Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 22, n. 1, jul. 2022
Iniciação Científica

Karina Picello Duarte
Câmpus Osasco
Universidade Federal de São Paulo
karina.picello@unifesp.br

Raphael de Oliveira Garcia
Câmpus Osasco
Universidade Federal de São Paulo
rogarcia@unifesp.br

O impacto das horas extras no fluxo de caixa de uma empresa via programação linear

The impact of overtime on a company's cash-flow by linear programming

Resumo

As tendências de mercado de trabalho atuais exigem processos cada vez mais otimizados e há necessidade de ferramentas que os viabilizem. Uma alternativa é a programação linear aplicada em ambiente empresarial e/ou industrial. Um importante instrumento para o acompanhamento do cotidiano de empresas é o fluxo de caixa, que depende da atuação de seus funcionários em diversos setores. Este trabalho tem como objetivo analisar o impacto das horas extras de funcionários no fluxo de caixa de uma empresa via programação linear. Para isto, modificou-se um modelo de fluxo de caixa, que não considera as horas extras, para um modelo que adiciona tal informação, alterando os tipos de restrições. Em seguida, o método do Grande M foi implementado em um código próprio no *Octave*. Cenários foram simulados e comparados com o modelo sem horas extras, mostrando que o fluxo de caixa aumenta ao possibilitar que determinados funcionários realizem trabalhos extras, o que pode auxiliar na decisão econômica de investimentos por meio do fluxo de caixa.

Palavras-chave: Fluxo de caixa. Método do Grande M. Programação Linear.

Abstract

Current labor market trends require increasingly optimized processes and there is the need for tools that enable them. One of which is linear programming applied in a business and/or industrial environment, which depends on the performance of its employees from different sectors. This work aims to analyze the impact of employees' overtime on a company's cash-flow via linear programming. For this, a cash flow model, which does not consider overtime, was modified to a model that adds such information, changing the types of restrictions. Then, the Big M method was implemented an own code in *Octave*. Scenarios were simulated and compared with the model without overtime, showing that cash flow increases by allowing certain employees to perform extra work, helping in the economic decision of investments through cash-flow.

Keywords: Cash-flow. Big M method. Linear Programming.

Artigo recebido em mar. 2022 e aceito em maio 2022

1 Introdução

Em sociedades cada vez mais competitivas, problemas que envolvem a otimização de grandezas ganham importância, desde aplicações em mercado, produção e industria, até questões voltadas para meio ambiente, gasto energético, entre outros. Neste contexto, processos de maximização/minimização surgem em diferentes áreas do conhecimento e suas aplicações auxiliam em tomadas de decisões, ajudando a embasá-las.

Buscando soluções progressivamente mais otimizadas, de rápida produção e com resultados certeiros, o mercado de trabalho tem se modificado e métodos que visam tais características vêm se tornando importantes e essenciais.

Na área de Finanças e Contabilidade, uma maneira de avaliar uma produção ou a execução de um projeto, ou até mesmo o funcionamento de uma empresa é investigar o montante de caixa recolhido e gasto por uma determinada produção, projeto ou toda a empresa em si, dentro de um período de tempo, isto é, estudar o fluxo de caixa (*cash-flow*) (Mendes, 2014).

Em geral, vários fatores podem estar atrelados ao fluxo de caixa e um grande desafio que as indústrias e empresas enfrentam no dia-a-dia é sua maximização. Uma possibilidade é modelar e maximizar o fluxo de caixa de uma empresa, utilizando dados de preço de venda, estrutura de custos e ativos, e capacidade dos recursos (Mendes, 2014), via método *Simplex*.

Caso a empresa/indústria exerça suas atividades contando também com horas extras, o fluxo de caixa descrito em Mendes (2014) precisa de uma adaptação para considerar essa variável no problema de otimização. Dessa forma, este estudo tem como objetivo adicionar a variável *horas extras* ao modelo de fluxo de caixa e analisar os impactos na maximização. Ao acrescentar tal variável, os tipos de restrições da programação linear passam a ser mais gerais do que o método *Simplex* possibilita, de modo que para maximizar o modelo de fluxo de caixa adaptado utilizou-se o método do Grande M. A implementação computacional foi feita via pacote simbólico *Sympy*, integrado ao *Octave*, em um código próprio (GNU OCTAVE, 2021).

Cenários foram simulados com o intuito de comparar o fluxos de caixa sem e com horas extras. O presente trabalho surgiu a partir de uma iniciação científica voluntária em programação linear, desenvolvida pela primeira autora e orientada pelo segundo autor. Durante a pesquisa observou-se pouca utilização do método do Grande M e que o acréscimo das horas extras no modelo proposto por Mendes (2014) traria a possibilidade de uma nova aplicação para o método e de novas interpretações para o problema de fluxo de caixa.

O trabalho foi dividido em três partes: a primeira expõe aspectos técnicos da modelagem, explicitando os valores e modificações realizadas no problema original; a segunda parte caracteriza os métodos númericos *Simplex* e do Grande M, assim como o software Octave; por fim, a aplicação foi explorada sob a perspectiva de ambos os métodos, apresentando os resultados obtidos em cada um.

2 Modelagem matemática

O desenvolvimento do trabalho consiste em uma aplicação da programação linear em um problema de maximização de valor na decisão econômica de investimentos, por meio do fluxo de caixa (*cash-flow*) anual de uma determinada empresa. As variáveis do modelo inicial são os dados de preço de venda, estrutura de custos e ativos e capacidade dos recursos.

2.1 Modelo inicial

Entende-se por tomada de decisão, a escolha de fatores e investimentos que tragam maiores lucros para uma empresa, baseada na otimização de um modelo de fluxo de caixa em programação linear (ARENALES *et al*, 2006). É essencial dispor de dados suficientes para que a decisão ocorra de modo consciente e transparente.

Fluxo de caixa é um fluxo formado em uma linha temporal individual, dividido por linhas verticais que partem do tempo indicado, podem ser na parte superior, se os dados forem referentes à entradas, ou seguindo para a parte inferior, caso o dado seja de saída. Outra forma de representar essa gestão é por gráficos, atribuindo diferentes cores para as operações; ou ainda por tabelas (SILVA *et al*, 2019).

A decisão adquire característica econômica, ao se tratar de fatores de risco que envolvem operações de caráter econômico, que são os dados demonstrativos de resultados de uma empresa. Tais resultados podem ser associados ao desempenho de funcionários da empresa e seus consultores.

Um demonstrativo de empresa pode ser dividido em seis categorias:

(1) Grandes Candidaturas (GC);

(2) Pequenas Candidaturas (PC);

(3) Candidaturas de Benefícios Fiscais (BF);

(4) Candidaturas de Internacionalização (Int);

(5) Modelos de controle de gestão (MGC);

(6) Custos Fixos (CFx).

As grandes candidaturas (GC) são aplicações de investimentos com valor superior a β unidades monetárias, em fundos de um determinado mercado financeiro. As pequenas candidaturas (PC) são investimentos de valor menor ou igual a β, ligados aos fundos do mesmo mercado em questão.

As candidaturas de benefícios fiscais (BF) são incentivos fiscais que a empresa ou o setor de atuação da empresa recebe; as candidaturas de financiamento para a internacionalização (Int) são os investimentos que a empresa faz em mercados estrangeiros e, para que se tenha um funcionamento adequado da empresa, acontece a implementação de modelos de controle de gestão (MCG).

Na modelagem de um fluxo de caixa, considera-se os itens (1) a (5) como variáveis obtidas de suas respectivas margens brutas unitárias, X_i, $i = 1, \ldots, 5$. Dessa forma, o valor aplicado para cada variável é dado por $\alpha_i X_i$ e a função que representa o fluxo de caixa (CF) é:

$$CF(X_1, \ldots, X_5) = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i X_i \; - \; \alpha_6, \tag{1}$$

em que α_6 representa o custo fixo anual da empresa em questão.

Cada valor aplicado depende da capacidade de trabalho de cada funcionário ou recurso humano (RH) empregado, no caso, gerentes (RHg) e consultores financeiros (RHc). Além disso, cada recurso humano pode atuar em mais de uma das categorias descritas no demonstrativo da empresa. Dessa forma, um RH poderia distribuir sua capacidade de trabalho da seguinte forma,

$$RH_i \; = \; \sum_{j=1}^{5} a_{ij} X_j \; \leq \; CH_i, \tag{2}$$

em que o índice i representa o i-ésimo funcionário, o índice j representa a sua capacidade de trabalho distribuída a cada atividade X_i e CH_i é a quantidade máxima de horas trabalhadas que o funcionário possa ter, sem considerar horas extras.

Neste caso, o objetivo é otimizar o fluxo de caixa modelado pela Equação (1), sujeito às restrições impostas pela Equação (2), para cada funcionário. Como a função objetivo é linear com relação às variáveis $X_i,\ i = 1, \ldots, 5$ e cada restrição também é linear, as Equações (1) e (2) formam um problema de programação linear com o intuito de maximizar o fluxo de caixa.

Um método amplamente utilizado em pesquisa operacional é o método *Simplex*, desenvolvido por George Dantzig, cuja motivação foi resolver um problema de alocação de recursos escassos. A teoria foi desenvolvida em ambiente militar na década de 50 e teve sua primeira aplicação não militar na década de 60. Inicialmente o método era utilizado em calculadoras e em 1954 o primeiro código computacional comercial foi criado, impulsionando o uso do algoritmo *Simplex* em diversas áreas da indústria, engenharia e ciências (COLIN, 2018).

O método *Simplex* possibilita resolver problemas que envolvem restrições do tipo $(\leq)$, onde as variáveis de folga são positivas. Considerando a quantidade de recursos humanos utilizados, os dados da empresa referentes ao demonstrativos de investimentos e a capacidade de produção dos recursos humanos, é possível obter os valores ótimos $X_i^*,\ i = 1, \ldots, 5$, que maximizam o fluxo de caixa $CF(X_1, \ldots, X_5)$ via método *Simplex*.

Detalhes sobre o método serão apresentados na Seção 3.1.

2.2 Modelo modificado

O problema da Seção 2.1 não considera a possibilidade dos funcionários realizarem horas extras, isto é, trabalhar mais que CH_i na Equação (2). Uma forma de adicionar essa informação é modificar o tipo de restrição da Equação (2).

Se um funcionário trabalhar além da quantidade CH_i, passamos a ter a seguinte restrição:

$$RH_i \ = \ \sum_{j=1}^{5} a_{ij} X_j \ \geq \ CH_i, \tag{3}$$

que demanda variáveis em excesso, ou seja, restrições do tipo $(\geq)$.

Neste contexto, o método *Simplex* precisa de adaptações e uma delas é conhecida como método do Grande M.

O método do Grande M consiste em adicionar variáveis artificiais nas restrições e, consequentemente, na função objetivo z. Dessa forma, a função objetivo se torna:

$$z \ = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_p x_p - M \sum_{k=p+1}^{n} x_k^a. \tag{4}$$

As modificações nas restrições vão depender se as restrições são do tipo $(=)$ ou do tipo $(\geq)$ e uma descrição completa encontra-se na referência Colin (2018).

Em resumo, o processo de encontrar uma solução para a programação linear via método do Grande M é semelhante ao algoritmo do método *Simplex*, no entanto a variável M é carregada até que se encontre uma solução ótima, que por sua vez será a solução ótima para o problema que considera as horas extras trabalhadas, dos recursos humanos utilizados.

Do ponto de vista de operações matemáticas, os métodos não apresentam diferenças significativas, mas do ponto de vista computacional, os códigos dos métodos possuem diferenças substanciais.

3 Métodos numéricos

A Programação linear visa solucionar problemas matemáticos cujo objetivo é maximizar ou minimizar uma determinada função linear de várias variáveis, essa chamada de função objetivo, sujeita a restrições em forma de equações e/ou inequações, por meio de um algoritmo computacional ou de forma manual. O ambiente computacional possibilita o uso da ferramenta *Solver* para cálculos dessa natureza, ao selecionar os dados necessários de função objetivo e restrições, bem como qual otimização se deseja aplicar (SCHNEIDER, 2013).

Para encontrar a solução analítica, é necessário executar passos que permitem a manipulação das informações, além de empregar métodos que efetuem operações aritméticas de maneira organizada, resultando na solução ótima do problema. No entanto, ao se trabalhar com grandes quantidades de dados, a escolha mais indicada é a computacional, que consiste na utilização de técnicas numéricas e computacionais para tornar o processo mais rápido e confiável, podendo ser por meio de ferramentas já existentes – como os *Solver's* – ou pelo desenvolvimento de um código próprio que permita tal cálculo.

3.1 Método Simplex

O método *Simplex* é uma forma de solução para problemas de otimização linear definidos da seguinte forma:

$$
\begin{array}{lcll}
max\ z & = & \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n & \\
s.a. & & a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & \leq\ b_1 \\
 & & \vdots & \vdots \\
 & & a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & \leq\ b_m
\end{array}, \tag{5}
$$

em que $x_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$ com α_i, $i = 1, \ldots, n$, $a_{i,j}$, $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$, sendo constantes (COLIN, 2018).

O método *Simplex* aplicado à forma padrão (5) consiste em escrever um quadro onde operações são realizadas, com o intuito de encontrar valores de x_j's que maximizam o valor de z (primeira linha de (5)), satisfazendo as restrições representadas nas demais linhas de (5). As operações do algoritmo do método *Simplex* encontram-se na referência Colin (2018), cujos passos foram estudados e implementados via Octave durante a iniciação científica.

Problemas que abrangem restrições do tipo ($\leq$), cujas variáveis de folga são positivas, podem ser resolvidos via método *Simplex*. No entanto, alguns problemas podem ter restrições do tipo (=), sem variáveis de folga, ou do tipo ($\geq$), que demandam variáveis em excesso.

3.2 Método do Grande M

O método do Grande M possui como característica diferencial e expansiva em relação ao *Simplex*, os sinais de maior ou igual ($\geq$) e a igualdade (=), permitindo a solução de problemas mais complexos presentes no dia-a-dia dos analistas. Assim, as motivações principais desse trabalho foram aplicar a eficiência do método do Grande M em um exemplo de análise de decisões econômicas, por meio do fluxo de caixa de uma determinada empresa, além de desenvolver um código próprio para o método.

A solução via método do Grande M é obtida a partir do acréscimo de variáveis artificiais, necessárias para restrições que sejam livres de variáveis de folga (=) ou cujo coeficiente das variáveis seja negativo ($\geq$) (KOLMAN; BECK, 1995). Esse método é indicado uma vez que permite a introdução não apenas de variáveis artificiais nas restrições, como também na função objetivo em formato do coeficiente $-M$, evidenciando a importância de se trabalhar com liguagem simbólica no ambiente do *Octave* (GNU OCTAVE, 2021).

Para melhor compreensão, a variável de folga no método *Simplex* é geralmente representada por f_n, onde $n = 1, 2, 3, \ldots, k$, com a função de se atribuir um valor sempre positivo a essa incógnita, que permita escrever a chamada forma padrão, isto é, possibilitando a transformação de uma restrição de inequação em uma igualdade. Em exercícios do método do Grande M, onde a restrição é representada por uma igualdade, a variável de folga não se faz necessária pois a equação já está em sua forma padrão. Em contrapartida, restrições com sinal de maior ou igual exigem um valor maior do lado esquerdo e, como consequência, será obrigatório retirar parte do resultado para se igualar ao lado direito do sinal, acrescentando portanto uma variável negativa, o que quebra a característica de se ter valor positivo (COLIN, 2018).

Em situações como as descritas anteriormente, a variável de folga não poderia ser utilizada e foi necessária a criação de uma outra variável para garantir que a forma padrão seja respeitada; essa nova incógnita se chama variável artificial. Seu uso segue a exigência do sinal, ou seja, para restrições de igualdade, esta será adicionada em sua representação original, x^a_{n+1}; em casos de sinal $\geqslant$, é necessário acrescentar a variável de folga negativa, $-x_{n+1}$, mas por não possuir coeficiente positivo, introduz-se ainda uma variável artificial, dessa vez com índice diferente do anterior, x^a_{n+2} (COLIN, 2018).

Como o nome sugere, a variável artificial não existe e por essa razão, embora auxilie na solução do problema, adaptações são necessárias para excluí-la no final, garantindo que seu valor seja 0. A seguir, tem-se um exemplo padrão do método aqui estudado:

$$max\ z = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n - M \sum_{k=p+1}^{n} x^a_k, \tag{6}$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n &\geqslant b_1 && (7)\\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n &= b_2 && (8)\\ \vdots \qquad\qquad & \vdots\ \ \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n &\leqslant b_m && (9) \end{aligned}$$

em que $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$, ..., $X_n \geq 0$, α_i, com $i = 1, \ldots, n$, a_{ij}, $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, m$, sendo constantes segundo Colin (2018).

Conforme apresentado, os diferentes sinais exigem modificações específicas e com elas, as restrições comunicam diferentes situações. Para comparação, considere uma empresa que produz cadernos - X_1, canetas - X_2 e lápis - X_3, supondo que a capacidade máxima de produção seja de 15.000 itens. Com essas informações, uma das restrições via método *Simplex* poderia ser:

$$a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3 \leqslant 15.000.$$

Note que o método *Simplex* trata de capacidades máximas, ou seja, quantidade total de horas trabalhadas no dia. Com o uso do método do Grande M, é possível considerar o efeito das horas extras e para exemplificar, tome o exemplo anterior, cujas variáveis são cadernos, canetas e lápis. A primeira equação simula a compra de um novo equipamento, que expandiria em 3.700 a capacidade de produção máxima. Logo, o total que poderia ser produzido é de 18.700 itens, isto é

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 \leqslant 18.700 \ .$$

Em seguida, a produção atual também é levada em conta visando os benefícios do aumento e gerando a equação:

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 \geqslant 15.000 \ .$$

Por fim, observa-se a diferença que o equipamento traria, ou seja, os 3.700 novos produtos:

$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = 3.700 \ .$$

As três equações apresentadas resumem as restrições necessárias para o estudo do novo equipamento. De modo análogo, o conjunto de restrições selecionados para o estudo do fluxo de caixa, comparado ao trabalho de Mendes (2014), terá como resultado o efeito das horas extras.

Explicitados os efeitos e interpretações dos sinais, conclui-se que o método *Simplex* é mais simplificado, sendo usado em situações controladas (no sentido de ser mais restritivo no sinal) e não é aplicável em todas as situações cotidianas sem adaptação. Já o método do Grande M possui abordagem mais amplificada, devido à diversidade de sinais e, consequentemente, de restrições.

3.3 Octave

O Octave é um software gratuito de matemática, com linguagem numérica similar ao Matlab, que possibilita o desenvolvimento de códigos próprios para diferentes problemas (QUARTERONI; SALERI, 2007). Devido a sua natureza numérica, é necessário instalar pacotes para que haja o entendimento de códigos simbólicos (não-numéricos), além de adaptar a escrita (GNU OCTAVE, 2021).

Para a implementação do método do Grande M, os procedimentos citados foram realizados uma vez que, ao acrescentar a variável M, é importante mantê-la sem valores aplicados, mesmo durante as operações com números.

Este software foi escolhido por ser gratuito, de fácil acesso e que pode ser encontrado em versão online. Ademais, permite o uso de uma linguagem simples e intuitiva, favorecendo a escrita de códigos para problemas de diferentes áreas, inclusive empresarial e do meio atuarial.

4 Dados utilizados

Nesta pesquisa, foram adotados os dados de uma empresa descrita por Mendes (2014), onde se tem a aplicação da programação linear no processo de tomada de decisão em relação aos investimentos dos recursos.

4.1 Exemplo de empresa

No trabalho de Mendes (2014), as grandes candidaturas (GC) referem-se a uma determinada empresa que aplica investimentos com valores superiores a 150.000,00 euros nos fundos da União

Europeia e as pequenas candidaturas (PC) são investimentos de valor menor ou igual a 150.000,00 euros, também ligados aos fundos da União Europeia.

A empresa em estudo possui dois gerentes e um consultor financeiro externo, respectivamente representados por RHg_1, RHg_2 e RHc_3. Dessa forma, o primeiro modelo é descrito por uma função objetivo com três restrições, com o intuito de maximizar a função objetivo de cinco variáveis. Seguindo o que foi posto na Seção 2.1, temos

$$\begin{array}{lllll} max\ z & = & \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_5 x_5 + \alpha_6 & & \\ s.a. & & RHg_1 = a_{11}x_1 + \ldots + a_{15}x_5 & \leq & CH_1 \\ & & RHg_2 = a_{21}x_1 + \ldots + a_{25}x_5 & \leq & CH_2 \\ & & RHc_3 = a_{31}x_1 + \ldots + a_{35}x_5 & \leq & CH_3 \end{array}, \tag{10}$$

em que $x_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, com α_i, $i = 1, \ldots, n$ e $a_{i,j}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, constantes.

No modelo de programação linear (10) são adicionadas as informações intrínsecas ao perfil da empresa descrita por Mendes (2014), onde para as variáveis são utilizados os dados do demonstrativo anual de resultados financeiros, expostos na Tabela 1, e para as restrições, são usadas as informações dos três funcionários, ver Tabela 2.

Tabela 1: Demonstrativo anual da empresa considerada.

Rubricas	GC	PC	BF	Int	MCG	Valores
Preços de Venda	20.000,00	2.500,00	7.000,00	15.000,00	4.000,00	
Quantidades	3,00	10,00	3,00	3,00	3,00	
Volume de Negócios	60.000,00	25.000,00	21.000,00	45.000,00	12.000,00	163.000,00
Custos Variáveis	12.900,00	8.000,00	5.100,00	9.900,00	3.300,00	39.200,00
-Deslocações (250€/projeto)	750,00	2.500,00	750,00	750,00	750,00	5.500,00
-Material de escritório (50€/projeto)	150,00	500,00	150,00	150,00	150,00	1.100,00
-Publicidade (5% VN)	3.000,00	1.250,00	1.050,00	2.250,00	600,00	8.150,00
-Parceiros (15% VN)	9.000,00	3.750,00	3.150,00	6.750,00	1.800,00	24.450,00
Margem Bruta	47.100,00	17.000,00	15.900,00	35.100,00	8.700,00	123.800,00
Margem Bruta Unitária	15.700,00	1.700,00	5.300,00	11.700,00	2.900,00	37.300,00
Custos Fixos Totais						128.458,00
Gastos com Pessoal						85.225,00
Amortizações e depreciações						20.083,00
FSE						22.750,00
Quotas						400,00
Resultado Operacional						-4.658,00
IRC						0,00
Resul. Op. Líquido de Impostos						-4.658,00
Meios Libertos do Projeto						15.425,00

fonte: Mendes (2014).

Na Tabela 1 constam os dados de uma empresa com sede na União Europeia, referentes ao ano de 2015. Esses dados foram analizados por Mendes (2014) chegando-se na seguinte função objetivo:

$$max\ CF = 2.034,79\ X_1 + 194,66\ X_2 + 924,98\ X_3 + 2.223,32\ X_4 + 438,09\ X_5 - 143.224,00\ . \tag{11}$$

Outro aspecto importante é capacidade de produção dos recursos humanos em cada categoria, conforme a Tabela 2.

A Tabela 2 mostra a atuação dos funcionários em cada categoria de investimento, de acordo com o que foi apresentado na Seção 2.1, que são as cinco primeiras colunas chamadas de restrições

Tabela 2: Dados dos funcionários

Recursos humanos	Restrições por serviços					
	GC	PC	BF	Int	MCG	CH
RHg1	88	0	88	88	70	1.820
RHg2	88	0	88	88	70	1.820
RHc3	0	70	0	0	140	1.820

fonte: Mendes (2014)

por serviços e a última coluna, o limite máximo de horas trabalhadas no ano, sem considerar possibilidade de horas extras.

Por exemplo, a Tabela 2 indica que o consultor financeiro $RHc3$ atua somente nas pequenas candidaturas (PC), pois apenas o coeficiente relacionado a PC é diferente de zero e os demais coeficientes são zeros. Além disso, o limite deste funcionário são 1.820 horas, composto por 52 semanas no ano, adotando 8 horas por dia (2.080 horas, retirando-se as 260 horas de férias). Portanto, temos o seguinte conjunto de restrições:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 88X_1 & + & 0X_2 & + & 88X_3 & + & 88X_4 & + & 70X_5 & \leq & 1.820 \\ 88X_1 & + & 0X_2 & + & 88X_3 & + & 88X_4 & + & 70X_5 & \leq & 1.820 \\ 0X_1 & + & 70X_2 & + & 0X_3 & + & 0X_4 & + & 140X_5 & \leq & 1.820 \end{array}, \tag{12}$$

em que $X_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, 5$.

O modelo de programação linear formado pelas Equações (11) e (12) foi resolvido pelo método *Simplex* e o resultado encontra-se na Seção 5. A solução foi obtida via código próprio implementado em *Octave* e também foi replicado em planilhas eletrônicas.

4.2 Modelo modificado

Para se alcançar o objetivo de estudar o impacto das horas extras dos funcionários no resultado ótimo do fluxo de caixa de uma empresa, considerou-se a alteração no tipo de restrição. O funcionário que for escolhido para efetuar horas extras, trabalhará além das 1.820 horas, isto é, terá a restrição alterada de ($\leq$) para ($\geq$).

Por exemplo, suponha que o funcionário $RHg2$ vai fazer horas extras, então as restrições são:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 88X_1 & + & 0X_2 & + & 88X_3 & + & 88X_4 & + & 70X_5 & \leq & 1.820 \\ 88X_1 & + & 0X_2 & + & 88X_3 & + & 88X_4 & + & 70X_5 & \geq & 1.820 \\ 0X_1 & + & 70X_2 & + & 0X_3 & + & 0X_4 & + & 140X_5 & \leq & 1.820 \end{array}, \tag{13}$$

Ao efetuar a otimização da função objetivo com essas novas restrições, podemos analizar se o resultado ótimo foi alterado, em comparação com o resultado do problema sem horas extras. Nesta situação, o código do método do Grande M foi executado, obtendo a solução descrita na Seção 5.

5 Aplicações e resultados

Aplicando o método *Simplex* na função objetivo (11) com as restrições (12), a solução ótima encontrada está contida na Tabela 3.

Tal resultado são idênticos aos valores apresentados por Mendes (2014) e, neste estudo, reproduzimos a mesma solução tanto pelo código próprio, quanto por *Solver's* de planilhas eletrônicas.

Tabela 3: Valores ótimos - Modelo inicial.

X_1(GC)	X_2(PC)	X_3(BF)	X_4(Int)	X_5(MCG)	CF
20,67	20,00	0	0	0	-97.271,69 €

Ao observar a última coluna da Tabela 3, nota-se que a solução ótima resulta em um fluxo de caixa negativo.

Apesar disso, este é o melhor resultado possível para o fluxo de caixa da empresa em questão e, para alcançá-lo, os gerentes 1 e 2 precisam que a margem bruta associada às grandes candidaturas seja $X_1 = 20,67$, enquanto que o consultor financeiro precisa de $X_2 = 20,00$. Quaisquer outros valores para X_1 e X_2, implicariam em um fluxo de caixa pior, isto é, um valor menor que $-97.271,69$ euros.

No modelo que inclui o gerente 2 (RHg2) atuando com horas extras, o método do Grande M foi aplicado na função objetivo (11) com as restrições (13). Dessa forma, os resultados obtidos estão descritos na Tabela 4.

Tabela 4: Valores ótimos - Modelo com horas extras.

X_1(GC)	X_2(PC)	X_3(BF)	X_4(Int)	X_5(MCG)	CF
25	26	0,9	0,9	0	-84.451,62 €

Ao analisar a Tabela 4, temos que o fluxo de caixa da empresa passou a ser $-84.451,62$ euros, uma melhoria de $12.820,07$ euros quando comparado com a Tabela 3, o que corresponde uma melhoria de $13,18\%$.

Os resultados da Tabela 4 também expõem a quantidade de horas trabalhadas do gerente 2, que no caso foi 2.358 horas, o que implica numa quantidade de horas extras de 538, no ano observado. Note que foi preciso aumentar em $29,56\%$ a quantidade de horas trabalhadas do gerente 2 para se ter um resultado de $13,18\%$ melhor, no fluxo de caixa.

O mesmo procedimento foi feito, considerando que o gerente 1 fizesse horas extras, ao invés do gerente 2, e os resultados foram idênticos.

6 Conclusões

Atualmente, com os nichos empresariais/industriais muitos competitidos, o ambiente de negócios exige que os processos envolvidos sejam otimizados visando a maximização de lucros e redução de custos sem afetar a qualidade do produto ofertado. Uma forma de analisar a saúde financeira de uma empresa é investigar o montante do capital recolhido e gasto em uma determinada produção ou toda empresa em si, isto é, o fluxo de caixa.

O objetivo deste trabalho foi estudar que tipo de impacto pode ocorrer no fluxo de caixa de uma empresa, cujos funcionários fazem horas extras. Para isto, um primeiro modelo sem a variável horas extras, proposto por Mendes (2014), foi modelado via programação linear utilizando o método *Simplex*. Nesta situação, as restrições são do tipo ($\leq$), ou seja, existe uma carga horária de trabalho máxima à ser cumprida e que não é ultrapasada.

Em seguida, foi adicionada a este modelo inicial a variável horas extras, o que implicou em mudanças nas restrições. Neste caso, as horas trabalhadas podem exceder o limite estipulado no primeiro modelo, demandando variáveis em excesso representadas por restrições do tipo ($\geq$). Para resolver este problema fez-se necessária a implementação computacional do método do Grande M.

Desse modo, os modelos de programação linear foram solucionados e os resultados indicaram que, um acréscimo de $29,56\%$ nas horas trabalhadas de um dos gerentes da empresa gera um aumento de $13,18\%$ no fluxo de caixa ótimo. Esse tipo de solução ótima pode auxiliar as empresas nas decisões sobre a alocação de recursos.

Em trabalhos futuros pretende-se desenvolver modelos que incorporem as horas extras de vários funcionários e implementar um programa que seja capaz de avaliar o fluxo de caixa por vários anos consecutivos.

7 Bibliografia

ARENALES, M. *et al*. **Pesquisa operacional.** Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

COLIN, E. C. **Pesquisa operacional.** 2. ed. São Paulo: Atlas, 2018.

GNU OCTAVE. Statements. [*S. l.*]: John W. Eaton, 2021. Disponível em: https://octave.org/doc/v5
.2.0/Statements.html#Statements. Acesso em: 21 mar. 2022.

KOLMAN, B.; BECK, R. E. **Elementary linear programming with applications.** 2nd ed. San Diego: Academic Press, 1995.

MENDES, M. P. S. **Aplicação da programação linear na decisão económica de investimento.** 2014. 75 f. Dissertação (Mestrado em Contabilidade e Finanças) - Instituto Politécnico de Setúbal, Setúbal, 2014.

QUARTERONI, A.; SALERI, F. **Cálculo científico com MATLAB e Octave.** Milano: Springer-Verlag, 2007.

SCHNEIDER, R. M. **Método Simplex para programação linear**. 2013. 59 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

SILVA, S. D. P. da. *et al*. Análise de investimento financeiro através da elaboração do fluxo de caixa: estudo de caso em uma serraria, no município de Nova Esperança do Piriá - PA. **Revista Observatorio de la Economía Latinoamericana**, Piriá, v. 17, n. 10, p. 1-18, out. 2019.