{aligned} QR_1(n+1,b) &= \underbrace{11\dots 1}_{n}\,b\ , \\ QR_2(n+1,b) &= b\,\underbrace{11\dots 1}_{n}\ , \\ QR_3(2n+1,b) &= \underbrace{11\dots 1}_{n}\,b\,\underbrace{11\dots 1}_{n}\ , \end{aligned} \tag{3}$$

assim $QR_1(3,2) = 112$, $QR_2(5,3) = 31111$ e $QR_3(3,7) = 171$.

# 2 Primos quaserrepunidades

Um primeiro trabalho sobre as *quaserrepunidades* (como uma generalização das repunidades) foi realizado por Willians [2], no qual são apresentadas algumas propriedades e tabelas com os números primos da forma $QR_1$ e $QR_2$ para $n \leq 99$ e ainda os primos da forma $QR_3$ para $n \leq 50$ (veja tabelas 1, 2 e 3), além de demonstrar a primalidade do número repunidade $R_{307}$. Os números *quaserrepunidades* $QR_1$, $QR_2$ e $QR_3$, dados em (3), podem ser obtidos por fórmulas gerais, conforme Proposição 2 a seguir, isto é, expressões que dependam exclusivamente dos valores $n$ e $b$.

**Proposição 2** *Para todo* $n \in \mathbb{N}^*$ *e* $1 \leq b \leq 9$, *temos*

- $QR_1(n+1,b) = \dfrac{10^{n+1} + 9b - 10}{9}$,

- $QR_2(n+1,b) = \dfrac{(9b+1)10^n - 1}{9}$,

- $QR_3(2n+1,b) = \dfrac{10^{2n+1} + 9(b-1)10^n - 1}{9}$.

*Demonstração:* Observe que,

$$QR_1(n+1,b) = 10^n + 10^{n-1} + \cdots + 10^1 + b \tag{4}$$

logo,

$$10QR_1(n+1,b) = 10^{n+1} + 10^n + \cdots + 10^2 + 10b\ . \tag{5}$$

Subtraindo (4) de (5) obtemos

$$9QR_1(n+1,b) = 10^{n+1} + 10b - 10 - b = 10^{n+1} + 9b - 10. \tag{6}$$

De forma análoga,

$$9QR_2(n+1,b) = (9b+1)10^n - 1\ . \tag{7}$$

Bem como

$$9QR_3(2n+1,b) = 10^{2n+1} + 9(b-1)10^n - 1. \tag{8}$$

Fazendo a divisão por 9 em (6), (7) e (8), obtemos os resultados desejados. ■

Como mencionamos, os valores das Tabelas 1, 2 e 3 estão no trabalho de Willians [2] e apresentam os números primos da forma $QR_1$, $QR_2$ e $QR_3$, para $n \leq 99$ nos dois primeiros casos e $n \leq 50$ no terceiro caso.

Tabela 1: Números primos da forma $QR_1$

| $b$ | $n \leq 99$ |
|---|---|
| 3 | 1, 2, 4, 8, 10, 23 |
| 7 | 1, 3, 4, 7, 22,28, 39 |
| 9 | 1, 4, 5, 7, 16, 49 |

Tabela 2: Números primos da forma $QR_2$

| $b$ | $n \leq 99$ |
|---|---|
| 2 | 2, 3, 12, 18, 23, 57 |
| 3 | 1,2, 5, 10, 11, 13,34,47, 52, 77, 88 |
| 4 | 1, 3, 13, 25, 72 |
| 5 | 5, 12, 15, 84 |
| 6 | 1,5,7,25,31 |
| 7 | 1, 7, 55 |
| 8 | 2, 3, 26 |
| 9 | 2, 5, 20, 41, 47, 92 |

Tabela 3: Números primos da forma $QR_3$

| $b$ | $n \leq 50$ |
|---|---|
| 3 | 1,2,19 |
| 4 | 2, 3, 32, 45 |
| 5 | 1,7,45 |
| 6 | 10, 14, 40 |
| 7 | 3,33 |
| 8 | 1,4,6,7 |
| 9 | 1,4,26 |

O seguinte resultado pode ser consultado em [12]:

**Lema 3** *Dado um número natural n. Se a soma alternada (começando com sinal positivo à esquerda) dos algarismos de n é múltiplo de 11, então n também é múltiplo de 11.*

Como consequência do Lema 3, temos

**Proposição 4** *Se $n$ é impar e*

1. $b \neq 1$ *então* $QR_1(n+1, b)$ *não é múltiplo de 11.*
2. $b \neq 1$ *então* $QR_2(n+1, b)$ *não é múltiplo de 11.*
3. $b \neq 2$ *então* $QR_3(2n+1, b)$ *não é múltiplo de 11.*

*Demonstração:* Se $n$ é impar então:

1. a soma alternada dos algarismos de $QR_1(n+1, r)$ é dada por,
$$S_1 = (1-1) + (1-1) + \ldots + (1-b) = 1-b\ .$$
2. a soma alternada dos algarismos de $QR_2(n+1, r)$ é dada por,
$$S_2 = (b-1) + (1-1) + \ldots + (1-1) = b-1.$$
Veja que $S_1$ ou $S_2$ é múltiplo de 11 se, somente se, $b = 1$.
3. a soma dos algarismos de $QR_3(2n+1, b)$ é dada por,
$$S = (1-1) + \ldots + (1-1) + (1-b) + (1-1) + \ldots + (1-1) + 1 = 2-b.$$
Assim $S$ é múltiplo de 11 se, somente se, $b = 2$.

■

De modo análogo, temos

**Proposição 5** *Se $n$ é par e $b \neq 0$, então nenhum número quaserrepunidade é múltiplo de 11.*

*Demonstração:* Basta observar que a soma alternada dos algarismos dos números quaserrepunidades $QR_1(n+1, r)$, $QR_2(n+1, r)$ e $QR_3(2n+1, r)$, com $n$ par, é igual a $b$, logo não podem ser números múltiplos de 11. ■

## 3 Quasemonodígitos $QM_1$, $QM_2$ e $QM_3$

Nesta seção são apresentadas propriedades dos números *quasemonodíditos* da forma $QM_1$, $QM_2$ e $QM_3$. Tais propriedades estão relacionadas com alguns dos critérios de divisibilidade e ainda são exibidas tabelas de números primos *quasemonodíditos*.

### 3.1 Quasemonodígitos primos da forma $QM_1(n+1,a,b)$

Considere os números *quasemonodígitos* da forma $QM_1(n+1,a,b) = \underbrace{aa\ldots a}_{n}b$, conforme Equação (2). Nesta seção $n, a$ e $b$ são inteiros positivos, com $n \geq 1$, $a \neq b$, $a \in \{1,2,\cdots,8,9\}$ e $b \in \{0,1,\cdots,8,9\}$. Em particular, se $a = 1$ temos uma *quaserrepunidade* do tipo $QR_1$.

**Proposição 6** *Os números $QM_1$ são dados por $QM_1(n+1,a,b) = 10a \cdot R_n + b$ .*

*Demonstração:* Veja que

$$\begin{aligned} QM_1(n+1,a,b) &= \underbrace{aa\ldots a}_{n}b \\ &= a \cdot 10^n + a \cdot 10^{n-1} + \cdots + a \cdot 10^1 + b \\ &= 10a(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1) + b \\ &= 10a\frac{10^n - 1}{10 - 1} + b \qquad (9) \\ &= 10a \cdot R_n + b \ . \end{aligned}$$

■

**Proposição 7** *Os números $QM_1(n+1,a,b)$ não são primos para $b \in \{0,2,4,5,6,8\}$.*

*Demonstração:* Conforme Proposição 6, $QM_1(n+1,a,b) = 10a \cdot R_n + b$ . Se tivermos $b \in \{0,2,4,6,8\}$ o número $QM_1(n+1,a,b)$ é par (múltiplo de 2). Se $b = 5$ então $QM_1(n+1,a,b)$ é múltiplo de 5. Em todo caso, $QM_1$ não é um número primo. ■

Além disso, $QM_1(n+1,a,b)$ não será primo nos casos em que $a$ e $b$ são múltiplos de 3, isto é,

**Proposição 8** *Se $a, b \equiv 0 \mod 3$ então $QM_1(n+1,a,b)$ não é primo.*

*Demonstração:* Se $a \equiv 0 \mod 3$ então $10a \equiv 0 \mod 3$, como tem-se também que $b \equiv 0 \mod 3$, segue da Proposição 6 que $QM_1(n+1,a,b)$ é múltiplo de 3. ■

De modo semelhante, temos

**Proposição 9** *Se $n, b \equiv 0 \mod 3$ então $QM_1(n+1,a,b)$ não é primo.*

*Demonstração:* Basta observar que se $n \equiv 0 \mod 3$ então $R_n \equiv 0 \mod 3$ [4, Proposição 3 ]. Como também temos $b \equiv 0 \mod 3$, segue novamente da Proposição 6 que $QM_1(n+1,a,b) \equiv 0 \mod 3$. ■

Em particular,

**Corolário 10** *Se $n, b \equiv 0 \mod 3$ então nenhum $QR_1(n+1,b)$ é primo.*

**Proposição 11** *Se* $n \equiv 0 \mod 6$ *e* $b = 7$ *então* $QM_1(n+1, a, b)$ *não é primo.*

*Demonstração:* Basta observar que se $n \equiv 0 \mod 6$ então $R_n \equiv 0 \mod 7$ [4, Proposição 3 ]. ■

Como consequência, tem-se

**Corolário 12** *Se* $n \equiv 0 \mod 6$ *então nenhum* $QR_1(n+1, 7)$ *é primo.*

**Proposição 13** *Seja* $n \equiv 0 \mod 6$ *e* $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$*, se* $\underbrace{aa\ldots a}_{k}b$ *for múltiplo de 13, então* $QM_1(n+k+1, a, b)$ *será múltiplo de 13.*

*Demonstração:* Como $n \equiv 0 \mod 6$ então $R_n \equiv 0 \mod 13$ [4, Proposição 3 ]. Veja que

$$\begin{aligned} QM_1(n+k+1, a, b) &= \underbrace{aa\ldots a}_{n+k}b \\ &= \underbrace{aa\ldots a}_{n}10^{n+k+1} + \underbrace{aa\ldots a}_{k}b \\ &= a \cdot R_n \cdot 10^{n+k+1} + (10aR_k + b)\ . \end{aligned}$$

Por hipótese, temos também que $10aR_k + b$ é múltiplo de 13, obtendo o resultado desejado. ■

O resultado anterior (Proposição 13) nos conduz ao,

**Corolário 14** *Seja* $n \equiv 0 \mod 6$ *e* $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$*, se* $10R_k + b$ *for múltiplo de 13 então nenhum* $QR_1(n+k+1, b)$ *é primo.*

A Tabela 4 apresenta os números primos da forma $QM_1$, para $n \leq 14$. No caso em que $a = 1$, os números primos são exibidos na Tabela 1 para $n \leq 99$.

Tabela 4: Números primos da forma $QM_1(n+1, a, b) = \underbrace{aa...a}_{n}b$

| $a$ | $(n+1, b)$; $n \leq 14$ |
|---|---|
| 2 | (3,1),(1,3), (2,3), (7,3), (10,3), (2,7), (8,7), (14,7), (1,9), (2,9), (4,9), (13,9) |
| 3 | (1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1), (7,1), (1,7), (2,7), (5,7) |
| 4 | (1,1), (3,1), (10,1), (1,3), (2,3), (5,3), (8,3), (11,3), (1,7), (3,7), (9,7), (2,9), (4,9), (5,9) |
| 5 | (11,1), (12,1), (1,3), (7,3), (2,7), (3,7), (5,7), (9,7), (14,7), (1,9), (7,9), (11,9) |
| 6 | (1,1), (2,1), (3,1), (9,1), (1,7), (5,7), (7,7), (8,7), (10,7) |
| 7 | (1,1), (12,1), (1,3), 2,3), (4,3), (8,3), (11,3), (14,3), (1,9) |
| 8 | (2,1), (1,3), (2,3), (4,3), (7,3), (8,3), (14,3), (2,7), (3,7), (5,7), (8,7), (11,7), (1,9), (13,9) |
| 9 | (2,1), (4,1), (6,1), (1,7), (2,7) |

# 4 Quasemonodígitos primos da forma $QM_2(n+1, a, b)$

Considere os números *quasemonodígitos* da forma $QM_2(n+1, a, b) = b\underbrace{aa\ldots a}_{n}$, conforme Equação (2), isto é, dados os inteiros positivos $n, a, b$ com $n \geq 2$, $a \in \{0, 1, 2, \cdots, 8, 9\}$, $b \in \{1, \cdots, 8, 9\}$ e $a \neq b$. Em especial, lembramos que se $a = 1$ temos uma *quaserrepunidade* do tipo $QR_2$.

**Proposição 15** *Os números $QM_2$ são dados por $QM_2(n+1,a,b) = b \cdot 10^n + a \cdot R_n$.*

*Demonstração:* Veja que

$$\begin{aligned} QM_2(n+1,a,b) &= b\,\underbrace{aa\ldots a}_{n} \\ &= b \cdot 10^n + a \cdot 10^{n-1} + \cdots + a \cdot 10^1 + a \\ &= b \cdot 10^n + a(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1) \\ &= b \cdot 10^n + a\frac{10^n - 1}{10 - 1} \qquad (10) \\ &= b \cdot 10^n + a \cdot R_n\,. \end{aligned}$$

■

**Proposição 16** *Os números $QM_2(n+1,a,b)$ não são primos para $a \in \{0,2,4,5,6,8\}$.*

*Demonstração:* Em (10) temos que $QM_2(n+1,a,b) = b \cdot 10^n + a \cdot R_n$. Donde obtemos que se $a \in \{0,2,4,6,8\}$ então $QM_2(n+1,a,b)$ é par, e caso $a = 5$ então $QM_2(n+1,a,b)$ é múltiplo de 5. ■

De modo análogo à Proposição 8, os números $QM_2(n+1,a,b)$ não serão primos se $a$ e $b$ são múltiplos de 3, isto é,

**Proposição 17** *Se $a, b \equiv 0 \mod 3$ então $QM_2(n+1,a,b)$ não é primo.*

E análogo à Proposição 9 temos

**Proposição 18** *Se $n, b \equiv 0 \mod 3$ então $QM_2(n+1,a,b)$ não é primo.*

Em particular temos,

**Corolário 19** *Se $n, b \equiv 0 \mod 3$ então nenhum $QR_2(n+1,b)$ é primo.*

E análogo à Proposição 11 temos

**Proposição 20** *Se $n \equiv 0 \mod 6$ e $b = 7$ então $QM_2(n+1,a,7)$ não é primo.*

Em particular temos,

**Corolário 21** *Se $n \equiv 0 \mod 6$ e $b = 7$ então nenhum $QR_2(n+1,7)$ é primo.*

**Proposição 22** *Seja $n = 6q+1$, $q$ um inteiro positivo. Então $QM_2(n+1,a,b)$ será múltiplo de 7, 11 ou 13, se $a + 10b$ for múltiplo de 7, 11 ou 13, respectivamente.*

*Demonstração:* Observe que é possível escrever $QM_2(n+1,a,b) = ba \cdot 10^{6q} + a \cdot R_{6q}$. Como $R_{6q}$ é múltiplo de 7, 11 e 13, basta que o número $ba = a + 10b$ seja divisível por 7, 11 ou 13, respectivamente. ■

De forma análoga ao que foi apresentado na Proposição 22 para múltiplos de 17, tem-se

**Proposição 23** *Seja $n = 16q+1$, $q$ um número inteiro. Então $QM_2(n+1,a,b)$ é múltiplo de 17 se $a + 10b$ for múltiplo de 17.*

*Demonstração:* Observe que neste caso, $QM_2(n+1,a,b) = ba \cdot 10^{16q} + a \cdot R_{16q}$. Como $R_{16q}$ é múltiplo de 17, segue o resultado. ■

A Tabela 5 apresenta os números primos da forma $QM_2$, para $n \leq 13$. No caso em que $a = 1$, os números primos são exibidos na Tabela 2 para $n \leq 99$.

Tabela 5: Números primos da forma $QM_2(n+1, a, b) = b\underbrace{aa...a}_{n}$

| $b$ | $(n+1, a)$; $n \leq 13$ |
|---|---|
| 1 | (1,3), (1,7), (3,7), (9,7), (13,7), (1,9), (2,9), (3,9), (5,9), (7,9) |
| 2 | (1,3), (2,3), (3,3), (4,3), (10,3), (2,7), (3,7), (9,7), (1,9), (3,9), (6,9), (7,9) |
| 3 | (1,7), (11,7) |
| 4 | (1,3), (2,3), (1,7), (4,7), (13,7), (2,9), (3,9), (4,9), (6,9), (14,9) |
| 5 | (1,3), (3,3), (13,3), (2,7), (8,7), (14,7), (1,9), (2,9), (4,9), (5,9), (7,9), (10,9), (13,9) |
| 6 | (1,7), (2,7), (4,7), (10,7), (13,7) |
| 7 | (1,3), (2,3), (3,3), (5,3), (1,9), (4,9), (5,9), (8,9), (10,9) |
| 8 | (1,3) (7,3), (2,7), (9,7), (1,9), (3,9), (7,9) |
| 9 | (1,7), (2,7), (4,7) |

# 5 Quasemonodígitos primos da forma $QM_3(2n+1, a, b)$

Análogo às Proposições 7 e 16, temos

**Proposição 24** *Os números $QM_3(2n+1, a, b)$ não são primos para $a \in \{2, 4, 5, 6, 8\}$.*

E análogo às Proposições 8 e 17, os números $QM_3(2n+1, a, b)$ não serão primos se $a$ e $b$ são múltiplos de 3, isto é,

**Proposição 25** *Se $a, b \equiv 0 \mod 3$ então $QM_3(2n+1, a, b)$ não é primo.*

E análogo às Proposições 9 e 18 temos

**Proposição 26** *Se $n, b \equiv 0 \mod 3$ então $QM_3(2n+1, a, b)$ não é primo.*

Em particular,

**Corolário 27** *[2] Se $n, b \equiv 0 \mod 3$ então nenhum $QR_3(2n+1, b)$ é primo.*

**Proposição 28** *Se $b = 0$ então $QM_3(2n+1, a, b)$ não é primo.*

*Demonstração:* Veja que

$$QM_3(2n+1, a, b) = \underbrace{aa\ldots a}_{n}\, b\, \underbrace{aa\ldots a}_{n} = aR_n \cdot 10^{n+1} + b \cdot 10^n + aR_n = aR_n(10^{n+1}+1) + b \cdot 10^n ,$$

sendo $b = 0$, obtemos o desejado. ■

**Corolário 29** *Para todo $n$ natural temos que $R_n$ divide $QR_3(2n+1, 0)$ .*

*Demonstração:* Para ver que $R_n$ divide $QR_3(2n+1, 0)$, basta fazer $a = 1$ . ■

Em especial, se $a = 1$ e $b = 2$ em $QM_3(2n+1, a, b)$, temos

**Proposição 30** *[2] Se $b = 2$ então $QR_3(2n+1, 2)$ não é primo.*

*Demonstração:* Segue da Proposição 2 que

$$QR_3(2n+1,b) = \underbrace{11\ldots1}_{n}\,b\,\underbrace{11\ldots1}_{n} = \frac{10^{2n+1}+9(b-1)10^n-1}{9},$$

sendo $b=2$, obtemos que

$$\begin{aligned} QR_3(2n+1,2) &= \underbrace{11\ldots1}_{n}\,2\,\underbrace{11\ldots1}_{n} \\ &= \frac{10^{2n+1}+9\cdot 10^n-1}{9} \\ &= \frac{(10^{n+1}-1)(10^n+1)}{9}. \end{aligned}$$

■

**Corolário 31** *Para todo n natural temos que $R_{n+1}$ divide $QR_3(2n+1,2)$ .*

*Demonstração:* Basta observar que de acordo com a Proposição 30 podemos escrever,

$$QR_3(2n+1,2) = R_{n+1}\cdot(10^n+1).$$

■

A Tabela 6 apresenta os números primos da forma $QM_3$, para $n \leq 6$. No caso em que $a=1$, os números primos são exibidos na Tabela 3 para $n \leq 50$.

Tabela 6: Números primos da forma $QM_3(2n+1,a,b) = \underbrace{aa\ldots a}_{n}\,b\,\underbrace{aa\ldots a}_{n}$

| $b$ | $(n+1,a)$; $n \leq 6$ |
|---|---|
| 1 | (1,3), (1,9), (3,3), (5,9), (7,3) |
| 2 | (1,7), (3,7), (7,7) |
| 3 | (2,7) |
| 4 | (2,7), (3,7), (6,7) |
| 5 | (1,3), (1,7), (2,3), (7,7) |
| 6 | (4,7), (5,7) |
| 7 | (1,3), (3,3), (7,3) |
| 8 | (1,3), (1,7), (3,7), (7,3) |
| 9 | (1,7), (2,7) |

# 6 Números quasemonodígitos quadrados perfeitos

Destacamos nesta seção algumas propriedades relativas aos números quadrados perfeitos, lembramos que um número inteiro positivo $m$ é um *quadrado perfeito* se existe um inteiro $b$ tal que $m=b^2$. Para organizar e facilitar a leitura, usaremos os resultados auxiliares apresentados nos Lemas a seguir. As demonstrações desses Lemas, estão apoiadas em resultados clássicos de divisibilidade (congruência) que podem ser encontrados em [12].

**Lema 32** *Se $n$ é um quadrado perfeito então $n \not\equiv 3 \mod 4$.*

**Lema 33** *Um quadrado perfeito par é sempre divisível por 4.*

**Lema 34** *Um quadrado perfeito não termina em 2, 3, 7 e 8.*

Segue diretamente do Lema 34 que

**Proposição 35** *1. Se $b \in \{2,3,7,8\}$ então $QM_1(n+1,a,b)$ não é um quadrado perfeito.*

*2. Se $a \in \{2,3,7,8\}$ então nem $QM_2(n+1,a,b)$ nem $QM_3(2n+1,a,b)$ serão quadrados perfeitos.*

**Corolário 36** *Se $n \geq 2$ e $b \neq 6$ então nenhum $QR_1(n+1,b)$ é quadrado perfeito.*

*Demonstração:* O resultado segue diretamente para $b = 2,3,7$ (Proposição 35 e Lema 34). Agora observe que $QR_1(n+1,b) = 10^2(10^{n-2} + 10^{n-3} + \ldots + 10^1) + (10+b)$. Como 4 divide $10^2$ e $10 + b \equiv 3 \mod 3$ para $b = 1,5$ ou 9, e o resultado segue do Lema 32. Para $b = 4$, temos que $14 \equiv 2 \mod 4$ assim $QR_1(n+1,4)$ não pode ser um quadrado perfeito par (Lema 33). ■

**Proposição 37** *Se $n \geq 2$ e $ab \equiv 3 \mod 4$, então $QM_1(n+1,a,b)$ não é um quadrado perfeito.*

*Demonstração:* Observe que $QM_1(n+1,a,b) = a \cdot 10^2 \cdot R_{n-1} + (10a+b)$. Como 4 divide $10^2$ e $10a + b$ deixa resto 3 na divisão por 4 (por hipótese). Segue da Lema 32 que $QM_1(n+1,a,b)$ não é um quadrado perfeito. ■

**Exemplo 38** *Na Proposição 37 é fácil verificar que a congruência $10a+b \equiv 3 \mod 4$ será satisfeita quando $a$ for ímpar e $b \in S_1 = \{1,5,9\}$, ou ainda, se $a$ for par e $b \in S_2 = \{3,7\}$.*

Veja que $b \cdot 10^{2k}$ é um *quasemonodígito* do tipo $QM_2(2k+1,0,b)$. Disto obtemos facilmente que

**Proposição 39** *Se $n$ é par e $a = 0$ então $QM_2(n+1,0,b)$ é quadrado perfeito para $a \in \{1,4,9\}$.*

**Proposição 40** *Se $n \geq 2$ e $a \notin \{0,4\}$ então nenhum $QM_2(n+1,a,b)$ é quadrado perfeito.*

*Demonstração:* Para $a \in \{2,3,7,8\}$ já temos o resultado (Proposição 35). Como Se $n \geq 2$, escrevemos $QM_2(n+1,a,b) = 10^{n-1}(b \cdot 10 + a) + a \cdot 11)$. Para $a = 6$, teríamos que $QM_2(n+1,a,b)$ é par, no entanto $66 \not\equiv 0 \mod 4$, assim segue do Lema 33 que $QM_2(n+1,a,b)$ não é um quadrado perfeito. Para $a = 1,5$ ou 9, observamos que $a \equiv 3 \mod 4$, assim o resultado segue do Lema 32 que $QM_2(n+1,a,b)$. ■

**Corolário 41** *Se $n \geq 2$ então nenhuma $QR_2(n+1,b)$ é quadrado perfeito.*

Um último resultado é

**Proposição 42** *Se $n \geq 2$ então nenhum $QR_3(2n+1,b)$ é quadrado perfeito.*

*Demonstração:* Basta notar que

$$\begin{aligned} QR_3(2n+1,b) &= 10^{2n} + 10^{2n-1} + ... + b \cdot 10^n + \ldots + 10^2 + 10^1 + 1 \\ &= 10^2(10^{2n-2} + \ldots + b \cdot 10^{n-2} + \ldots + 1) + 11, \end{aligned}$$

e $11 \equiv 3 \mod 4$. ■

Por inspeção listamos a seguir os números *quasemonodígitos* quadrados perfeitos com no máximo 15 algarismos.

Tabela 7: Números quadrados perfeitos

| $QM_i$ | Quadrados perfeitos |
|---|---|
| $QM_1$ | 16, 25, 36, 49, 64, 81, 225, 441 $\quad n \leq 14$; |
| $QM_2$ | 16, 25, 36, 49, 64, 81, 144, 1444, $\quad n \leq 14$; |
| | $1 \cdot 10^{2k}, 4 \cdot 10^{2k}, 9 \cdot 10^{2k}$ ; |
| $QM_3$ | 121, 484, 676, 44944, $\quad n \leq 7$; |

Observe ainda que os quadrados perfeitos $QR_1(2,6) = 16 = 4^2$, $QR_2(2,8) = 81 = 9^2$ e $QR_3(3,2) = 121 = 11^2$ são *quaserrepunidades*.

# 7 Considerações finais

Aqui limitamos nossa busca e análise sobre os *quasemonodígitos* primos com no máximo 15 digitos, visto que ainda não existe um algoritmo eficiente que fatore um número inteiro arbitrário (imagine, por exemplo, um número $N$ com milhões de algarismos). Assim há uma dificuldade computacional para determinar se um número é primo.Portanto, não sabemos se existem infinitos números repunidades primos, assim como não sabemos se existem infinitos *quaserrepunidades* e *quasemonodígitos* primos.

# Referências


[1] BEILER, A. H. **Recreations in the theory of numbers**: the queen of mathematics entertains, New York: Dover Publications, 1964. Chapter 11.

[2] WILLIAMS, H. C. Some primes with interesting digit patterns. **Mathematics of Computation**, v. 32, n. 144, p. 1306-1310, 1978.

[3] SNYDER, W. M. Factoring repunits. **The American Mathematical Monthly**, v. 89, n. 7, p. 462-466 , 1982.

[4] COSTA, E. A.; CARVALHO, F. S. Escrever o número 111 . . . 111 como produto de dois números. **Revista do Professor de Matemática**, v. 87, p. 15-19, 2015.

[5] LUCA, F. Repdigits as sums of three Fibonacci numbers. **Mathematical Communications**, v. 17, n. 1, p. 1-11, 2012.

[6] RIBENBOIM, P. **Números primos**: velhos mistérios e novos recordes. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[7] COSTA, E. A.; SANTOS, D. C. Números repunidades: algumas propriedades e resolução de problemas. **Revista do Professor de Matemática online**, v. 8, n. 4, p. 495-503, 2020.

[8] TRIGG, C. W. Infinite sequences of palindromic triangular numbers. **The Fibonacci Quarterly**, v. 12, n. 2, p. 209–212, 1974.

[9] DUBNER, H. Repunit R49081 is a probable prime. **Mathematics of Computation**. v. 71, n. 238, p. 833-835, 2002.

[10] WILLIAMS, H. C.; DUBNER, H. A primality of R1031. **Mathematics of Computation**, v. 47, n. 176, p. 703-711, 1986.

[11] ANDREESCU, T.; GELCA, R. **Mathematical olympiad challenges**. Boston: Springer Science & Business Media, 2008.

[12] HEFEZ, A. **Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.