Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 22, n. 1, jul. 2022
Iniciação Científica

O poderoso princípio da indução matemática

The powerful principle of mathematical induction

Reginaldo Leoncio Silva
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB
reggekant@yahoo.com.br

Roger Luiz da Silva Almeida
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB
rogerluizzz@edu.uesb.br

.

Resumo

O princípio da indução matemática é uma ferramenta poderosa para demonstrar muitos resultados relativos aos inteiros positivos. Ele basicamente funciona da seguinte forma: dada uma proposição referente aos números naturais, prova-se primeiramente que a mesma vale para $n = 0$ ou $n = 1$. Em seguida, assume-se a veracidade da mesma para um certo natural $k > 1$ e depois mostra que a proposição vale também para o sucessor, ou seja, para $k + 1$. Neste trabalho realizamos um estudo sobre este princípio, destacando aplicações em diversos problemas matemáticos. A metodologia adotada foi a revisão bibliográfica, onde procuramos responder ao seguinte questionamento: quais são as aplicações do princípio de indução matemática? Do estudo feito, constatamos inúmeras aplicações em diversas situações. Pretendemos com este trabalho contribuir para uma melhor divulgação e conhecimento deste conteúdo e despertar o interesse por seu estudo, bem como estimular o uso do mesmo em demonstrações no ensino.

Palavras-chave: Indução matemática, Números naturais, Aplicações.

Abstract

The principle of mathematical induction is a powerful tool for demonstrating many results concerning positive integers. It basically works as follows: given a proposition concerning natural numbers, it is first proved that is holds for $n = 0$ or $n = 1$. Next, it is assumed to be true for a certain natural $k > 1$ and then shows that the proposition also holds for the successor, that is, for $k + 1$. In this work carry out a study on this principle, highlighting applications in several mathematical problems. The methodology adopted was the literature review, where we tried to answer the following question: what are the applications of the principle of mathematical induction? From the study carried out, we found numerous applications in different situations. Whit this work, we intend to contribute to a better dissemination and knowledge of this content and to arouse interest in its study, as well as to stimulate its use in demonstrations in teaching.

Keywords: Mathematical induction, Natural numbers, Applications.

Artigo recebido em nov. 2021 e aceito em mar. 2022

1 Introdução

Muitas descobertas em Matemática são feitas por meio de testes que fornecem evidências empíricas. O método da indução finita é uma ferramenta muito útil para desvendar a veracidade de resultados, estabelecendo provas rigorosas em Matemática. Ele se trata de uma grande arma do matemático moderno que tem muita utilidade em diferentes problemas. Neste trabalho faremos um estudo sobre este princípio, elucidando as aplicações em vários ramos da Matemática.

Uma dessa aplicações diz respeito a uma famosa sequência numérica infinita, conhecida como sequência de Fibonacci. Aqui vamos descrever tal sequência, elucidando suas principais propriedades e o uso do princıpio de indução matemática nas provas das mesmas.

2 O princípio da indução matemática

Nesta seção falaremos sobre o princípio da indução matemática, destacando o Axioma 1 e o Teorema 1, que são o alicerce da teoria deste princípio.

2.1 Formulação matemática do princípio da indução

O matemático Giuseppe Peano (1858-1932) estabeleceu a axiomática necessária para descrevermos com precisão o conjunto dos números naturais. O seu último axioma, conhecido como axioma de indução e que serve como base para o método da demonstração por indução, é o seguinte:

Axioma 1. Seja A um subconjunto de $\mathbb{N}$. Se $1 \in A$ e se, além disso, A contém todos os sucessores dos seus elementos, então $A = \mathbb{N}$.

Teorema 1 (Princípio da indução finita). Seja n_0 um inteiro positivo. Suponhamos que, para cada $n \geq n_0$, seja dada uma proposição $P(n)$. Suponha que se pode verificar as seguintes propriedades:

i) $P(n_0)$ é verdadeira;
ii) Se $P(n)$ é verdadeira então $P(n+1)$ também é verdadeira, para todo $n \geq n_0$.

Então $P(n)$ é verdadeira para qualquer $n \geq n_0$.

3 Aplicações do princípio da indução

Como dito anteriormente, o princípio da indução matemática é uma ferramenta poderosíssima na demonstração de proposições sobre o conjunto dos números naturais, tendo aplicações em uma gama de problemas, tais como identidades, desigualdades, divisibilidade, recorrências, etc. A seguir iremos evidenciar alguns problemas onde se faz o uso deste forte princípio.

3.1 Demonstração de identidades

Existem muitas identidades matemáticas envolvendo números naturais que podem ser verificadas com o uso do princípio de indução matemática. Abaixo, veremos alguns exemplos:

Exemplo 1 Demonstre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ é válida a igualdade: $2 + \cdots + 2n = n(n+1)$.

Solução:

Definimos a proposição $P(n): 2 + \cdots + 2n = n(n+1)$.. Notemos que a mesma vale para $n = 1$, pois: $P(1): 2 = 1(1+1)$. Suponhamos agora, que $P(k)$ seja verdadeira pra um certo $k > 1, k \in \mathbb{N}$.
Daí:
$2 + \cdots + 2k + 2(k+1) = k(k+1) + 2(k+1) = (k+1)(k+2)$, o que prova que $P(k+1)$ é verdade. Assim, $P(n)$ é verdade para qualquer $n \in \mathbb{N}$, pelo princípio da indução.

Observação 1 Uma consequência imediata do exemplo acima é que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, o que pode facilmente ser provada pelo leitor.

Exemplo 2 Demonstre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ é válida a igualdade: $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$.

Solução:

Definimos a proposição $P(n): 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2$. Notemos que a mesma vale para $n = 1$, pois: $P(1): 1^2 = 1 = 2.1 - 1$.

Suponhamos agora, que $P(k)$ seja verdadeira pra um certo $k > 1, k \in \mathbb{N}$.

Daí:
$1 + 3 + 5 + \cdots + 2k - 1 + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$, o que prova que $P(k+1)$ é verdade. Assim, $P(n)$ é verdade para qualquer $n \in \mathbb{N}$, pelo princípio da indução.

Exemplo 3 Os números de Fermat são números definidos pela expressão $F_n = 2^{2^n} + 1$ para todo natural n. Fermat conjecturou na época que esta fórmula era geradora de números primos. De fato, os quatro primeiros números de Fermat são primos. No entanto, Leonard Euler, provou mais tarde que para $n = 5$ a mesma resulta em um número composto. Uma propriedade interessante dos números de Fermat é a seguinte: $F_0 F_1 \ldots F_{n-1} = F_n - 2$ para todo natural n. Use o princípio de indução matemática para provar a veracidade da mesma.

Solução:

Vamos definir a proposição $P(n)$: $F_n = 2^{2^n} + 1$. Notemos que a mesma vale para $n = 1$, pois: $P(1) = F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3 = 2^{2^1} + 1 - 2 = F_1 - 2$ Suponhamos agora, que $P(k)$ seja verdadeira pra um certo $k > 1, k \in \mathbb{N}$. Daí:

$F_0 F_1 \ldots F_{k-1} F_k = (F_k - 2)F_k = (2^{2^k} + 1 - 2)(2^{2^k} + 1) = (2^{2^k} - 1)(2^{2^k} + 1) = 2^{2.2^k} - 1 = 2^{2^{k+1}} - 1 = 2^{2^{k+1}} + 1 - 2 = F_{k+1} - 2$, o que prova que $P(k+1)$ é verdade. Assim, $P(n)$ é verdade para qualquer $n \in \mathbb{N}$, pelo princípio da indução.

3.2 Demonstração de desigualdades

Assim como as identidades, também há inúmeras desigualdades que podem ser demonstradas através da indução matemática. Nos exemplos a seguir ilustraremos algumas dessas desigualdades, destacando uma desigualdade famosa, conhecida como desigualdade de Bernoulli.

Exemplo 4 Demonstre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ é válida a desigualdade: $3^{n-1} < 2^{n^2}$.

Solução:

Definimos a proposição $P(n)$: $3^{n-1} < 2^{n^2}$. Notemos que a mesma vale para $n = 1$, pois: $P(1)$: $3^{1-1} = 1 < 2^{1^2} = 2$. Suponhamos agora, que $P(k)$ seja verdadeira pra um certo $k > 1, k \in \mathbb{N}$. Usando o fato de que $3 < 2^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, temos que: $3^k = 3.3^{k-1} < 2^{k^2}.2^{2k+1} = 2^{(k+1)^2}$, o que prova que $P(k+1)$ é verdade. Assim, $P(n)$ é verdade para qualquer $n \in \mathbb{N}$, pelo principio da indução.

Exemplo 5 Prove que para qualquer $n > 3, n \in \mathbb{N}$ é válida a desigualdade: $2^n < n!$.

Solução:

Definimos a proposição $P(n)$: $2^n < n!$. Notemos que a mesma vale para n = 4, pois: P(4): $24 = 16 < 4! = 24$. Suponhamos agora, que P(k) seja verdadeira pra um certo $\mathrm{k} > 4, \mathrm{k} \in \mathbb{N}$. Usando o fato de que $2 < (\mathrm{k}+1), \mathrm{k} \in \mathbb{N}, \mathrm{k} > 4$, temos que: $2^{k+1} = 2^k.2 < \mathrm{k}!(\mathrm{k}+1) = (\mathrm{k}+1)!$, o que prova que $P(k+1)$ é verdade. Assim, $P(n)$ é verdade para qualquer $n \in \mathbb{N}, n > 3$, pelo princípio da indução.

Exemplo 6 Demonstre, que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}} < 2$, com n radicais.

Solução:

A desigualdade é claramente verdade para $n = 1$, pois $\sqrt{2} < 2$. Suponhamos que para um certo n natural, vale a desigualdade com n radicais. Adicionando 2 em ambos os lados dessa desigualdade e extraindo a raiz quadrada de ambos os lados, temos que: $\sqrt{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}} < \sqrt{2+2} = 2$, com $n+1$ radicais, o que prova a veracidade da proposição.

Exemplo 7 Uma desigualdade interessante da Matemática é a chamada Desigualdade de Bernoulli. Esta desigualdade afirma o seguinte: Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x > 1$. Então $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Use o princípio de indução matemática para demonstrar a veracidade dessa desigualdade.

Solução:

A desigualdade é claramente verdade para $n = 1$, pois $(1 + x)^1 \geq 1 + x$. Suponhamos que para um certo n natural, vale a desigualdade $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Iremos provar que $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$.

Temos que:
$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x,$ o que prova a veracidade da proposição.

3.3 Problemas de divisibilidade

O princípio da indução finita também é muito utilizado em problemas que envolvem a divisibilidade, como mostramos nos exemplos a seguir:

Exemplo 8 Mostre que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $n^3 + 2n$ é sempre divisível por 3.

Solução:

Para $n = 1$, temos que a proposição é válida, pois: $1^3 + 2.1 = 3$, que claramente é divisível por 3. Suponhamos agora, que para um certo $k > 1, k \in \mathbb{N}$, $k^3 + 2k$ é divisível por 3. Mostraremos que $(k + 1)^3 + 2(k + 1)$ é divisível por 3. Assim, temos que:
$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 = k^3 + 2k + 3(k^2 + k + 1)$. Como por hipótese $k^3 + 2k$ é divisível por 3 e como $3(k^2 + k + 1)$ também é claramente divisível por 3, segue-se que $(k + 1)^3 + 2(k + 1)$ é também divisível por 3, o que mostra a veracidade de $P(k + 1)$. Dessa forma, $P(n)$ é verdade para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 9 Prove que a soma dos cubos de três números naturais consecutivos é divisível por 9.

Solução:

Seja $P(n)$ a propriedade: $P(n)\colon n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ é divisível por 9. Admitindo que $P(n)$ seja válida para um certo n natural, mostraremos que $P(n + 1)$ é verdade, ou seja, que $P(n + 1)$: $(n + 1)^3 + (n + 2)^3 + (n + 3)^3$ é divisível por 9.

Temos então que:
$(n + 1)^3 + (n + 2)^3 + (n + 3)^3 = (n + 1)^3 + (n + 2)^3 + (n^3 + 9n^2 + 27n + 27) = n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3 + 9(n^2 + 3n + 3)$, que é claramente divisível por 9, pois $n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$ é divisível por 9 por hipótese e $9(n^2 + 3n + 3)$ também é divisível por 9. Assim, $P(n + 1)$ é verdade para todo n, o que prova a veracidade de $P(n)$.

3.4 Problemas de geometria

Outra aplicação interessante do princípio de indução matemática é no tocante a muitos problemas de Geometria, pois existem muitas fórmulas geométricas que envolvem números naturais. Abaixo apresentaremos alguns exemplos dessa aplicação:

Exemplo 10 Mostre que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n-lados é $S_n = (n-2)\pi$ radianos.

Solução:

Para $n = 3$ temos que $S_3 = (3-2)\pi = \pi$, que é verdade, pois a soma dos ângulos internos de um triângulo é π radianos. Vamos agora assumir que $P(n)$ seja verdade e mostraremos que para um polígono de $n+1$ lados, $S_{n+1} = (n-1)\pi$. Vamos denotar os vértices do polígono de $n+1$ lados por $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$. Podemos decompor este polígono como a união do polígono de n lados $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e do triângulo A_1, A_n, A_{n+1}. Dessa forma, a soma dos ângulos internos do polígono $n+1$ é: a soma dos ângulos internos do polígono de vértices $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mais a soma dos ângulos internos do triângulo A_1, A_n, A_{n+1}, isto é:
$S_{n+1} = (n-2)\pi + \pi = (n-1)\pi$, como queríamos provar.

Exemplo 11 Mostre que o número de diagonais de um polígono convexo de n-lados é $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

Solução:

Para $n = 3$ temos que $d_3 = \frac{3(3-3)}{2} = 0$, que é verdade, pois um triângulo não tem diagonais. Vamos agora assumir que $P(n)$ seja verdade e mostraremos que para um polígono de $n+1$ lados, $d_{n+1} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$. Vamos denotar os vértices do polígono de $n+1$ lados por $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$. Podemos decompor este polígono como a união do polígono de n lados $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e do triângulo A_1, A_n, A_{n+1}. Dessa forma, o número de diagonais do polígono de $n+1$ é: o número de diagonais do polígono de vértices $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mais $n-2$ diagonais que partem A_{n+1} mais a diagonal A_1A_n, isto é:
$d_{n+1} = \frac{n(n-3)}{2} + (n-2) + 1 = \frac{n^2-n-2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$, como queríamos provar.

4 O princípio da indução matemática e recorrências lineares

Estudaremos agora o princípio da indução matemática aplicado a recorrências lineares. Inicialmente, iremos definir o que é recorrência linear e propriedades, elucidando alguns exemplos do uso do princípio de indução matemática na prova da veracidade das mesmas. Também estudaremos uma recorrência famosa, conhecida como sequência de Fibonacci.

Definição 1 Uma recorrência linear de grau k é uma expressão da forma:
$x_{n+1} = r_{k-1}x_n + r_{k-2}x_{n-1} + \cdots + r_0 x_{n-k+1}, x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots ,\ x_k = a_k,$ onde $r_0, r_1, \ldots, r_{k-1}$ são números reais com $r_0 \neq 0$.

Exemplo 12 As recorrências $3x_n + 4x_{n-1} = 0$ e $-5x_n + \frac{2}{5}x_{n+1} = 3x_{n+2}$ são lineares, ao passo que as recorrências $(x_n)^3 - 2x_{n-1} = 2_n$ e $-4x_n + \frac{1}{3}x_{n+1} = 2x_{n+2} + 5$ não são lineares.

Exemplo 13 Seja a relação de recorrência $a_0 = 8, a_1 = 10$ e $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$. Prove que $a_n = 7 + 3^n, \forall\, n \in\ \mathbb{N}$.

Solução:

Temos que $P(0)$ é verdade, pois: $P(0) = 7 + 3^0 = 7 + 1 = 8$. Suponhamos agora que $P(n)$ seja verdade para algum $n > 2$. Mostraremos que $P(n + 1)$ também é verdade. Com efeito:
$a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1} = 4(7 + 3^n) - 3(7 + 3^{n-1}) = 7 + 4.3^n - 3.3^{n-1} = 7 + 3^{n-1}(4.3 - 3) = 7 + 9.3^{n-1} = 7 + 3^2.3^{n-1} = 7 + 3^{n+1}$. Assim, $P(n + 1)$ é verdade, o que prova a veracidade de $P(n)$.

4.1 A sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci, em homenagem ao matemático italiano Leonardo de Pisa (1170 - 1250), é um exemplo muito interessante de recorrência linear. Esta sequência foi estudada por muitos matemáticos, que descobriram inúmeras propriedades interessantes da mesma. Esta fantástica sequência está interligada com um enigmático número, conhecido como número de ouro. Em virtude disso, ela aparece em inúmeras situações da natureza: nas plantas, na galáxia, em animais, no corpo humano, em obras de artistas famosos, etc. Nesta seção iremos definir essa sequência e descrever algumas de suas principais propriedades, provando-as com o uso do princípio da indução matemática.

4.1.1 Definição da sequência

Definição: A sequência de inteiros positivos (F_n): $(1,1,2,3,5,8,13,21, \ldots)$, onde $F_1 = F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para todo $n > 2$, $n \in \mathbb{N}$, recebe o nome de sequência de Fibonacci. Os seus termos chamam-se números de Fibonacci.

4.1.2 Propriedades elementares

A sequência de Fibonacci é repleta de propriedades muito interessantes. Abaixo segue algumas de suas propriedades elementares e as demonstrações das mesmas.

Propriedade 1: A soma dos n primeiros números de Fibonacci é igual a $F_{n+2} - 1$.

Prova:

De fato, temos que:
$F_1 = F_3 - F_2 = F_3 - 1$
$F_2 = F_4 - F_3$
$F_3 = F_5 - F_4$
$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$
$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$
$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$
Somando membro a membro as igualdades e simplificando, temos que: $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$.

Propriedade 2: A soma dos n primeiros números de Fibonacci com índices impares é igual a F_{2n} .

Prova: É análoga a propriedade 1.

Propriedade 3: A soma dos n primeiros números de Fibonacci com índices pares é igual a $F_{2n+1} - 1$.

Prova: É análoga a propriedade 1.

Propriedade 4: Quaisquer dois números de Fibonacci consecutivos são primos entre si.

Prova:

Vamos provar usando o princípio de indução matemática sobre n. Seja $P(n)$ a seguinte proposição: $mdc(F_n, F_{n+1}) = 1, n \geq 1$. Para $n = 1$ a afirmação é trivialmente verificada, pois $mdc(1,2) = 1$. Suponhamos que $mdc(F_n, F_{n+1}) = 1$, $n \geq 1$, mostraremos que $mdc(F_{n+1}, F_{n+2}) = 1$.

Usando o lema de Euclides: $mdc\ (a, b)\ =\ mdc\ (a, b\ -\ na)$ e a hipótese de indução, temos que:

$mdc(F_{n+1}, F_{n+2}) = mdc(F_{n+1}, F_n + F_{n+1}) = mdc(F_{n+1}, F_n + F_{n+1} - F_{n+1}) = mdc(F_{n+1}, F_n) = mdc(F_n, F_{n+1}) = 1$, como queríamos provar.

Propriedade 5: $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_{n+1}F_m$, $\forall n, m \geq 1$.

Faremos a prova usando indução matemática sobre n. Para $n = 1$, temos que: $F_{m+1} = F_{m-1} + F_m = F_{m-1}F_1 + F_2F_m$. Logo o caso base é verdade. Supondo agora que para algum $n \geq 1$, $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_{n+1}F_m$, mostraremos que $F_{m+n+1} = F_{m-1}F_{n+1} + F_{n+2}F_m$.

Temos que:
$F_{m+n+1} = F_{m+n} + F_{m+n-1} = F_{m-1}F_n + F_{n+1}F_m + F_{m+n-1} = F_{m-1}F_n + F_{n+1}F_m + F_{m-1}F_{n-1} + F_nF_m = F_{m-1}(F_n + F_{n-1}) + F_m(F_{n+1} + F_n) = F_{m-1}F_{n+1} + F_{n+2}F_m$, como queríamos provar.

4.1.3 Fórmula de Binet

Como vimos, a sequência de Fibonacci é recorrente, ou seja, para se encontrar um certo termo, é preciso que se saiba quem são os dois termos anteriores a este. No entanto, existe uma fórmula fechada para se calcular os números de Fibonacci. Esta fórmula é conhecida como fórmula de Binet, que segundo Gundlach (1992, p. 63), foi descoberta por este matemático no ano de 1843 e tornou explícita a conexão entre os números de Fibonacci e o número de ouro.

Teorema 2 Para todo $n \geq 1$, tem-se que $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$, onde (F_n) é a sequência de Fibonacci.

O número $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é conhecido como de ouro. Ele é um número irracional enigmático, que aparece em inúmeras situações da natureza. Para maiores detalhes o leitor pode procurar Zahn (2010).

Prova:

Vamos provar usando indução matemática sobre n. Para $n = 1$, temos que $F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right\} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{2\sqrt{5}}{2}\right\} = 1$. Logo, o caso base é verdade.

Supondo agora que $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$ para algum $n > 1$, iremos provar a veracidade para o sucessor, isto é, que $F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}$.

Temos que:

$$\begin{aligned}
F_{n+1} = F_n + F_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left[1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}}\right] - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left[1 + \frac{2}{1-\sqrt{5}}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left[\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right] - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left[\frac{3-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right]
\end{aligned}$$

.

.Mas:

$$\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right) = \frac{3-3\sqrt{5}+\sqrt{5}-5}{-4} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{-4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

e

$$\frac{3-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right) = \frac{3+3\sqrt{5}-\sqrt{5}-5}{-4} = \frac{-2+2\sqrt{5}}{-4} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Dessa forma temos que:

$$\begin{aligned}
F_{n+1} = F_n + F_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left[\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right] - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left[\frac{3-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}
\end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio de indução, temos que $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$.

5 Conclusão

Como vimos, o princípio de indução matemática é uma ferramenta muito importante para o matemático por possibilitar demonstrações de muitas proposições referentes aos números naturais. Também vimos que este princípio tem inúmeras aplicações em diversas situações, desde tópicos relacionados com a Aritmética até tópicos referentes a Geometria. Além disso, neste trabalho procuramos elucidar um pouco sobre a fantástica sequência de Fibonacci, destacando e provando algumas de suas propriedades. Esperamos que este trabalho seja uma importante fonte de pesquisa para quem queira procurar ter mais conhecimentos sobre este assunto e que o mesmo possa impulsionar outras pesquisas futuras. Também, esperamos uma motivação por parte dos professores para o uso deste conteúdo em suas aulas em algumas demonstrações.

6 Referências

ALENCAR FILHO, E. de. **Funções aritméticas:** números notáveis. São Paulo: Nobel, 1988.

BARBOSA, F. A**. Proposta de abordagem da sequência de Fibonacci e razão áurea no ensino médio:** teoria e aplicações. 2017. 83 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília, Brasília, 2017.

BELINI, M. M. **A razão áurea e a sequência de Fibonacci**. 2015. 67 f. Dissertação (Mestrado em Ciências) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

CONTADOR, P. R. M. **A matemática na arte e na vida**. 2. ed. rev. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

GUNDLACH, B. H. **Números e numerais.** Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora Atual, 1992. (Tópicos de história da matemática para sala de aula).

OLIVEIRA, K. I. M.; FERNÁNDEZ, A. J. C**. Iniciação á matemática:** um curso com problemas e soluções. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

VOROBIOV, N. N. **Números de Fibonacci**. Tradução: Carlos Vega. Moscou: MIR, 1974. (Lecciones populares de matemáticas).

ZAHN, M. **Sequência de Fibonacci e o número de ouro**. Rio de Janeiro: Ciência. Moderna, 2011.