Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 22, n. 1, jul. 2022
Iniciação Científica

Um estudo do modelo de sobrevivência de células sanguíneas vermelhas utilizando a teoria do grau coincidente

A study of a survival red blood cell model using the coincidence degree theory

Lucas Ozaki Mizuguti
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
lucas.ozakimizuguti@gmail.com

Suzete Maria Silva Afonso
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
s.afonso@unesp.br

Resumo

Neste trabalho, provaremos a existência de solução periódica positiva para a equação diferencial funcional com retardo usada no modelo de sobrevivência de células sanguíneas vermelhas proposto por Ważewska-Czyżewska e Lasota. Como principal ferramenta, utilizaremos um corolário do Teorema de Continuação de Mawhin da teoria do grau coincidente.
Palavras-chave: Equações Diferenciais Funcionais com Retardo. Grau Coincidente. Teorema de Continuação de Mawhin. Modelo de Ważewska-Czyżewska e Lasota.

Abstract

In this work, we will prove the existence of a positive periodic solution for the delayed differential equation used in the Ważewska-Czyżewska and Lasota's survival red blood cell model. As a main tool, we will use a corollary of Mawhin's Continuation Theorem of the coincidence degree theory
Keywords: Delayed Functional Differential Equations. Coincidence Degree. Mawhin's Continuation Theorem. Ważewska-Czyżewska and Lasota's Model.

Artigo recebido em out. 2021 e aceito em abr. 2022

1 Introdução

Ważewska-Czyżewska e Lasota [1] propuseram a seguinte equação diferencial funcional com retardamento não-autônoma [2, 3, 4] para descrever a sobrevivência das hemácias em animais:

$$N'(t) \;=\; -\delta N(t) \;+\; \rho \exp\{-\gamma N(t-\tau)\},\; t \geqslant 0,\; \delta > 0,\; \rho > 0,\; \gamma > 0,\; \tau > 0, \tag{1}$$

em que

(a) $N(t)$ representa a quantidade de hemácias em um instante t;

(b) δ representa a taxa de destruição das hemácias no organismo;

(c) ρ e γ descrevem a produção de hemácias por unidade de tempo;

(d) τ é o tempo necessário para a produção de hemácias.

Devido à influência de parâmetros biológicos no modelo descrito pela equação (1), considera-se a seguinte condição inicial

$$N(t) \;=\; \phi(t),\; -\tau \leqslant t \leqslant 0, \quad \phi(0) > 0, \quad \phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^+), \tag{2}$$

onde

(e) $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$;

(f) $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^+)$ é o espaço vetorial das funções contínuas de $[-\tau, 0]$ em $\mathbb{R}^+$.

Pelo método de passos, é possível mostrar que a equação (1) sujeita à condição inicial (2), possui uma solução positiva $x(t)$ para todo $t \geqslant 0$.

Neste trabalho, por meio da teoria do grau coincidente de Mawhin [5, 6], provamos a existência de soluções periódicas positivas para a equação (1). Para atingir esse objetivo, algumas preliminares se fazem necessárias, são elas: conceitos básicos de Análise Funcional, a teoria do grau coincidente de Leray-Schauder e a teoria do grau coincidente de Mawhin. Portanto, para facilitar a leitura, abordamos sucintamente conceitos e resultados que foram utilizados ao longo do texto. O artigo está estruturado como segue.

A primeira seção apresenta conceitos e resultados básicos de Análise Funcional e da teoria do grau de Leray-Schauder. Na segunda seção, parte da teoria do grau coincidente de Mawhin que será necessária para o resultado principal é exibida. Por fim, a terceira seção é dedicada ao modelo de sobrevivência de células sanguíneas vermelhas proposto por *Ważewska-Czyżewska e Lasota* [1], descrito pela equação (1), e estudado posteriormente por *Yongli Song* [7]. Ancorados por um corolário do Teorema de Continuação de Mawhin, que é descrito na Seção 2, provamos a existência de uma solução periódica positiva para tal modelo.

Este artigo foi escrito com o intuito de propagar a possibilidade de aplicação da teoria do grau coincidente ao estudo de existência de soluções periódicas para equações diferenciais com retardamento, exemplificada pela análise aqui realizada sobre o modelo de sobrevivência de células sanguíneas vermelhas proposto por Wazewska-Czyzewska e Lasota (1). Sendo assim, este trabalho não fornece resultados inéditos; a teoria aqui desenvolvida pode ser encontrada em [7] de forma condensada. No entanto, cabe destacar que as demonstrações dos resultados que apresentamos foram reproduzidas de modo mais didático e detalhado, tornando a leitura acessível também a estudantes de graduação em Matemática.

2 Preliminares

Esta seção é dedicada a apresentação de resultados e conceitos fundamentais das teorias de Análise Funcional e do grau de Leray - Schauder, que serão importantes para o entendimento do estudo apresentado neste artigo. O leitor interessado em se aprofundar nesses pré-requisitos pode consultar as referências [8, 9, 10, 11, 12].

Análise Funcional e Teoria do Grau de Leray-Schauder

No que segue, E denotará um espaço vetorial normado, $C(\Omega, E)$ o espaço vetorial das aplicações contínuas de Ω em E e $\partial\Omega$ a fronteira do conjunto Ω.

Definição 1 *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de E. Diremos que uma aplicação do tipo $\phi = Id - T \colon \overline{\Omega} \to E$ é uma perturbação de dimensão finita da identidade, onde $Id \colon E \to E$ é a aplicação identidade e $T \in C(\overline{\Omega}, E)$, quando $T(\overline{\Omega})$ estiver contido em um subespaço de dimensão finita de E.*

Definição 2 *Diremos que um operador $T \colon \overline{\Omega} \to E$ é compacto se T for contínuo e $\mathrm{Im}\,T$ for um conjunto pré-compacto, isto é, se T for contínuo e $\overline{\mathrm{Im}\,T}$ for um conjunto compacto.*

Definição 3 *Seja $T \colon X \to Y$ um operador linear. Diremos que o operador T é compacto se $\overline{T(M)} \subset Y$ for compacto, para todo $M \subset X$ limitado.*

Teorema 4 (Teorema de Arzelà-Ascoli) *Sejam (K, d) um espaço métrico compacto e A um subconjunto de $C(K, \mathbb{R})$, o espaço vetorial das funções contínuas $f \colon K \to \mathbb{R}$. Então, A é compacto em $C(K, \mathbb{R})$ se, e somente se, as seguintes condições estão satisfeitas:*

(i) A é equicontínuo, isto é, dado $\varepsilon > 0$, para todo $t_0 \in K$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon \text{ para todos } t \in K \text{ com } d(t, t_0) < \delta \text{ e } f \in A.$$

(ii) O conjunto $\{f(t) \colon \ f \in A\}$ é limitado em K para todo $t \in K$.

Definição 5 *Seja $\phi = Id - T$ uma perturbação de dimensão finita da identidade. Se $b \notin \phi(\partial\Omega)$ e F é um subespaço de dimensão finita contendo b e $T(\overline{\Omega})$, então definimos o grau de Leray-Schauder de ϕ em Ω com relação a b por*

$$d(\phi, \Omega, b) \ := \ d\big(\phi|_{\overline{\Omega \cap F}}, \Omega \cap F, b\big), \tag{3}$$

onde $d\big(\phi|_{\overline{\Omega \cap F}}, \Omega \cap F, b\big)$ é o grau de Brouwer de $\phi|_{\overline{\Omega \cap F}}$ em $\Omega \cap F$ com relação a b.

Observação 6 *Se $T \colon \overline{\Omega} \to E$ for um operador compacto, então $\phi = Id - T$ será uma perturbação compacta da identidade.*

Corolário 7 *Se Ω é um subconjunto aberto e limitado de E e $Id \colon \Omega \to E$ é a injeção canônica, então*

$$d(Id, \Omega, b) \ = \ \begin{cases} 1, & se\ b \in \Omega, \\ 0, & se\ b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

3 Teoria do grau coincidente de Mawhin

Gaines e Mawhin [5, 6] introduziram a teoria do grau de coincidência para perturbações de operadores de Fredholm na década de 1970. Esta teoria tem se revelado uma técnica bastante poderosa para estudar existência de soluções de problemas envolvendo equações não lineares, como se pode constatar em [5, 6], por exemplo. As importantes contribuições do matemático francês Jean Mawhin para tal teoria tornaram-na conhecida como teoria do grau de coincidência de Mawhin.

Neste artigo, visamos mostrar a aplicabilidade da teoria do grau de coincidência de Mawhin à investigação de condições que garantam a existência de solução periódica para uma equação diferencial funcional com retardamento que pode ser reduzida a uma equação de operadores do tipo

$$Lx = \mathcal{N}x \tag{4}$$

em um certo subconjunto Ω de um espaço de Banach X, em que L é um operador linear de Fredholm de índice zero e $\mathcal{N}$ é uma aplicação L-compacta.

Nesta seção discorreremos sobre a teoria do grau de coincidência de Mawhin, apresentando os principais resultados e definições. Inicialmente, introduzimos o conceito de operador de Fredholm.

Definição 8 *Sejam X e Z espaços vetoriais normados. Diremos que uma aplicação linear $L\colon \operatorname{dom}(L) \subset X \to Z$ é um operador de Fredholm se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) $\ker(L)$ *possui dimensão finita* ($\dim \ker L < \infty$)*;*

(ii) $\operatorname{Im}(L)$ *é um conjunto fechado e possui codimensão finita* ($\operatorname{Im} L = \overline{\operatorname{Im} L}$ *e* $\operatorname{codim} \operatorname{Im} L < \infty$)*.*

Diremos que L é um operador de Fredholm de índice zero quando

(iii) $\dim \ker L = \dim \operatorname{Coker} L$.

O próximo resultado atesta que, dado um operador de Fredholm de índice zero, existem projeções contínuas $P\colon X \to X$ e $Q\colon Z \to Z$ tais que

$$\ker L = \operatorname{Im} P \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} L = \ker Q.$$

Proposição 9 *Se as condições da Definição 8 forem satisfeitas, então existirão projeções contínuas $P\colon X \to X$ e $Q\colon Z \to Z$ tais que*

$$\ker L = \operatorname{Im} P \quad e \quad \operatorname{Im} L = \ker Q.$$

Na sequência, veremos que a restrição $L|_{\operatorname{dom} L \cap \ker P}$ é invertível com inversa $K_P\colon \operatorname{Im} L \to \operatorname{dom} L \cap \ker P$. A prova deste resultado por ser encontrada em [12]. Ademais, podemos dizer que o resultado seguinte é uma consequência da Proposição 9.

Proposição 10 *Se as condições da Definição 8 forem satisfeitas, então o operador $L_P\colon \operatorname{dom} L \cap \ker P \to \operatorname{Im} L$ é invertível.*

Agora, consideramos $\operatorname{Coker} L$ com a topologia quociente e definimos a aplicação contínua e sobrejetora $\Pi\colon Z \to \operatorname{Coker} L$ por $\Pi z = [z]$, onde $[z]$ representa a classe de equivalência de z. A norma com relação a Π é dada por

$$\|\Pi\| = \sup_{z \neq 0} \frac{\|\Pi z\|_q}{\|z\|_Z}, \tag{5}$$

onde $\|z\|_q = \inf_{y \in \operatorname{Im} T} \|z + y\|_Z$ e $\|\cdot\|_Z$ é uma norma em Z.

No que segue, $K_{P,Q}\colon Z \to \operatorname{dom} L \cap \ker P$ denotará a inversa generalizada de L, definida por $K_{P,Q} = K_P(Id - Q)$.

Definição 11 *Sejam Ω um subconjunto aberto e limitado de X e $\mathcal{N}: \overline{\Omega} \to Z$ um operador. Diremos que $\mathcal{N}$ é um operador L-compacto em $\overline{\Omega}$, se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(i) *o operador $\Pi\mathcal{N}: \overline{\Omega} \to \operatorname{Coker} L$ é contínuo e $\Pi\mathcal{N}(\overline{\Omega})$ é limitado;*

(ii) *$K_{P,Q}\mathcal{N}$ é um operador compacto.*

Observamos que $\Pi\mathcal{N}$ é contínuo e $\Pi\mathcal{N}(\overline{\Omega})$ é limitado se, e somente se, $Q\mathcal{N}$ é contínuo e $Q\mathcal{N}(\overline{\Omega})$ é limitado.

Vamos, agora, introduzir o conceito de grau de coincidência de L e $\mathcal{N}$ em Ω, onde L é um operador de Fredholm e $\mathcal{N}$ é um operador L-compacto em $\overline{\Omega}$.

No que segue, $M: \overline{\Omega} \to X$ denotará o operador dado por

$$M = P + (\Lambda\Pi + K_{P,Q})\mathcal{N},$$

onde Λ é um isomorfismo de $\operatorname{Coker} L$ sobre $\ker L$.

Teorema 12 *Suponha que as condições das Definições 8 e 11 sejam satisfeitas, e que $0 \notin (L - \mathcal{N})(\operatorname{dom} L \cap \partial\Omega)$. Então, $|d(Id - M, \Omega, 0)|$ depende apenas de L, $\mathcal{N}$ e Ω.*

Fixadas as orientações de $\ker L$ e $\operatorname{Coker} L$, vejamos a definição do grau coincidente de L e $\mathcal{N}$ no conjunto Ω.

Definição 13 *Se os operadores L, $\mathcal{N}$ e o subconjunto Ω satisfazem as condições das Definições 8 e 11, com $0 \notin (L - \mathcal{N})(\operatorname{dom} L \cap \partial\Omega)$, então o grau de Leray-Schauder, $d(Id - M, \Omega, 0)$, está bem definido (pelo Teorema 12) e, assim, definimos o grau coincidente $d((L, \mathcal{N}), \Omega)$ de L e $\mathcal{N}$ em Ω como sendo o número inteiro*

$$d((L, \mathcal{N}), \Omega, 0) = d(Id - M, \Omega, 0),$$

em que $M: \overline{\Omega} \to X$ é uma aplicação definida por $M = P + (\Lambda\Pi + K_{P,Q})\mathcal{N}$, onde $\Lambda\colon \operatorname{Coker} L \to \ker L$ é um isomorfismo que preserva orientação.

Como o grau de coincidência de Mawhin é definido em termos do grau de Leray-Schauder, então uma pergunta aqui nos cabe: existem propriedades similares as do grau de Leray-Schauder para o grau o grau de coincidência de Mawhin? A resposta é sim.

Enunciaremos a seguir as principais propriedades do grau de coincidência de Mawhin. Entretanto, as demonstrações foram omitidas. Para estabelecê-las, basta utilizar as propriedades correspondentes do grau de Leray-Schauder. O leitor interessado pode encontrá-las em [5].

No que segue, suponha que $(L, \mathcal{N}, \Omega)$ satisfaça as condições das Definições 8 e 11, com $0 \notin (L - \mathcal{N})(\operatorname{dom} L \cap \partial\Omega)$.

Propriedade 14 (Existência) *Se $d((L, \mathcal{N}), \Omega) \neq 0$, então $0 \in (L - \mathcal{N})(\operatorname{dom} L \cap \Omega)$.*

Propriedade 15 (Exclusão) *Se $\Omega_0 \subset \Omega$ é um conjunto aberto tal que $(L - \mathcal{N})^{-1}(0) \in \Omega_0$, então*

$$d((L, \mathcal{N}), \Omega) = d((L, \mathcal{N}), \Omega_0).$$

Propriedade 16 (Aditividade) *Se $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, em que $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ são conjuntos abertos e disjuntos, e $0 \notin (L - \mathcal{N})(\operatorname{dom} L \cap \partial\Omega_i)$, $i = 1, 2$, então*

$$d((L, \mathcal{N}), \Omega) = d((L, \mathcal{N}), \Omega_1) + d((L, \mathcal{N}), \Omega_2).$$

A próxima definição permitir-nos-á enunciar o resultado de invariância do grau coincidente por homotopia.

Definição 17 *Sejam $L\colon X \to Z$ um operador de Fredholm de índice zero, Ω um subconjunto aberto e limitado de X e $\widetilde{N}$ um operador definido em $\overline{\Omega} \times [0,1]$ com valores em Z. Diremos que $\widetilde{N}$ é um operador L-compacto em $\overline{\Omega} \times [0,1]$ se o operador $\widetilde{N}_\lambda = \widetilde{N}(\cdot, \lambda)$ for L-compacto em $\overline{\Omega}$, para cada $\lambda \in [0,1]$.*

Teorema 18 (Invariância do grau por homotopia) *Se L é um operador de Fredholm de índice zero, $\widetilde{N}\colon \overline{\Omega} \times [0,1] \to Z$ é um operador L-compacto em $\overline{\Omega} \times [0,1]$ e, para $\lambda \in [0,1]$, tem-se*

$$0 \notin (L - \widetilde{N}(\cdot, \lambda))(\operatorname{dom} L \cap \partial\Omega),$$

então $d((L, \widetilde{N}(\cdot, \lambda)), \Omega)$ independe de $\lambda \in [0,1]$.

Para a demonstração do resultado de existência de solução periódica positiva para a equação (1), utilizaremos o seguinte corolário do Teorema de Continuação de Mawhin, cuja demonstração pode ser encontrada em [12, 5].

Corolário 19 *Sejam X, Z espaços de Banach e Ω um subconjunto aberto e limitado de X. Consideremos a equação*

$$Lx = \lambda \mathcal{N}' x,$$

em que $L\colon \operatorname{dom} L \subset X \to Z$ é um operador de Fredholm de índice zero, $\lambda \in [0,1]$ e $\mathcal{N}'\colon \overline{\Omega} \to Z$ é um operador L-compacto em $\overline{\Omega}$.

Sejam $P\colon X \to X$ e $Q\colon Z \to Z$ projeções contínuas tais que $\operatorname{Im} P = \ker L$ e $\ker Q = \operatorname{Im} L$.

Além disso, suponhamos que as seguintes condições sejam satisfeitas:

(I) para $\lambda \in (0,1)$ e $x \in \partial\Omega \cap \operatorname{dom} L$, tem-se $Lx \neq \lambda \mathcal{N}' x$;

(II) para $x \in \partial\Omega \cap \ker L$, tem-se $Q\mathcal{N}' x \neq 0$;

(III) $d\,(Q\mathcal{N}'|_{\Omega \cap \ker L}, \Omega \cap \ker L, 0) \neq 0$.

Sob as condições acima, a equação $Lx = \mathcal{N}' x$ possui pelo menos uma solução em $\overline{\Omega} \cap \operatorname{dom} L$.

4 Existência de soluções periódicas positivas para o modelo de Wazewska-Czyzenska e Lasota

Nosso objetivo nesta seção é utilizar um corolário do Teorema de Continuação de Mawhin, a saber, o Corolário 19, para provar a existência de soluções periódicas positivas para o sistema

$$\begin{cases} N'(t) = -\delta N(t) + \rho \exp\{-\gamma\, N(t-\tau)\}, & t \geqslant 0,\ \delta > 0,\ \rho > 0,\ \gamma > 0,\ \tau > 0, \\ N(t) = \phi(t), & -\tau \leqslant t \leqslant 0. \end{cases} \tag{6}$$

Recordamos que:

- $N(t)$ representa a quantidade de hemácias em um instante t;

- δ denota a taxa de destruição das hemácias no organismo;
- ρ e γ descrevem a produção de hemácias por unidade de tempo;
- τ é o tempo necessário para a produção de hemácias;
- $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^{+})$.

Para atingir nosso objetivo, encontraremos uma equação de operadores $Lx = \mathcal{N}x$, onde L é um operador de Fredholm de índice zero e $\mathcal{N}$ é um operador L-compacto.

Visando facilitar a notação, com relação a uma função periódica $f(t)$ com período ω, denotaremos

$$f(\xi) = \min_{t\in[0,\omega]} f(t) \quad \text{e} \quad f(\eta) = \max_{t\in[0,\omega]} f(t).$$

Lema 20 *Sejam τ e ϕ definidos anteriormente. Se $N(t)$ é solução do sistema*

$$\begin{cases} N'(t) = -\delta N(t) + \rho \exp\{-\gamma\, N(t-\tau)\}, & t \geqslant 0, \\ N(t) = \phi(t), \quad -\tau \leqslant t \leqslant 0, \end{cases}$$

então $N(t) > 0$, para todo $t > 0$.

Demonstração. De início, observamos que utilizaremos o método de passos para concluir a demonstração. Dito isso, suponhamos que exista algum $t_0 \in [0, \tau]$ tal que $x(t_0) = 0$. Como $\rho > 0$, segue que

$$N'(t) = -\delta N(t) + \rho \exp\{-\gamma\, N(t-\tau)\} > -\delta N(t).$$

Como a função exp é uma bijeção crescente de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^{+}$, multiplicando ambos os membros da desigualdade acima por $\exp\{\delta t\}$, obtemos

$$(N(t)\exp\{\delta t\})' > 0, \text{ para todo } t \in [0, t_0],$$

permitindo-nos inferir que $N(t)\exp\{\delta t\}$ é uma função crescente para todo $t \in [0, t_0]$.

Em particular, temos que

$$0 < t_0 \Rightarrow N(0)\exp\{\delta 0\} < N(t_0)\exp\{\delta t_0\},$$

donde segue que $0 < N(t_0)\exp\{\delta t_0\}$ e, portanto,

$$0 < N(t_0),$$

o que é um absurdo, haja vista que $N(t_0) = 0$.

Com isso, segue que $N(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, \tau]$. Afirmamos que $N(t) > 0$ para todo $t \in [0, \tau]$. Suponha que exista $t' \in [0, \tau]$ tal que $N(t') < 0$. Assim, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $t'' \in (0, \tau)$ tal que $N(t'') = 0$, o que é um absurdo, uma vez que $N(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, \tau]$. Sendo assim, temos a validade da afirmação e, pelo método de passos, concluímos que $N(t) > 0$ para todo $t > 0$. □

Portanto, pelo Lema 20, podemos considerar $N(t) = \exp\{x(t)\}$ e reescrever a equação (6) da seguinte forma

$$x'(t) = -\delta + \rho \exp\{-x(t) - \gamma \exp\{x(t-\tau)\}\}.$$

Consideremos $X = Z = \{x(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : x(t+\omega) = x(t)\}$ e $\|x\| = \max_{t \in [0,\omega]} |x(t)|$. Note que X e Z tonam-se espaços de Banach quando consideramos a norma da convergência uniforme (ou norma do sup). Ainda, sejam $L\colon \operatorname{dom} L \subset X \to Z$, com $Lx = x'(t)$, onde $\operatorname{dom} L = \{x \in X : x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$ e $\mathcal{N}\colon X \to Z$ o operador dado por

$$\mathcal{N}x(t) = -\delta + \rho \exp\{-x(t) - \gamma \exp\{x(t-\tau)\}\}.$$

Definamos as projeções $P\colon X \to X$ e $Q\colon Z \to Z$ por

$$Px = Qx = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(t)dt.$$

Proposição 21 *L é um operador de Fredholm de índice zero.*

Demonstração. É fácil ver que P e Q são aplicações contínuas. Mostremos, portanto, que L é um operador de Fredholm de índice zero. Note que

$$\ker L = \{x \in X : Lx = 0\} = \{x \in X : x'(t) = 0, \text{ para todo } t\},$$

ou seja, se $x \in \ker L$ então $x'(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, $x(t) = r \in \mathbb{R}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, mostrando que x é uma função constante. Logo,

$$\dim \ker L = \dim \mathbb{R} = 1 < \infty.$$

Vejamos ainda que $\operatorname{Im} L = \left\{ y \in Z : \int_0^\omega y(t)dt = 0 \right\}$. De fato, se $\tilde{y} \in \operatorname{Im} L$ então existe $x \in \operatorname{dom} L$ tal que $Lx = \tilde{y}$. Com isso, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^\omega \tilde{y}(t)dt = \int_0^\omega Lx\, dt = \int_0^\omega x'(t)dt = x(\omega) - x(0) \overset{(*)}{=} 0,$$

onde em $(*)$ usa-se o fato de x ser ω-periódica. Assim, $\tilde{y} \in \left\{ y \in Z : \int_0^\omega y(t)dt = 0 \right\}$.

Por outro lado, seja $\tilde{y} \in \left\{ y \in Z : \int_0^\omega y(t)dt = 0 \right\}$. Ou seja, $\tilde{y} \in Y$ e $\int_0^\omega \tilde{y}(t)dt = 0$. Consideremos $x(t) = \int_0^t \tilde{y}(s)ds$. Observe que x é diferenciável e

$$\begin{aligned} x(t+\omega) &= \int_0^{t+\omega} \tilde{y}(s)ds = \int_0^\omega \tilde{y}(s)ds + \int_\omega^{t+\omega} \tilde{y}(s)ds \\ &= 0 + \int_0^t \tilde{y}(s-\omega)ds = \int_0^t \tilde{y}(s)ds = x(t), \end{aligned}$$

visto que $\tilde{y}$ é ω-periódica. Portanto, temos que $\tilde{y} \in \operatorname{Im} L$ e, consequentemente,

$$\operatorname{Im} L = \left\{ y \in Z : \int_0^\omega y(t)dt = 0 \right\},$$

permitindo-nos inferir que $\operatorname{Im} L = \ker Q$.

Agora, provemos que $\operatorname{Im} L$ é um conjunto fechado. Tomemos, pois, $y \in \overline{\operatorname{Im} L}$. Então, existe uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{Im} L$ tal que

$$y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y \quad \text{e} \quad \int_0^\omega y_n(t)dt = 0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como a convergência de y_n para y, quando $n \to \infty$, é uniforme (uma vez que estamos considerando a norma da convergência uniforme), temos

$$\int_0^\omega y_n(t)dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^\omega y(t)dt,$$

donde segue que $\int_0^\omega y(t)dt = 0$ e, portanto, $y \in \operatorname{Im} L$. Logo, $\operatorname{Im} L = \overline{\operatorname{Im} L}$, mostrando que $\operatorname{Im} L$ é um conjunto fechado. Isso conclui a prova de que L é um operador de Fredholm.

Para concluir que L é um operador de Fredholm de índice zero, falta verificar que $\dim\ker L = \operatorname{codim} \operatorname{Im} L$. Pois bem, como $\operatorname{Im} Q$ é um subespaço não trivial de $\mathbb{R}$ e $\dim \mathbb{R} = 1$, temos que

$$\dim \operatorname{Im} Q = \dim \mathbb{R} = 1.$$

Sabemos, também, que

$$Z = \operatorname{Im} Q \oplus \ker Q.$$

Pelo fato de que $\ker Q = \operatorname{Im} L$, segue que $\operatorname{codim} \ker Q = \operatorname{codim} \operatorname{Im} L$. Assim, o Teorema do Núcleo e da Imagem nos garante que

$$\operatorname{codim} \operatorname{Im} L = \operatorname{codim} \ker Q = \dim Z - \dim\ker Q = \dim \operatorname{Im} Q = 1,$$

ou seja, $\dim\ker L = \operatorname{codim} \operatorname{Im} L$, o que completa a prova. □

Agora, fixe $\lambda \in (0, 1)$ e considere a equação

$$Lx(t) = \lambda \mathcal{N} x(t), \tag{7}$$

que corresponde a

$$x'(t) = -\lambda\delta + \lambda\rho \exp\{-x(t) - \gamma \exp\{x(t-\tau)\}\}. \tag{8}$$

Proposição 22 *Existe uma constante positiva B, que não depende de λ, tal que se $x \in \operatorname{dom} L$ satisfaz a equação* (8)*, então $\|x\| < B$.*

Demonstração. Suponhamos que $x \in \operatorname{dom} L$ é uma solução para a equação (8). Como $\lambda > 0$, temos

$$\frac{1}{\lambda}x'(t) + \delta = \rho \exp\{-x(t) - \gamma \exp\{x(t-\tau)\}\}.$$

Integrando ambos os membros da expressão acima em relação a t de 0 a ω, obtemos

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^\omega x'(t)dt + \delta\int_0^\omega dt = \int_0^\omega \rho \exp\{-x(t) - \gamma \exp\{x(t-\tau)\}\}dt,$$

donde, pelo Teorema Fundamental do Cálculo e pelo fato de x ser ω-periódica, segue que

$$\delta\omega \;=\; \int_0^\omega \rho\exp\{-x(t) - \gamma\exp\{x(t-\tau)\}\}dt. \tag{9}$$

Pelas expressões (7) e (9), atreladas ao fato de $\lambda \in (0,1)$ e $\rho > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^\omega |x'(t)|dt \;&=\; \lambda\int_0^\omega |-\delta + \rho\exp\{-x(t) - \gamma\exp\{x(t-\tau)\}\}|dt \\
&<\; \int_0^\omega |-\delta + \rho\exp\{-x(t) - \gamma\exp\{x(t-\tau)\}\}|dt \\
&\leqslant\; \int_0^\omega |\delta|dt \;+\; \int_0^\omega |\rho\exp\{-x(t) - \gamma\exp\{x(t-\tau)\}\}|dt \\
&=\; \delta\int_0^\omega dt \;+\; \int_0^\omega \rho\exp\{-x(t) - \gamma\exp\{x(t-\tau)\}\}dt \;=\; 2\omega\delta,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^\omega |x'(t)|dt \;<\; 2\omega\delta. \tag{10}$$

Como x é contínua e ω-periódica, podemos inferir que existem $\xi, \eta \in [0,\omega]$ tais que

$$x(\xi) \;=\; \min_{t\in[0,\omega]} x(t) \quad \text{e} \quad x(\eta) \;=\; \max_{t\in[0,\omega]} x(t). \tag{11}$$

Por (9) e (11), temos

$$\begin{aligned}
\delta\omega \;&=\; \int_0^\omega \rho\exp\{-x(t) - \gamma\exp\{x(t-\tau)\}\}dt \;\leqslant\; \int_0^\omega \rho\exp\{-x(t)\}dt \\
&\leqslant\; \int_0^\omega \rho\exp\{-x(\xi)\}dt \;=\; \rho\exp\{-x(\xi)\}\omega,
\end{aligned}$$

e assim, $\exp\{x(\xi)\} \leqslant \dfrac{\rho}{\delta}$. Daí,

$$x(\xi) \;\leqslant\; \ln\left(\frac{\rho}{\delta}\right). \tag{12}$$

Sendo $x(\xi) = \min\limits_{t\in[0,\omega]} x(t)$, segue pelo Teorema Fundamental do Cálculo que

$$x(t) \;-\; x(\xi) \;=\; \int_\xi^t x'(s)\,ds \;\leqslant\; \int_\xi^t |x'(s)|\,ds.$$

Ainda, pelo fato de $\xi, t \in [0,\omega]$, temos $\displaystyle\int_\xi^t |x'(s)|ds \leqslant \int_0^\omega |x'(s)|ds$ e, portanto,

$$x(t) \;-\; x(\xi) \;\leqslant\; \int_0^\omega |x'(s)|\,ds,$$

donde, pelas expressões (10) e (12), obtemos

$$x(t) \;\leqslant\; x(\xi) \;+\; \int_0^\omega |x'(t)|dt \;<\; \ln\left(\frac{\rho}{\delta}\right) \;+\; 2\omega\delta \;:=\; B_1, \;\text{ para todo } t \in [0,\omega]. \tag{13}$$

Novamente por (9) e (11), temos

$$\begin{aligned}\delta\omega &= \int_0^{\omega} \rho \exp\{-x(t) - \gamma \exp\{x(t-\tau)\}\}dt \geqslant \int_0^{\omega} \rho \exp\{-\exp\{x(t)\} - \gamma \exp\{x(t-\tau)\}\}dt \\ &\geqslant \int_0^{\omega} \rho \exp\{-\exp\{x(\eta)\} - \gamma \exp\{x(\eta)\}\}dt \geqslant \rho \exp\{-(1+\gamma)\exp\{x(\eta)\}\}\omega,\end{aligned}$$

ou seja, $\dfrac{\delta}{\rho} \geqslant \exp\{-(1+\gamma)\exp\{x(\eta)\}\}$, donde segue que

$$\exp\{(1+\gamma)\exp\{x(\eta)\}\} \geqslant \frac{\rho}{\delta}.$$

Logo,

$$\exp\{x(\eta)\} \geqslant \frac{\ln\left(\frac{\rho}{\delta}\right)}{1+\gamma},$$

o que nos permite escrever

$$x(\eta) \geqslant \ln\left(\frac{\ln\left(\frac{\rho}{\delta}\right)}{1+\gamma}\right). \tag{14}$$

Por argumentos similares aos utilizados anteriormente, como $x(\eta) = \max_{t\in[0,\omega]} x(t)$, temos pelo Teorema Fundamental do Cálculo que

$$x(\eta) - x(t) = \int_t^{\eta} x'(s)\, ds \leqslant \int_t^{\eta} |x'(s)|\, ds,$$

donde segue que

$$x(t) - x(\eta) \geqslant -\int_t^{\eta} |x'(s)|\, ds.$$

Como $t, \eta \in [0,\omega]$, temos $-\int_{\eta}^{t} |x'(s)|ds \geqslant -\int_0^{\omega} |x'(s)|ds$. Assim,

$$x(t) - x(\eta) \geqslant -\int_0^{\omega} |x'(s)|\, ds,$$

donde, pelas expressões (10) e (14), obtemos

$$x(t) \geqslant x(\eta) - \int_0^{\omega} |x'(s)|\, ds > \ln\left(\frac{\ln\left(\frac{\rho}{\delta}\right)}{1+\gamma}\right) - 2\omega\delta := B_2, \text{ para todo } t \in [0,\omega]. \tag{15}$$

Tomando $B > \max\{|B_1|, |B_2|\}$, temos, pelas expressões (13) e (15), que se $x \in \operatorname{dom} L$ satisfaz (8) então $\|x\| < B$. □

Para o próximo resultado, consideremos $\Omega \subset X$ o seguinte conjunto aberto e limitado:

$$\Omega = \{x \in X : \|x\| < B\}.$$

Proposição 23 *O operador $\mathcal{N}$ é L-compacto em $\overline{\Omega}$.*

Demonstração. De início, mostramos que $Q\mathcal{N}(\overline{\Omega})$ é limitado. De fato, considere $x \in \overline{\Omega}$ arbitrário e note que

$$\begin{aligned} |Q\mathcal{N}(x)| &= \left|\frac{1}{\omega}\int_0^\omega \mathcal{N}(x)dt\right| = \frac{1}{\omega}\left|\int_0^\omega -\delta dt + \int_0^\omega \rho\exp\{-x(t) - \gamma\exp\{x(t-\tau)\}\}dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{\omega}\int_0^\omega |\delta| dt + \frac{1}{\omega}\int_0^\omega |\rho\exp\{-x(t) - \gamma\exp\{x(t-\tau)\}\}|dt \\ &= \delta + \rho\exp\{B + \gamma\exp\{B\}\}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|Q\mathcal{N}(x)| \leqslant \delta + \rho\exp\{B + \gamma\exp\{B\}\},$$

de onde segue que o conjunto $Q\mathcal{N}(\overline{\Omega})$ é limitado.

Afirmação: a inversa do operador L restrito a $\operatorname{dom} L \cap \ker P$, $K_P\colon \operatorname{Im} L \to \operatorname{dom} L \cap \ker P$, é dada por

$$K_P(z(t)) = -\frac{1}{\omega}\int_0^\omega \int_0^t z(s)\, dsdt + \int_0^t z(s)\, ds, \quad \text{para } z \in \operatorname{Im} L. \tag{16}$$

De fato, observe que como L é um operador de Fredholm de índice zero (veja Proposição 21), então $\operatorname{Im} L = \ker Q$. Mostremos, agora, que $\operatorname{Im} L = \operatorname{Im}(Id - Q)$. Com efeito, tome $y \in \operatorname{Im}(Id - Q)$ arbitrário. Assim, existe $x \in X$ tal que $(Id - Q)x(t) = y(t)$, com $t \in [0, \omega]$. Ou seja, $x(t) - Q(x(t)) = y(t)$. Mas, como $\ker Q = \operatorname{Im} L$ e Q é uma projeção, segue que

$$Q(y(t)) = Q(x(t) - Q(x(t))) = Q(x(t)) - Q^2(x(t)) = 0,$$

donde $Q(y(t)) = 0$ e, portanto, $y(t) \in \ker Q = \operatorname{Im} L$.

Por outro lado, se $y \in \operatorname{Im} L$, então existe $x \in X$ tal que $L(x(t)) = y(t)$, ou seja, $x'(t) = y(t)$. Novamente pelo fato de $\ker Q = \operatorname{Im} L$, temos $Q(x'(t)) = 0$. Logo, $Q(y(t)) = 0$. Como Q é projeção, temos que

$$Q(y(t)) = 0 = Q(x(t)) - Q^2(x(t)),$$

ou seja, $y(t) = x(t) - Q(x(t)) = (Id - Q)x(t)$. Portanto, $y(t) \in \operatorname{Im}(Id - Q)$, e assim $\operatorname{Im} L = \operatorname{Im}(Id - Q)$.

Com isso, podemos dizer que K_P está definido em $\operatorname{Im} L = \operatorname{Im}(Id - Q)$. Assim, se $y \in \operatorname{Im} L$, então temos que

$$y(t) = L(x(t)) = x'(t) \quad \text{e} \quad y(t) = x(t) - Q(x(t)).$$

Como x' é contínua, uma vez que $x \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, então $x' = y$ é integrável. Sendo assim, integrando de 0 a t a expressão $y(s) = x(s) - Q(x(s))$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t y(s)\, ds &= \int_0^t x(s)\, ds - \int_0^t Q(x(s))\, ds = \int_0^t x(s)\, ds - \int_0^t \left[\frac{1}{\omega}\int_0^\omega x(s)\, dt\right] ds \\ &= \int_0^t x(s)\, ds - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \int_0^t x(s)\, dsdt. \end{aligned}$$

Assim, para $z \in \operatorname{Im} L$ arbitrário, tem-se que

$$K_P(z(t)) = \int_0^t z(s)\, ds - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \int_0^t z(s)\, dsdt.$$

Ainda, temos que $K_p(L(z(t))) = z(t)$, o que conclui a prova da afirmação.

Agora, mostremos que $K_{P,Q}\mathcal{N}$ é um operador compacto. Com efeito, sabemos que $K_{P,Q}\mathcal{N} = K_P(Id - Q)\mathcal{N}$. Assim, para $x \in \Omega$ e pela expressão (16), segue que

$$\begin{aligned} K_{P,Q}\mathcal{N}x &= K_P\mathcal{N}x - K_PQ\mathcal{N}x = -\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t \rho\exp\{-x(s) - \gamma\exp\{x(s-\tau)\}\}\,dsdt \\ &\quad + \int_0^t \rho\exp\{-x(s) - \gamma\exp\{x(s-\tau)\}\}\,ds \\ &= K_P(\rho\exp\{-x(t) - \gamma\exp\{x(t-\tau)\}\}), \end{aligned}$$

ou seja,

$$K_{P,Q}\mathcal{N}x = K_P(\rho\exp\{-x(t) - \gamma\exp\{x(t-\tau)\}\}). \tag{17}$$

Como $x \in \operatorname{dom} L$ e exp é uma aplicação contínua, segue pelas expressões (16) e (17) que $K_{P,Q}\mathcal{N}$ é um operador contínuo.

Seja Λ um subconjunto de $\overline{\Omega}$ e seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em Λ. A fim de mostrar que $K_{P,Q}\mathcal{N}$ é um operador compacto, provaremos que existe uma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\{K_{P,Q}\mathcal{N}x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente. Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli , é suficiente mostrar que a sequência de funções $\{K_{P,Q}\mathcal{N}x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é equicontínua e uniformemente limitada. Façamos isso.

Afirmação 1: A sequência de funções $\{K_{P,Q}\mathcal{N}x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é equicontínua.

Com efeito, pela continuidade da aplicação exp, do fato de $x_n \in \Lambda \subset \operatorname{dom} L$ e x_n ser ω-periódica, temos, para $t_0 \in [0,\omega]$ arbitrário que, para $\dfrac{\varepsilon}{3\rho\omega} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $t \in [0,\omega]$, $|t - t_0| < \delta$ então

$$|\exp\{-x_n(t) - \gamma\exp\{x_n(t-\tau)\}\} - \exp\{-x_n(t_0) - \gamma\exp\{x_n(t_0-\tau)\}\}| < \frac{\varepsilon}{3\rho\omega}.$$

Com isso, para $x_n \in \Lambda$ e supondo que $|t - t_0| < \delta$, com $t, t_0 \in [0,\omega]$, temos

$$\begin{aligned} |K_{P,Q}\mathcal{N}(x_n(t)) - K_{P,Q}\mathcal{N}(x_n(t_0))| &\leqslant \frac{\rho}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t |\exp\{-x_n(t_0) - \gamma\exp\{x_n(t_0-\tau)\}\} \\ &\quad - \exp\{-x_n(s) - \gamma\exp\{x_n(s-\tau)\}\}|\,dsdt + \int_0^t |\exp\{-x_n(s) - \gamma\exp\{x_n(s-\tau)\}\} \\ &\quad - \exp\{-x_n(t_0) - \gamma\exp\{x_n(t_0-\tau)\}\}|ds \leqslant \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3\omega}\cdot\omega = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|K_{P,Q}\mathcal{N}(x_n(t)) - K_{P,Q}\mathcal{N}(x_n(t_0))| < \varepsilon, \quad \text{sempre que } x_n \in \Lambda \text{ e } |t - t_0| < \delta,$$

provando a Afirmação 1.

Afirmação 2: A sequência de funções $\{K_{P,Q}\mathcal{N}x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada.

De fato, seja $t_0 \in [0,\omega]$ arbitrário. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Lambda \subset \overline{\Omega}$, temos

$$|K_{P,Q}\mathcal{N}(x_n(t_0))| \leqslant \frac{3\rho\omega}{2}\cdot\exp\{B + \gamma\exp\{B\}\},$$

provando a Afirmação 2.

Portanto, como $K_{P,Q}\mathcal{N}$ é um operador compacto, podemos inferir que $\mathcal{N}$ é um operador L-compacto em $\overline{\Omega}$. □

Proposição 24 *Pelo que foi exposto com relação ao operador $\mathcal{N}$, as seguintes hipóteses são satisfeitas:*

(I) Para $\lambda \in (0,1)$ e $x \in \partial\Omega \cap \operatorname{dom} L$, tem-se $Lx \neq \lambda \mathcal{N}x$;

(II) Para $x \in \partial\Omega \cap \ker L$, tem-se $Q\mathcal{N}x \neq 0$;

(III) $d\left(Q\mathcal{N}|_{\Omega\cap\ker L}, \Omega \cap \ker L, 0\right) \neq 0$.

Demonstração. (I): Tome $\lambda \in (0,1)$ e $x \in \partial\Omega \cap \operatorname{dom} L$ arbitrários, e suponha que $Lx = \lambda\mathcal{N}x$. Assim, pelo modo como definimos L e $\mathcal{N}$, e pela Proposição 22, temos $\|x\| < B$. Portanto, $\Omega = \operatorname{int}\Omega$, donde $x \notin \partial\Omega \cap \operatorname{dom} L$. Mas isso é um absurdo, uma vez que tomamos $x \in \partial\Omega \cap \operatorname{dom} L$. Com isso, tem-se $Lx \neq \lambda\mathcal{N}x$.

(II): Considere $x \in \partial\Omega \cap \ker L$. Logo, $x \in \ker L$ e, portanto, $x'(t) = 0$ para todo $t \in [0,\omega]$. Com isso, temos que $x(t) = c \in \mathbb{R}$, ou seja, $x(t)$ é uma função constante. Suponhamos que $Q(\mathcal{N}x(t)) = 0$. Assim,

$$-\delta \ + \ \rho\exp\{-x(t) - \gamma\exp\{x(t-\tau)\}\} \ = \ 0,$$

donde segue que $\rho\exp\{-x(t) - \gamma\exp\{x(t-\tau)\}\} = \delta$.

Ademais, note que pelo fato da aplicação exp ser crescente, temos

$$\rho\exp\{-(1+\gamma)\exp\{x(t)\}\} \ = \ \rho\exp\{-x(t) - \gamma\exp\{x(t-\tau)\}\} \ \leqslant \ \rho\exp\{-x(t)\}. \qquad (18)$$

Pela igualdade presente em (18), obtemos

$$\rho\exp\{-(1+\gamma)\exp\{x(t)\}\} \ = \ \delta \ \Rightarrow \ \frac{\rho}{\delta} \ = \ \exp\{(1+\gamma)\exp\{x(t)\}\},$$

ou seja,

$$\ln\left(\frac{\ln\left(\frac{\rho}{\delta}\right)}{(1+\gamma)}\right) \ = \ x(t).$$

Já pela desigualdade presente em (18), temos que

$$\delta \ \leqslant \ \rho\exp\{-x(t)\} \ \Rightarrow \ x(t) \ \leqslant \ \ln\left(\frac{\rho}{\delta}\right).$$

Com isso,

$$\ln\left(\frac{\ln\left(\frac{\rho}{\delta}\right)}{(1+\gamma)}\right) \ = \ x(t) \ \leqslant \ \ln\left(\frac{\rho}{\delta}\right). \qquad (19)$$

Sendo assim, pelo modo como definimos a constante B (veja Proposição 22) e pela expressão (19), obtemos

$$-B \ < \ B_2 \ < \ \ln\left(\frac{\ln\left(\frac{\rho}{\delta}\right)}{(1+\gamma)}\right) \ = \ x(t) \ \leqslant \ \ln\left(\frac{\rho}{\delta}\right) \ < \ B_1 \ < \ B,$$

o que nos permite escrever que $x(t) \in \Omega$. Mas isso é um absurdo, uma vez que $x \in \partial\Omega$ por hipótese. Com isso, segue que $Q(\mathcal{N}x(t)) \neq 0$.

(III): Para verificar a validade deste item, utilizaremos a invariância do grau por homotopia (veja Teorema 18). Assim, consideremos a seguinte homotopia entre $-Id$ e $Q\mathcal{N}$,

$$H(x(t),\mu) \ = \ \mu(-x(t)) \ + \ \frac{1-\mu}{\omega}\int_0^\omega Q(\mathcal{N}(x(t)))\,dt, \ \text{para todo } \mu \in [0,1].$$

Vamos mostrar que $0 \notin H((\partial\Omega \cap \ker L) \times [0,1])$. De fato, tomando $x(t) \in \partial\Omega \cap \ker L$, temos que $x(t)$ é constante e $\|x(t)\| = B$, donde segue que $x(t) = \pm B$. Assim, pelo item (II), temos $Q(\mathcal{N}(x(t))) \neq 0$. Afirmamos que $Q(\mathcal{N}(B)) < 0$ e $Q(\mathcal{N}(-B)) > 0$. Com efeito, supondo $Q(\mathcal{N}(B)) > 0$, temos

$$0 \; < \; Q(\mathcal{N}(B)) \; = \; \frac{1}{\omega}\int_0^\omega -\delta dt \; + \; \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \rho\exp\{-B-\gamma\exp\{B\}\}dt \; \leqslant \; -\delta \; + \; \rho\exp\{-B\},$$

donde segue que

$$\delta \; < \; \rho\exp\{-B\}$$

e, portanto,

$$B \; < \; \ln\left(\frac{\rho}{\delta}\right) \; < \; \ln\left(\frac{\rho}{\delta}\right) \; + \; 2\omega\delta \; = \; B_1,$$

ou seja, $B < B_1$. Mas isso é um absurdo, uma vez que $B > \max\{|B_1|, |B_2|\}$. Com isso, temos que $Q\mathcal{N}(B) < 0$.

Por argumentos similares, tem-se $Q\mathcal{N}(-B) > 0$. Sendo assim, tomando $x(t) \in \partial\Omega \cap \ker L$ e $\mu \in [0,1]$, e atentando para o fato de que $Q(\mathcal{N}(B)) < 0$ e $Q(\mathcal{N}(-B)) > 0$, obtemos

$$x(t)H(x(t),\mu) \; = \; \mu(-x^2(t)) \; + \; \frac{1-\mu}{\omega}\int_0^\omega x(t)Q(\mathcal{N}(x(t)))\, dt \; < \; 0,$$

o que nos permite concluir que $0 \notin H((\partial\Omega \cap \ker L) \times [0,1])$.

Portanto, o Corolário 7 e o Teorema 18 nos garantem que

$$d\left(Q\mathcal{N}|_{\Omega\cap\ker L}, \Omega\cap\ker L, 0\right) \; = \; d\left(-Id|_{\Omega\cap\ker L}, \Omega\cap\ker L, 0\right) \; \neq \; 0,$$

mostrando a validade do resultado. □

Por fim, mostraremos que a equação

$$x'(t) \; = \; -\delta \; + \; \rho\exp\{-x(t) - \gamma\exp\{x(t-\tau)\}\} \tag{20}$$

possui pelo menos uma solução ω-periódica positiva em Ω, atingindo assim o objetivo central deste trabalho. Para tal, utilizaremos os resultados que foram demonstrados ao longo do artigo.

Teorema 25 *A equação* (20) *com a condição inicial* (2) *possui pelo menos uma solução positiva e ω-periódica em Ω.*

Demonstração. Pelas Proposições 21, 22, 23 e 24, temos que as condições do Corolário 19 estão satisfeitas. Logo, a equação (20) possui pelo menos uma solução ω-periódica em $(\mathrm{dom}\, L \cap \Omega) \subset \Omega$, a qual denotaremos por $y(t)$.

Sendo assim, $x(t) = \exp\{y(t)\}$ é uma solução ω-periódica da equação (20) em Ω. □

5 Referências bibliográficas

1. WAŻEWSKA-CZYŻEWSKA, M.; LASOTA, A. Mathematical problems of the dynamics of the red blood cells systems. **Matematyka Stosowana**, v. 4, n. 6, 23-40, 1976.

2. KOLMANOVSKII, V.; MYSHKIS, A. **Introduction to the theory and applications of functional differential equations**. Netherlands: Springer Science and Business Media, 2013.

3. HALE, J. K.; LUNEL, S. M. V. **Introduction to functional differential equations**. New York: Springer-Verlag, 1991.

4. KUANG, Y. **Delay differential equations:** with applications in population dynamics. Boston: Academic Press, 1993.

5. GAINES, R. E.; MAWHIN, J. L. **Coincidence degree and nonlinear differential equations**. Berlin: Springer - Verlag, 1977.

6. MAWHIN, J. Degré topologique et solutions périodiques des systèmes différentiels non linéaires. **Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège**, v. 38, n. 7-8, p. 308 - 398, 1969.

7. SONG, Y. Positive periodic solutions of a periodic survival red blood cell model. **Applicable Analysis**: An International Journal, v. 84, n. 11, p. 1095-1101, 2005.

8. BERESTYCKI, H. **Méthodes topologiques et problèmes aux limites non linéaires**. 1975. Thèse (Doctorat en Mathématiques) – Université Paris VI – Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1975.

9. BREZIS, H. **Analyse fonctionnelle:** théorie et applications. Paris: Masson, 1983.

10. FONSECA, I.; GANGBO, W. **Degree theory in analysis and applications**. Oxford: Oxford University Press, 1995.

11. KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications**. New York: John Wiley and Sons, 1978.

12. SOUZA, C. S. **Existência de soluções periódicas e permanência de soluções de equações diferenciais funcionais com retardo**. 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", São José do Rio Preto, 2018.