

**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
v. 22, n. 1, jul. 2022
Iniciação Científica

Henrique Marins de Carvalho

Câmpus de São Paulo

IFSP - Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia de São Paulo

hmarins@ifsp.edu.br

Notas históricas e demonstrações do teorema de De Gua sobre as áreas das faces de um tetraedro: “Pitágoras” em três (ou n) dimensões

Historical notes and proofs related to De Gua's theorem about tetrahedron faces' areas: tri (or n)-dimensional “Pythagorean” theorem

Resumo

Jean Paul De Gua de Malves foi um matemático francês, membro da Academia Real Francesa de Ciências no século XVIII. O teorema que leva seu nome estabelece uma relação entre a medida das áreas de um tetraedro com um ângulo sólido reto, dizendo que o quadrado da área hipotenusal é igual à soma dos quadrados das áreas das outras faces, o que traz uma correspondência com o famoso teorema de Pitágoras. A partir da prova original, este artigo deixa claro argumentos geométricos implícitos, especialmente o método de Herão para cálculo de áreas triangulares e propõe outras quatro versões de prova, duas delas usando apenas raciocínios da Geometria plana e espacial e as outras duas, aproveitando operações e propriedades vetoriais. Adicionalmente, há alguns comentários sobre uma generalização do teorema para poliedros convexos compactos n -dimensionais.

Palavras-chave: Geometria. Geometria espacial. Teorema de Herão. Vetores.

Abstract

Jean Paul De Gua de Malves was a French mathematician, member of the Royal French Academy of Sciences in 18th century. The theorem named after him establishes a relationship between the measure of the areas of a tetrahedron with one right solid angle, saying that the squared hypotenusal area equals to the sum of the other faces squared areas, which brings a correspondence with the famous Pythagorean theorem. From the original proof this paper makes clear implicit geometric arguments, namely Heron's method for triangular area calculation and propose another four proof versions, two of them using only plane and spacial geometric reasoning and the other two taking advantage of vector operations and properties. As a bonus, there is some comments about a generalization of the theorem for n -dimensional compact convex polyhedron.

Keywords: Geometry. Spacial Geometry. Heron's theorem. Vectors.



1 Introdução

1.1 O autor

Jean-Paul de Gua de Malves (1710-1786) foi um matemático, membro da Academia real de Ciências da França, além de ter se dedicado a outras áreas de estudo como a mineralogia e a conchologia. Ocupou por seis anos a posição de professor de Filosofia do Collège de France, ensinando, além de aritmética e geometria, temas relacionadas aos trabalhos de Newton e Locke. (TATON, 1981, p. 587)

Sua posição acadêmica e seus conhecimentos o levaram a ser convidado para coordenar um projeto para organizar uma enciclopédia que viria a ser a famosa *Encyclopédie* ou *Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*. Sua participação durou, no entanto, cerca de um ano apenas, quando foi substituído por Denis Diderot e Jean Le Rond d'Alembert.

Além da obra da qual foi extraído o teorema estudado neste trabalho (ver próxima subseção), De Gua também publicou ao menos dois outros importantes resultados de seus estudos. O primeiro é denominado *Usages de l'analyse de Descartes pour découvrir, sans le secours du calcul différentiel, les propriétés, des affections principales des lignes géométriques de tous les ordres* (Uso da análise de Descartes para descobrir, sem a ajuda de cálculos diferenciais, as propriedades e principais condições das linhas geométricas de todas as ordens), publicado em 1740 e que faz uso, como o título sugere, da Geometria Analítica cartesiana relacionada às curvas geométricas de ordens superiores.

O segundo, publicado em 1783, tem como título *Diverses mesures en partie nouvelles, des aires sphériques et des angles solides, triangulaires et polygones, dont on est supposé connoître des éléments en nombre suffisant, avec des remarques qu'on croit pouvoir contribuer à simplifier les intégrations de plusieurs Équations différentielles à inconnues actuellement séparées* (Várias medidas, em parte novas, de áreas esféricas e ângulos sólidos, triangulares e polígonos, dos quais se presume conhecer elementos em número suficiente, com observações que se acredita serem capazes de ajudar a simplificar as integrações de várias equações diferenciais atualmente com incógnitas separáveis). Seus trabalhos contribuíram para o desenvolvimento de um campo de estudo que marcou a matemática do século XVIII, as soluções de equações diferenciais e sua relação com as curvas algébricas.

1.2 O texto

O teorema cujas demonstrações são apresentadas neste artigo encontra-se em uma seção do texto sob o título *Propositions nouvelles, et non moins utiles que curieuses, sur le Tétraèdre; ou Essai de Tétraédométrie*. que, em tradução livre pode ser lido como “Novas proposições, não menos úteis do que curiosas, sobre o Tetraedro; ou Ensaio de Tetraedometria”, publicado no periódico *Histoire de l'Académie royale des Sciences avec les Mémoires de Mathématique & de Physique* editado e impresso pela Academia de Ciências da França desde 1702 até 1797¹.

Na introdução deste trabalho, De Gua usa como argumento a relevância de expandir para o estudo da geometria espacial os conhecimentos já disponíveis na Trigonometria plana, ressaltando sua utilidade para fins práticos como a Arquitetura e a Engenharia civil e militar. O texto é constituído de cinco proposições, tratando do cálculo e propriedades de ângulos, áreas e volume de tetraedros.

¹O texto original está no volume de 1783, disponível em <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3582m/f496.item#> - páginas 363-402 (o teorema e demonstração estão mais especificamente nas páginas 374-5)

2 O teorema:

O segundo teorema que compõe o trabalho mencionado acima, é enunciado por De Gua da seguinte maneira:

Dans tout tétraèdre à un angle solide droit, la somme des carrés des trois nombres propres à exprimer les aires des trois faces triangulaires qui comprennent l'angle solide droit, et qu'on peut nommer latérales, est toujours égale au carré du nombre par lequel doit être exprimée l'aire de la face opposée à l'angle solide droit, et qu'on peut nommer hypoténusale (DE GUA, 1783, p. 375).

Traduzido, o texto pode ser lido assim: “Em qualquer tetraedro com um ângulo sólido reto, a soma dos quadrados dos números que expressam propriamente as áreas das três faces triangulares que compreendem o ângulo reto, e que podem ser chamadas de laterais, é sempre igual ao quadrado do número pelo qual deve ser expressa a área da face oposta ao ângulo reto sólido, que pode ser chamada de hipotenusal”.

O autor comenta a respeito da nítida correspondência do enunciado com a Proposição 47 do Livro I dos Elementos de Euclides, o famoso “Teorema de Pitágoras”, ressaltando que a clássica afirmação do texto grego pode ser considerado como caso particular em que os objetos matemáticos envolvidos (laterais e hipotenusa) podem ser representados no mesmo plano.

2.1 A demonstração apresentada por Jean-Paul de Gua de Malves:

Nesta subseção é apresentada a demonstração tal como feita por De Gua, acrescida de comentários que visam a esclarecer e justificar algumas das operações realizadas.

Considere o tetraedro $OABC$ da figura e chame de a , b e c , respectivamente as medidas de OA , OB e OC .

As hipotenusas e as áreas das três faces que contém o vértice O (as faces laterais) são iguais, respectivamente, a:

- no triângulo OAB , a hipotenusa mede $\sqrt{a^2 + b^2}$ e a área vale $\frac{1}{2}ab$;
- no triângulo OBC , a hipotenusa mede $\sqrt{b^2 + c^2}$ e a área vale $\frac{1}{2}bc$;
- no triângulo OAC , a hipotenusa mede $\sqrt{a^2 + c^2}$ e a área vale $\frac{1}{2}ac$.

A soma dos quadrados das medidas das áreas de cada triângulo é $\frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{1}{4}b^2c^2 + \frac{1}{4}a^2c^2$ que, pelo teorema, deve ser igual ao quadrado da medida da área do triângulo ABC (chamemos de S^2).

Deseja-se provar, portanto, que

$$S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{1}{4}b^2c^2 + \frac{1}{4}a^2c^2.$$

Considere, agora, as seguintes igualdades:

$$\left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2}\right) \left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2} - \sqrt{b^2 + c^2}\right) = 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + c^2} + 2a^2 \quad (1)$$

e

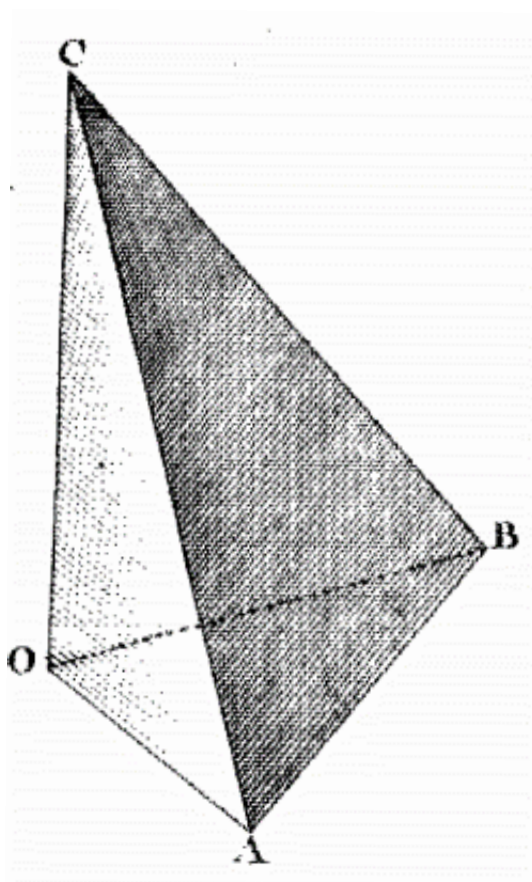


Figura 1: Tetraedro $ABCO$ (DE GUA, 1783, p. 403).

$$\left(\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2}\right) \left(-\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + c^2} + \sqrt{b^2 + c^2}\right) = 2\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + c^2} - 2a^2 \quad (2)$$

O produto de (1) por (2) resulta em:

$$4 \left(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2\right) \quad (3)$$

Dividindo esta expressão por 16, temos, enfim:

$$\frac{1}{4}a^2 b^2 + \frac{1}{4}b^2 c^2 + \frac{1}{4}a^2 c^2$$

Neste ponto da demonstração, De Gua faz menção ao famoso teorema “de Pitágoras”, cita que já havia apresentado resultados semelhantes à Academia em trabalhos anteriores e inicia alguns parágrafos em que sugere que a semelhança da proposição encontrada na obra de Euclides, seus estudos também possuem potencial para produzir conhecimentos e ferramentas úteis para a matemática, especialmente na Geometria Analítica e na resolução de equações diferenciais. Com relação à conclusão da demonstração, no entanto, esta fica carente de detalhes no texto de 1783.

Podemos, no entanto, verificar que a proposta de De Gua é justificada pelo chamado *método de Herão*² para o cálculo da área de triângulos, assim expresso:

²Herão (ou Heron) de Alexandria (10-80 A.D.), em sua obra *Metrica* apresenta, na Proposição 8 do Livro I, aquela

$$S = \sqrt{p(p-z)(p-y)(p-x)},$$

sendo $p = \frac{x+y+z}{2}$ o semiperímetro do triângulo cujos lados medem x , y e z .

Se identificarmos $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, $y = \sqrt{a^2 + c^2}$ e $z = \sqrt{b^2 + c^2}$, podemos reescrever o produto de (1) por (2) como:

$$(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z) \quad (4)$$

que é, com exceção do fator $\frac{1}{16}$, o radicando da expressão para o cálculo da área mencionada acima.

Observe:

$$S = \sqrt{\left(\frac{x+y+z}{2}\right)\left(\frac{x+y+z}{2} - z\right)\left(\frac{x+y+z}{2} - y\right)\left(\frac{x+y+z}{2} - x\right)}$$

ou, ainda:

$$S = \sqrt{\left(\frac{x+y+z}{2}\right)\left(\frac{x+y-z}{2}\right)\left(\frac{x-y+z}{2}\right)\left(\frac{-x+y+z}{2}\right)}$$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$$S^2 = \frac{1}{16}(x+y+z)(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)$$

E, substituindo (4) por (3):

$$S^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$$

2.2 Outra demonstração com recursos de geometria plana e espacial

Considere na figura a seguir, $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$ e $\overline{OC} = c$ e, além disso, que OD é a altura do triângulo ABO relativa ao lado AB .

A área do triângulo ABO pode ser escrita de duas maneiras:

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{OD}}{2} = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{2}.$$

Então:

$$\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \overline{OD} = ab$$

$$\overline{OD} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

No triângulo COD , pelo teorema “de Pitágoras”, temos:

$$\overline{CD}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OC}^2$$

que costuma ser chamada justamente de “fórmula de Herão” para o cálculo da área de um triângulo, sendo conhecidas apenas as medidas de seus lados.

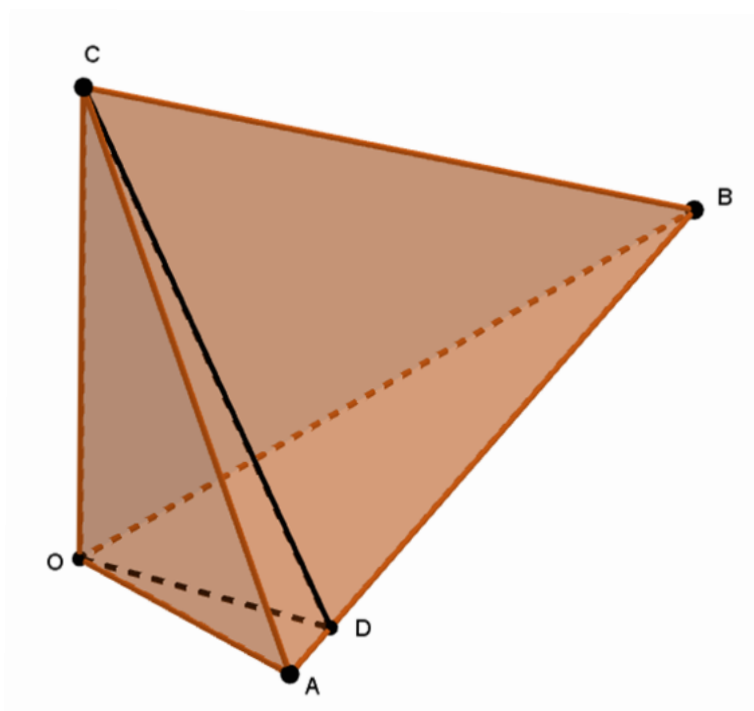


Figura 2: Tetraedro $ABCO$ com alturas (das faces) CD e OD .

$$\overline{CD}^2 = \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + c^2$$

$$\overline{CD}^2 = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2 + b^2}$$

Observe que o plano COD é ortogonal ao plano OAB e, sendo a reta AB ortogonal ao plano COD , implica que as retas AB e CD sejam perpendiculares; logo CD é a altura do triângulo ABC , relativa à base AB .

Assim, temos que o quadrado da área de ABC (chamemos de S^2) vale:

$$S^2 = \left(\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2} \right)^2$$

$$S^2 = \frac{1}{4} \overline{AB}^2 \cdot \overline{CD}^2$$

Substituindo os valores obtidos para $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$:

$$S^2 = \frac{1}{4} \left(\sqrt{a^2 + b^2} \right)^2 \cdot \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2 + b^2}$$

$$S^2 = \frac{1}{4} (a^2 + b^2) \cdot \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2 + b^2} = \frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{1}{4}a^2c^2 + \frac{1}{4}b^2c^2$$

2.3 Mudando o plano de vista

Se tomarmos o triângulo ABC , e for traçada a altura CD , de medida h , como na figura 3, pelo teorema “de Pitágoras” nos triângulos ADC e BDC , temos as seguintes relações:

$$h^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2$$

e

$$h^2 = \overline{BC}^2 - \overline{DB}^2 = \overline{BC}^2 - (\overline{AB} - \overline{AD})^2$$

das quais se obtém

$$\overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{BC}^2 - (\overline{AB} - \overline{AD})^2$$

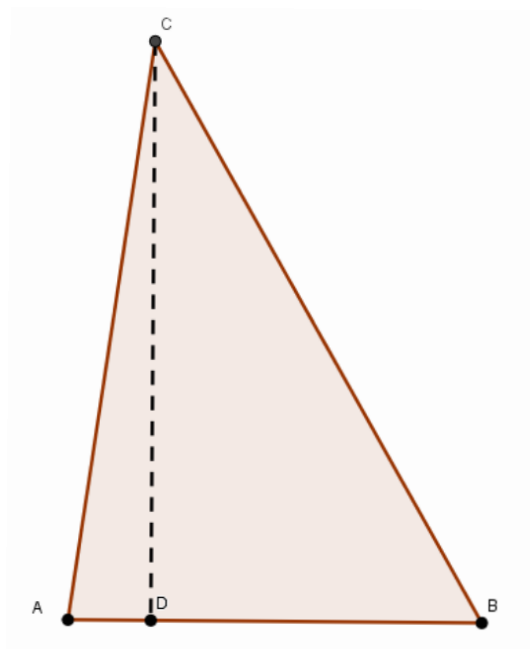


Figura 3: Triângulo ABC .

Conhecendo que os lados do triângulo medem, $\overline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\overline{BC} = \sqrt{b^2 + c^2}$ e $\overline{AC} = \sqrt{a^2 + c^2}$ e, chamando a medida do segmento AD de x , temos:

$$a^2 + c^2 - x^2 = b^2 + c^2 - (\sqrt{a^2 + b^2} - x)^2$$

$$a^2 + c^2 - x^2 = b^2 + c^2 - a^2 - b^2 + 2x\sqrt{a^2 + b^2} - x^2$$

Ou seja, $x = \overline{AD} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Assim, a altura h (medida do segmento CD) é igual a:

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2$$

$$h^2 = (a^2 + c^2) - \frac{a^4}{a^2 + b^2} = \frac{a^4 + a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 - a^4}{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2 + b^2}$$

$$h = \sqrt{\frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2 + b^2}}$$

Finalmente, a área S do triângulo ABC será dada por:

$$S = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2}$$

Substituindo os valores obtidos para $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e elevando ao quadrado os dois membros, temos a mesma conclusão que a da seção anterior:

$$S^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2 + b^2}} \right)^2$$

$$S = \frac{1}{4}(a^2 + b^2) \cdot \left(\frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2 + b^2} \right)$$

$$S^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

2.4 Demonstração com vetores:

Considerando o ponto O como a origem de um sistema tridimensional ortogonal, temos os vetores $\overrightarrow{OA} = (a, 0, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (0, b, 0)$ e $\overrightarrow{OC} = (0, 0, c)$ e, conseqüentemente, podemos identificar que o triângulo ABC tem dois de seus lados que podem ser escritos como:

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (-a, b, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = (-a, 0, c)$$

Calculando o produto vetorial de $\overrightarrow{AB}$ por $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = (bc, ac, ab)$$

A metade da medida do módulo do produto vetorial de $\overrightarrow{AB}$ por $\overrightarrow{AC}$ é a medida da área do triângulo ABC , que chamamos, novamente, de S (BOULOS; CAMARGO, 2004). Assim, temos:

$$S = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}$$

ou seja: $S^2 = \frac{1}{4}b^2c^2 + \frac{1}{4}a^2c^2 + \frac{1}{4}a^2b^2$.

2.5 Outra demonstração com vetores:

Com as mesmas considerações anteriores, isto é, tomando o ponto O como origem do sistema, podemos identificar os vetores $\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0)$ e $\overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$ como *vetores diretores* do plano ABC , cuja equação³ é dada por:

$$bcx + acy + abz - abc = 0$$

Além disso, o produto vetorial calculado na seção anterior resulta em um vetor ortogonal a esse mesmo plano. Se definirmos um vetor, paralelo a este vetor normal, com origem no ponto O e extremidade H , um ponto pertencente ao plano ABC , seu módulo será a medida da altura do tetraedro $ABCO$.

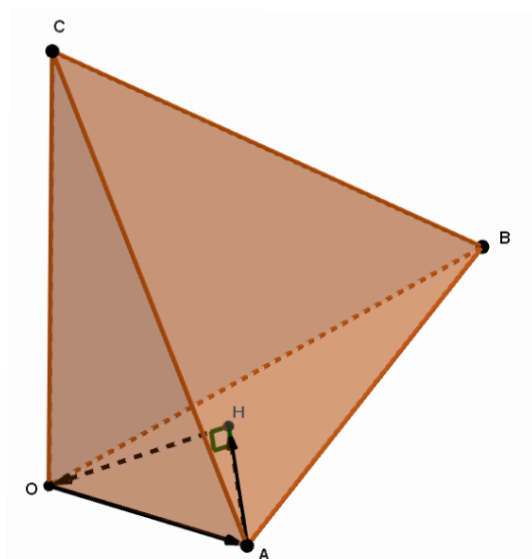


Figura 4: Plano BC e vetor ortogonal HO .

O ponto H , projeção ortogonal de O sobre o plano ABC pode ainda ser entendido como a interseção da reta que passa pela origem e possui como vetor diretor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (bc, ac, ab)$. A equação desta reta é

$$r : (x, y, z) = k(bc, ac, ab), k \in \mathbb{R}$$

Obtém-se, portanto, $H = (x_0, y_0, z_0)$ como solução do sistema:

$$\begin{cases} bcx_0 + acy_0 + abz_0 - abc = 0 \\ x_0 = kbc \\ y_0 = kac \\ z_0 = kab \end{cases}$$

$$\text{resultando em: } (x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{ab^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}, \frac{a^2bc^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}, \frac{a^2b^2c}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2} \right)$$

que são justamente as coordenadas do vetor $\overrightarrow{OH}$.

³Para confirmar, basta verificar que a igualdade se mantém ao substituir (x, y, z) pelas coordenadas dos pontos A , B e C , respectivamente $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ e $(0, 0, c)$.

O módulo deste vetor, $||\vec{OH}||$, será, portanto, a medida h da altura do tetraedro $ABCO$, relativa ao vértice O .

$$||\vec{OH}|| = \sqrt{\left(\frac{ab^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2bc^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2b^2c}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}\right)^2}$$

O volume do tetraedro $ABCO$ é dado por um terço do volume do prisma de mesma base (chamemos de S) e mesma altura h , logo igual a

$$V = \frac{1}{3}(S \cdot h)$$

ou, ainda

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot \sqrt{\left(\frac{ab^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2bc^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2b^2c}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}\right)^2} \quad (5)$$

Outra forma de escrever o volume do tetraedro, considerando como base o triângulo OAB e como altura o segmento OC , é:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{2} \cdot \overline{OC} = \frac{1}{6}abc. \quad (6)$$

Comparando (5) e (6), temos que

$$\frac{1}{3} \cdot S \cdot \sqrt{\left(\frac{ab^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2bc^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2b^2c}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}\right)^2} = \frac{1}{6}abc$$

Isto é:

$$S = \frac{abc}{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{ab^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2bc^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2b^2c}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}\right)^2}}$$

Dessa forma, o quadrado da medida da área do triângulo ABC é:

$$S^2 = \frac{a^2b^2c^2}{4 \cdot \left(\frac{ab^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2bc^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2b^2c}{a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2}\right)^2}$$

Simplificando:

$$S^2 = \frac{1}{4} \frac{a^2b^2c^2 \cdot (a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)^2}{(ab^2c^2)^2 + (a^2bc^2)^2 + (a^2b^2c)^2}$$

E, um pouco mais simples: $S^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$.

2.6 Expansão para n dimensões:

No artigo *Pythagoras' Theorem for Areas* escrito por Jean-P. Quadrat, Jean B. Lasserre e Jean-B. Hiriart-Urruty e publicado em 2001 na revista *Mathematical Monthly*, é apresentado o seguinte enunciado:

Para o poliedro complexo compacto Ω_n , definido como se segue, o quadrado da área da face hipotenusal é igual à soma dos quadrados das áreas das n faces partindo da origem (QUADRAT; LASSERRE; HIRIART-URRUTY, 2001).

$$\Omega_n := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} \leq 1, x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n \right\}$$

O poliedro Ω_n é uma generalização do tetraedro com ângulo sólido reto $ABCO$ da Figura 1, tendo $n + 1$ vértices, sendo um delas a origem O e os outros n vértices os pontos A_i definidos tais que $\overrightarrow{OA_i} = a_i \vec{e}_i$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$ (QUADRAT; LASSERRE; HIRIART-URRUTY, 2001).

Além disso, este objeto possui $n + 1$ faces (*facets*, no original), com n delas contendo o ponto O (equivalendo às faces laterais, como denominado por De Gua) e apenas uma que não o contém (a face hipotenusal). Cada uma dessas faces tem uma grandeza que pode ser medida (chamemos de “área” e simbolizemos como S).

Ainda é possível medir a grandeza n -dimensional associada ao poliedro Ω_n (chamemos de “volume”, representado por V), calculada, como uma extensão da versão tridimensional como

$$V = \frac{1}{n} \cdot S \cdot h$$

sendo S a área de uma face e h , a altura relativa a essa face e ao vértice não pertencente a ela. Se considerarmos a área da face hipotenusal, teremos como altura um segmento que é ortogonal a esta face, com extremidade no ponto O .

Note que, a partir deste argumento, a demonstração segue de forma análoga à apresentada para o tetraedro na seção anterior.

3 Considerações finais

Ainda que não tenha se tornado tão famoso quanto o Teorema de Pitágoras, o trabalho de De Gua indica uma característica percebida comumente na comunidade matemática: o desejo de generalizar proposições que já foram demonstradas em um determinado domínio para outros com menos restrições.

A ampliação conceitual e a possibilidade de estabelecer novas conexões com áreas do conhecimento (pertencentes ou não à matemática) costuma ser uma consequência desses movimentos de expansão.

Assim, a ambição de De Gua ao propor o estudo da *Tetraedometria* é um anseio de desenvolver cada vez mais ferramentas que permitam simplificar a resolução dos problemas e construir conhecimentos que sejam, como ele mesmo o diz no título de seu texto, “não menos úteis do que curiosos”.

Finalizando, um agradecimento ao professor Rodrigo Simões Singh por ter apresentado o teorema em um momento de estudo de Geometria no curso de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), ao professor João Cortese pelo auxílio na leitura dos textos originais e ao professor Emiliano Augusto Chagas pela revisão geral.

4 Referências Bibliográficas

BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. **Geometria analítica**: um tratamento vetorial. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2004.

DE GUA, Jean-Paul. Propositions neuves, et non moins utiles que curieuses, sur le Tétraèdre; ou Essai de Tétraédrométrie *In*: **HISTOIRE de l'Académie Royale des Sciences ... avec les mémoires de mathématique & de physique**. Paris: Académie Royale des Sciences, 1783. p. 363-402. Disponível em: <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3582m/f496.item>. Acesso em: 10 jan. 2022.

D'ALEXANDRIE, Héron. **Metrica**. Pisa: Fabrizio Serra Editore, 2014.

QUADRAT, Jean-P.; LASSERRE, Jean B.; HIRIART-URRUTY, Jean-B. Pythagoras' Theorem for Areas. **The American Mathematical Monthly**, v. 108, n. 6, p. 549-551, 2001. <https://doi.org/10.2307/2695710>.

TATON, René. Jean-Paul de Gua de Malves. *In*: GILLISPIE, Charles Coulston (ed.) **Dictionary of scientific biography**. New York: Charles Scribner's Sons, 1981. v. 5.