

**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
v. 22, n.1, jul. 2022
Iniciação Científica

Luciana de Fátima Martins

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Univesidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
luciana.martins@unesp.br

Samuel Paulino dos Santos

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Univesidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
samuel.p.santos@hotmail.com

Revisitando a superfície focal

The focal surface, revisited

Resumo

Este artigo tem como objetivo reunir os principais resultados existentes na literatura sobre a geometria do conjunto focal, fazendo uma revisão de notações e atualizando alguns resultados com a moderna linguagem de frentes de onda. Consideramos o clássico estudo do conjunto focal de superfícies regulares, presente em diferentes artigos e livros, com variadas notações. Assim, esse trabalho também visa reunir os resultados em notações mais modernas e de fácil entendimento. Também consideramos estudos recentes sobre o conjunto focal de superfícies singulares.

Este trabalho é financiado pela FAPESP, processo 2018/17712-7.

Palavras-chave: Teoria de Singularidades. Conjunto Focal. Frente de Onda. Cuspidal Edge.

Abstract

This work aims to rejoin the mainly results in literature about the geometry of the focal set, reviewing the notation and remaking some results with the modern language for wave fronts. We consider the classical study for focal set of regular surfaces, which are in different papers and books, with some different notations. Therefore, it also aims to make the understanding of the study easier. We also consider a very recent study on the geometry of focal set of singular surfaces.

Keywords: Singularity Theory. Focal Set. Wave Front. Cuspidal Edge.



1 Introdução

Os objetos de estudo da Geometria Diferencial clássica no espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 são curvas e superfícies regulares. O estudo de superfícies singulares do ponto de vista da Geometria Diferencial está se desenvolvendo a cada dia e a técnica de associar uma superfície singular a uma superfície regular M e descobrir alguns aspectos da geometria de M a partir daqueles da superfície singular está na essência dos estudos sobre geometria de superfícies singulares.

O conceito de contato entre curvas e superfícies em \mathbb{R}^3 é uma importante ferramenta para o estudo da geometria de superfícies. Por exemplo, a geometria associada ao contato entre uma superfície e retas e planos dá informações sobre a aplicação de Gauss e a dual da superfície. Por outro lado, o contato entre a superfície com esferas (o qual é descrito pelas \mathcal{K} -singularidades da função distância ao quadrado $d_{\mathbf{u}}$, com \mathbf{u} sendo o centro da esfera) dá informações, por exemplo, sobre as curvaturas e direções principais, sobre as linhas de curvatura e pontos umbílicos sobre a superfície. Além disso, há outras curvas de interesse sobre a superfície que surgem no estudo, como as ridges e as curvas sub-parabólicas. Ridges são de grande interesse geométrico e no campo de visão computacional (ver, por exemplo, [1, 2, 3]).

O conjunto focal \mathcal{F} de M de uma superfície regular em \mathbb{R}^3 é o lugar geométrico dos centros das esferas tangentes à M com raios igual ao inverso das curvaturas principais (chamadas esferas de curvatura). Em Física, se a luz se propaga uniformemente em M , então \mathcal{F} é o lugar geométrico dos pontos onde a luz é mais concentrada. Um estudo sobre a geometria do conjunto focal de superfícies regulares pode ser encontrado nos trabalhos de Porteous ([4, 5]) e Morris ([6]). O livro [5] traz um tratamento extensivo sobre esse assunto porém, em nossa opinião, não é de fácil leitura devido a notação usada pelo autor. Tanto Porteous como Morris definem curvas especiais que ajudam no estudo da geometria da superfície focal. Tais definições são dadas de modo diferente, mas são equivalentes. São elas as curvas ridges e sub-parabólicas. No livro [7] encontramos alguns dos resultados de Porteous, já com uma linguagem atualizada.

Usando resultados sobre desdobramentos versais, deduzem-se modelos para o conjunto focal \mathcal{F} , verificando que ele pode ter singularidades.

Como observamos que a superfície focal, fora de pontos umbílicos, pode ser parametrizada por uma frente de onda, aliamos o estudo realizado por Morris e Porteous aos resultados dos trabalhos de Martins, Saji, Umehara e Yamada ([8] e [9]) para frentes de onda. É conhecido que as singularidades genéricas de frentes de onda são cuspidais edges e rabos de andorinha e dois possíveis modelos para o conjunto focal de superfícies regulares são esses dois tipos de superfícies singulares.

A pré-imagem do conjunto singular de \mathcal{F} correspondente a uma cuspidal edge é uma curva sobre M , chamada *ridge* por Porteous ([5]). Pode ser mostrado que a curva ridge consiste do conjunto dos pontos onde a curvatura principal é extrema ao longo de suas linhas de curvatura. Assim, podemos obter informações geométricas sobre M a partir do conjunto singular de \mathcal{F} , o qual é invariante por difeomorfismos. A pré-imagem sobre M do conjunto parabólico de \mathcal{F} é chamado de conjunto sub-parabólico ([10]). A estrutura do conjunto sub-parabólico é obtido explorando os resultados de dualidade apresentados em [10] entre o conjunto bifurcação da família de aplicações-dobra e a família de funções distância ao quadrado. Pode ser mostrado que o conjunto sub-parabólico é o lugar geométrico das inflexões geodésicas das linhas de curvatura de M ([6]). Está claro, portanto, que a geometria de \mathcal{F} fornece informações sobre a geometria de M .

Uma questão de muito interesse atual é sobre a geometria de superfícies singulares. Neste contexto, frentes de onda são uma importante categoria e há estudos recentes sobre a superfície focal de frentes de onda, devidos a Teramoto ([11, 12]).

Organizamos este artigo da seguinte forma: na Seção 2 apresentamos, de maneira breve, alguns

conceitos que precisaremos no decorrer do trabalho. Na Seção 3 concentramos o estudo sobre o conjunto focal de superfícies regulares em \mathbb{R}^3 e na Seção 4 apresentamos os resultados sobre o conjunto focal para superfícies singulares que são imagens de frentes de onda.

Nossa principal contribuição neste trabalho é apresentar ao leitor um texto em português reunindo material presente em diferentes livros e artigos científicos sobre o conjunto focal de superfícies em \mathbb{R}^3 , uniformizando as diferentes notações existentes, e trazendo também os conceitos modernos sobre frentes de onda, atualizando alguns dos resultados com essa nova roupagem. Esperamos que esse trabalho possa ser motivador aos alunos interessados no estudo da geometria de superfícies, além do ponto de vista tradicional da Geometria Diferencial. Observamos que alguns dos resultados aqui apresentados podem ser consultados na dissertação de mestrado do segundo autor ([13]). Além disso, há vários outros resultados envolvendo a geometria da superfície focal e que não foram incluídos nesse trabalho, porém, entendemos que os principais estão aqui presentes, assim como as devidas referências.

2 Preliminares

Assumiremos neste trabalho conhecimentos básicos sobre Teoria de Singularidades, como aqueles envolvendo contato e desdobramentos e nos limitaremos a algumas definições e propriedades a fim de estabelecer notações. Para detalhes, recomendamos os livros [7, 14].

Dados U, V abertos em \mathbb{R}^n contendo $q \in \mathbb{R}^n$ e aplicações diferenciáveis $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, denotamos por $f \sim g$ quando existir um aberto $W \subset U \cap V$, tal que $f|_W = g|_W$. A relação \sim é uma relação de equivalência no conjunto das aplicações de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m definidas em uma vizinhança de q . A classe de equivalência de f é chamada de **germe** de f em q e é denotada por $f : (\mathbb{R}^n, q) \rightarrow \mathbb{R}^m$. Quando queremos explicitar a imagem de q por um representante (e portanto todos) de f , digamos $f(q) = p$, escrevemos $f : (\mathbb{R}^n, q) \rightarrow (\mathbb{R}^m, p)$.

Consideremos dois germes $f, g : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}^m$, onde $\mathbf{0}$ denota o vetor nulo. Dizemos que f e g são **\mathcal{R} -equivalentes**, o que denotamos por $f \sim_{\mathcal{R}} g$, se existe germe de difeomorfismo $h : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ tal que $g = f \circ h^{-1}$. Quando $f, g : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$ dizemos que f e g são **\mathcal{A} -equivalentes** se existem germes de difeomorfismos $h : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ e $k : (\mathbb{R}^m, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$ tal que $g = k \circ f \circ h^{-1}$. Quando isso acontece, denotamos $f \sim_{\mathcal{A}} g$.

Outro tipo importante de equivalência é a **\mathcal{K} -equivalência**, também chamada de **equivalência de contato**. Dois germes $f, g : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^m, \mathbf{0})$ são **\mathcal{K} -equivalentes** se existe um germe de difeomorfismo $H : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, (\mathbf{0}, \mathbf{0})) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, (\mathbf{0}, \mathbf{0}))$ que pode ser escrito na forma $H(x, y) = (h(x), H_1(x, y))$ com $h : (\mathbb{R}^n, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$ um germe de difeomorfismo e $H_1(x, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, para todo x em uma vizinhança de $\mathbf{0}$, tal que $(x, g(x)) = H(h^{-1}(x), f(h^{-1}(x)))$. Quando isso acontece, denotamos $f \sim_{\mathcal{K}} g$.

Algumas aplicações ou germes de aplicações recebem nomes especiais. Dada $f : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que f é uma **A_k -singularidade** em $\mathbf{0}$ quando $f \sim_{\mathcal{R}} \pm x^{k+1} \pm y^2$, $k \geq 0$. Dizemos que f é uma **D_4^\pm -singularidade** em $\mathbf{0}$ quando $f \sim_{\mathcal{R}} x^2y \pm y^3$.

Uma aplicação $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto em \mathbb{R}^2 , é chamada de **cuspidal edge** em $q \in U$ se o germe de aplicação f em q é \mathcal{A} -equivalente a (x, y^2, y^3) em $\mathbf{0}$. **Rabos de andorinha** são aplicações com germes \mathcal{A} -equivalentes a $(x, 2xy + 4y^3, xy^2 + 3y^4)$ em $\mathbf{0}$.

De agora em diante, salvo menção ao contrário, M denotará uma superfície regular parametrizada localmente por uma imersão $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 , com coordenadas (u, v) . Além disso, I e II são a primeira e segunda formas fundamentais de M , com coeficientes E, F, G e l, m, n , respectivamente, e $N = (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) / (\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|)$. Dado $p \in M$, as curvaturas principais $\kappa_1(p)$ e $\kappa_2(p)$

são importantes invariantes da superfície, pois são os extremos da curvatura normal de M em p (as curvaturas normais de M em p são as curvaturas das curvas planas obtidas tomando a interseção de M com planos contendo a direção normal a M em p). Vamos denotar por \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_2 os vetores principais no plano tangente de M em p , associados a $\kappa_1(p)$ e $\kappa_2(p)$, respectivamente. Além disso, denotaremos por \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 os vetores em \mathbb{R}^2 (que chamaremos de **vetores principais** de M em q) tais que $d\mathbf{x}_q(\mathbf{v}_1) = \mathbf{V}_1$ e $d\mathbf{x}_q(\mathbf{v}_2) = \mathbf{V}_2$, onde $\mathbf{x}(q) = p$ e $d\mathbf{x}_q$ é a diferencial de \mathbf{x} em q ,

Usaremos a notação $\mathbf{u}f$ para a derivada direcional de uma aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ na direção de um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$. Com essa notação temos: $d\mathbf{x}_q(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1\mathbf{x}(q)$, por exemplo e, quando $n = 1$, temos $\mathbf{u}f(q) = \langle \nabla f(q), \mathbf{u} \rangle$, onde ∇f é o vetor gradiente de f .

Se $p \in M$ é um ponto não umbílico, então existe uma parametrização \mathbf{x} de M em p tal que as curvas coordenadas de \mathbf{x} são as linhas de curvatura de M . Vamos chamar esta parametrização de **especial**. Quando as propriedades estudadas não dependem da parametrização, muitas vezes é útil tomar parametrizações especiais. Morris, em [6], e os autores do livro [7] consideram tais parametrizações. Já Porteous, no livro [5], apresenta seus resultados para uma parametrização qualquer.

Observação 1 *Em uma parametrização especial, vamos supor neste trabalho que as curvas coordenadas associadas a κ_1 são imagens por \mathbf{x} das retas paralelas ao eixo- u e as associadas a κ_2 , das retas paralelas ao eixo- v . Assim, obtemos que as retas tangentes às curvas coordenadas $t \mapsto \mathbf{x}(t, v)$, v constante (resp. às curvas coordenadas $t \mapsto \mathbf{x}(u, t)$, u constante) correspondem à direção principal \mathbf{V}_1 (resp. \mathbf{V}_2). Logo, obtemos:*

$$\mathbf{V}_1 = \frac{\mathbf{x}_u(q)}{\sqrt{E(q)}} = \frac{1}{\sqrt{E(q)}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}(q) = \frac{1}{\sqrt{E(q)}} d\mathbf{x}_q(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{\sqrt{E(q)}} \mathbf{e}_1 \mathbf{x}(q) = \mathbf{v}_1 \mathbf{x}(q)$$

onde $\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{\sqrt{E(q)}}$ com $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$. De modo análogo, $\mathbf{V}_2 = \frac{\mathbf{x}_v(q)}{\sqrt{G(q)}} = \mathbf{v}_2 \mathbf{x}(q)$ e $\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{e}_2}{\sqrt{G(q)}}$, sendo $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.

Recordemos ainda que, sempre que as curvas coordenadas forem linhas de curvatura, as curvaturas principais são dadas por $\kappa_1 = l/E$ e $\kappa_2 = n/G$ e vale que $F = m = 0$.

2.1 Contato e a função distância ao quadrado

Se M_1 é um germe de superfície dado como imagem de um germe de imersão $g : (\mathbb{R}^2, q) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ e N_1 é um germe de superfície dado localmente como conjunto de zeros de um germe de submersão $f : (\mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, isto é $N_1 = f^{-1}(0)$, o germe de composição $f \circ g$ é chamado de germe de **aplicação de contato** entre M_1 e N_1 . O tipo de contato é determinado pela \mathcal{K} -classe da aplicação de contato. Mais precisamente, sejam $g_i : (\mathbb{R}^2, q) \rightarrow (\mathbb{R}^3, \mathbf{0})$ germes de imersões e $f_i : (\mathbb{R}^3, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ germes de submersões com $M_i = g_i(\mathbb{R}^2, q)$ e $N_i = f_i^{-1}(0)$, $i = 1, 2$. Os pares (M_1, N_1) e (M_2, N_2) têm o mesmo **tipo de contato** se, e somente se, $f_1 \circ g_1$ e $f_2 \circ g_2$ são \mathcal{K} -equivalentes. Dado um par de superfícies regulares M e N em \mathbb{R}^3 , claramente existem várias maneiras de escolher um germe de imersão g e um de submersão f tal que $f \circ g$ seja um germe de aplicação de contato entre M e N . Porém, pode ser mostrado que a \mathcal{K} -classe da aplicação de contato depende somente dos germes de superfícies e não da escolha da aplicação de contato. Para detalhes, ver [7] p. 76.

O conjunto focal de uma superfície surge ao estudar o contato da superfície com esferas. Esferas em \mathbb{R}^3 são unicamente determinadas pelo seu centro $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ e raio $r \in \mathbb{R}$, ou seja, são dadas por $S(\mathbf{u}, r) = \{y \in \mathbb{R}^3; \langle y - \mathbf{u}, y - \mathbf{u} \rangle = r^2\}$.

Para cada (\mathbf{u}, r) fixado, a função $y \mapsto \langle y - \mathbf{u}, y - \mathbf{u} \rangle - r^2$ é uma submersão. Assim, o contato entre M e a esfera $S(\mathbf{u}, r)$ é medido pela função $d_{(\mathbf{u}, r)} : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_{(\mathbf{u}, r)}(q) = \langle \mathbf{x}(q) - \mathbf{u}, \mathbf{x}(q) - \mathbf{u} \rangle - r^2$. A esfera é tangente à superfície em um ponto $p = \mathbf{x}(q)$ quando $d_{(\mathbf{u}, r)}$ for singular em q .

Para estudar o contato entre a superfície M e uma família de esferas, usamos a \mathcal{R}^+ -equivalência, dada pelo produto direto do grupo \mathcal{R} com translações, uma vez que assim obtemos informações não somente quanto ao contato entre a superfície e uma esfera, como também com esferas próximas.

Mais precisamente, sejam M_i superfícies regulares em \mathbb{R}^3 , $g_i : (\mathbb{R}^2, x_i) \rightarrow (\mathbb{R}^3, y_i)$ germes de imersões com $g_i(\mathbb{R}^2, x_i) = M_i$ e $f_i : (\mathbb{R}^3, y_i) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ germes de submersões, $i = 1, 2$. O contato entre M_1 e a família de folheações regulares $\mathcal{F}_{f_1} = \{f_1^{-1}(c); c \in (\mathbb{R}, 0)\}$ em y_1 é do **mesmo tipo** que o contato entre M_2 e a família $\mathcal{F}_{f_2} = \{f_2^{-1}(c); c \in (\mathbb{R}, 0)\}$ em y_2 se, e somente se, $f_1 \circ g_1$ e $f_2 \circ g_2$ são \mathcal{R}^+ -equivalentes. Para detalhes, [7] p. 80.

Consideremos a **família de funções distância ao quadrado** $D : U \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$D(q, \mathbf{u}) = \langle \mathbf{x}(q) - \mathbf{u}, \mathbf{x}(q) - \mathbf{u} \rangle. \quad (1)$$

Fixado $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, o contato de M com a família de esferas com centro em \mathbf{u} é medido pelas \mathcal{R}^+ -singularidades da **função distância ao quadrado** $d_{\mathbf{u}} : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_{\mathbf{u}}(q) = D(q, \mathbf{u})$. Vale observar que as funções $d_{\mathbf{u}}$ e $d_{(\mathbf{u}, r)}$ possuem as mesmas \mathcal{R} ou \mathcal{K} -classes de singularidades. O teorema abaixo exhibe possíveis singularidades para essas funções. Observamos que a família D é uma deformação de $d_{\mathbf{u}}$. Para resultados sobre versalidade de deformações, sugerimos o livro [7].

Teorema 2 ([7], p.178) *Existe um conjunto aberto e denso O_2 de imersões $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que, dado $\mathbf{x} \in O_2$, a superfície $M = \mathbf{x}(U)$ tem as seguintes propriedades: Para todo $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, a função distância ao quadrado $d_{\mathbf{u}}$ (resp. $\tilde{d}_{(\mathbf{u}, r)}$) tem somente singularidades locais do tipo A_1, A_2, A_3, A_4 ou D_4 . Além disso, as singularidades de $d_{\mathbf{u}}$ (resp. $\tilde{d}_{(\mathbf{u}, r)}$) são \mathcal{R}^+ (resp. \mathcal{K}) versalmente desdobradas pela família D (resp. \tilde{D}).*

De agora em diante diremos que uma superfície é **genérica** se ela é imagem de uma imersão pertencente ao conjunto O_2 dado no teorema acima.

O seguinte resultado será importante ao estudo do conjunto focal.

Proposição 3 ([7], p. 35) *Sejam $p = \mathbf{x}(q)$ um ponto não parabólico de $M = \mathbf{x}(U)$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Então:*

- O ponto q é singular de $d_{\mathbf{u}}$ se, e somente se, $\mathbf{u} = \mathbf{x}(q) + \lambda N(q)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.*
- Seja $\mathbf{u} = \mathbf{x}(q) + \lambda N(q)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. O ponto q é singular degenerado de $d_{\mathbf{u}}$ se, e somente se, $\lambda = 1/\kappa_1(q)$ ou $\lambda = 1/\kappa_2(q)$.*
- Seja $\mathbf{u} = \mathbf{x}(q) + \lambda N(q)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. O ponto p é umbílico de M se, e somente se, o posto da matriz hessiana de $d_{\mathbf{u}}$ em q é zero.*

3 Conjunto focal de superfícies regulares

Definição 4 *Suponha que M não tem pontos parabólicos. O conjunto focal de M é o conjunto $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ de \mathbb{R}^3 , onde*

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ p + \frac{1}{\kappa_1(p)} N(p); p \in M \right\} \text{ e } \mathcal{F}_2 = \left\{ p + \frac{1}{\kappa_2(p)} N(p); p \in M \right\}.$$

Se $p \in M$ é um ponto não umbílico, então existem dois pontos focais distintos correspondentes a p , um em cada folha de \mathcal{F} . Estes pontos focais coincidem quando p é um ponto umbílico, ou seja, \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 se intersectam neste ponto. Assim, fora de pontos umbílicos, o conjunto focal é localmente a união desconexa de superfícies (podendo ser singulares), imagens das aplicações suaves $FC, \widehat{FC} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, dadas por:

$$FC(u, v) = \mathbf{x}(u, v) + \frac{1}{\kappa_1(u, v)}N(u, v) \quad \text{e} \quad \widehat{FC}(u, v) = \mathbf{x}(u, v) + \frac{1}{\kappa_2(u, v)}N(u, v). \quad (2)$$

Chamamos $\mathcal{F}_1 = FC(U)$ e $\mathcal{F}_2 = \widehat{FC}(U)$ de **folha vermelha** e **folha azul** do conjunto focal, respectivamente, e de **linhas de curvatura vermelhas** (resp. **azuis**), as curvas sobre M (ou as correspondentes em U) cujas retas tangentes são direções principais associadas à curvatura κ_1 (resp. associadas à κ_2). A curvatura normal dessas curvas é sempre a curvatura principal. Considerando a imagem de cada linha de curvatura vermelha de M por FC , temos uma curva na folha vermelha, que chamaremos de **linha de curvatura focal vermelha** (o mesmo para as azuis).

Exemplo 5 O conjunto focal de uma esfera é apenas o seu centro. Considere o parabolóide hiperbólico M parametrizado por $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$. Uma de suas folhas é parametrizada por $\psi(u, v) = \left(u - \frac{uz^2}{C}, v + \frac{vz^2}{C}, u^2 - v^2 + \frac{z^2}{2C} \right)$, onde $C = 2(v^2 - u^2) - \sqrt{4(v^2 + u^2) + z^2}$ e $z = \|N(u, v)\| = \sqrt{4(u^2 + v^2) + 1}$, e a outra é obtida de modo análogo, onde $C = 2(v^2 - u^2) + \sqrt{4(v^2 + u^2) + z^2}$. As folhas do focal e a superfície inicial estão representadas na Figura 1.

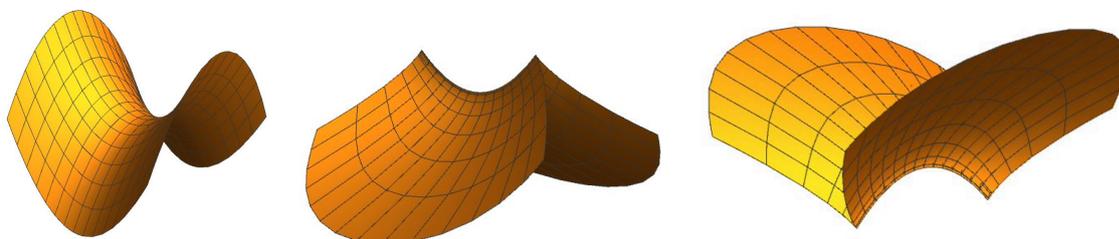


Figura 1: O parabolóide hiperbólico (esquerda) do Exemplo 5 e suas duas folhas do conjunto focal.

Pontos umbílicos não parabólicos de $M = \mathbf{x}(U)$ podem ser detectados pela função distância ao quadrado $d_{\mathbf{u}} : U \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d_{\mathbf{u}}(q) = \|\mathbf{x}(q) - \mathbf{u}\|^2$, conforme vimos na Proposição 3. Além disso, segue da mesma proposição que \mathbf{u} pertence ao conjunto focal de M se, e somente se, o ponto q é singular degenerado de $d_{\mathbf{u}}$.

3.1 Modelos do conjunto focal

Podemos determinar os modelos do conjunto focal para superfícies genéricas, a menos de difeomorfismos, ao considerar o contato das superfícies com esferas, que sabemos ser medido pelas singularidades dos membros da família de funções distância ao quadrado $D : U \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada em (1). De fato, o conjunto bifurcação da família D é o conjunto $\mathcal{B}_D = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3; \exists q \in U \text{ ponto singular de } d_{\mathbf{u}} \text{ tal que posto da matriz hessiana de } d_{\mathbf{u}} \text{ em } q \text{ é menor do que } 2\}$. Ou seja, $\mathbf{u} \in \mathcal{B}_D$ se, e somente se, existe q ponto singular degenerado de $d_{\mathbf{u}}$. Pela Proposição 3(b), isto ocorre se, e somente se, \mathbf{u} pertence ao conjunto focal.

Pelo Teorema 2, a família D é uma deformação \mathcal{R}^+ -versal de $d_{\mathbf{u}}$. Consequentemente, usando resultados sobre versalidade de deformações, obtemos modelos para o conjunto focal de uma superfície genérica, a menos de difeomorfismos, conforme segue. Recordamos que um subconjunto de \mathbb{R}^3 é chamado de **pirâmide** (resp. **bolsa**) se ele é localmente difeomorfo a $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = -u^2 + v^2 - 2uz, y = 2uv - 2vz, z^2 = u^2 + v^2, \text{ com } (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$ (resp. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = -3u^2 - vz, y = -3v^2 - uz, z^2 = 36uv, \text{ com } (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$).

Teorema 6 ([7], p. 182) *Seja $M = \mathbf{x}(U)$ uma superfície regular genérica sem pontos parabólicos e $\mathbf{u} = \mathbf{x}(q) + 1/\kappa_i(q)N(q)$, $i = 1$ ou 2 . Fora de pontos umbílicos, as folhas do conjunto focal \mathcal{F} de M são difeomorfas a:*

- (a) *uma superfície regular se, e somente se, $d_{\mathbf{u}}$ tem uma A_2 -singularidade em q ;*
- (b) *uma cuspidal edge se, e somente se, $d_{\mathbf{u}}$ tem uma A_3 -singularidade em q ;*
- (c) *um rabo de andorinha se, e somente se, $d_{\mathbf{u}}$ tem uma A_4 -singularidade em q .*

Em um ponto umbílico, o conjunto focal é difeomorfo a uma pirâmide (resp. bolsa) se, e somente se, $d_{\mathbf{u}}$ tem uma D_4^- (resp. D_4^+)-singularidade em q .

Concluimos que, para superfícies genéricas, o conjunto focal é localmente equivalente (por um difeomorfismo suave) a um dos modelos dados na Figura 2. Assim, o conjunto focal de M pode ter singularidades.

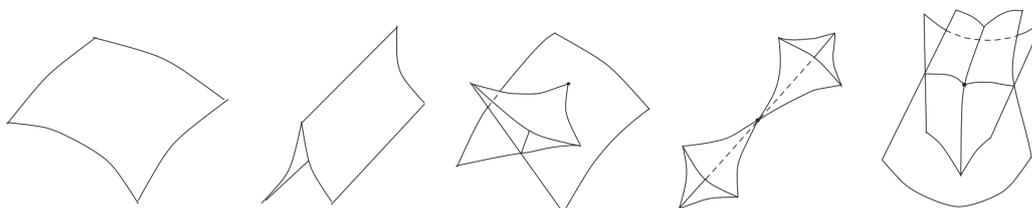


Figura 2: Modelos do conjunto focal de uma superfície genérica em \mathbb{R}^3 , a menos de difeomorfismos. Da esquerda para direita: regular, cuspidal edge, rabo de andorinha, pirâmide e bolsa.

3.2 Geometria do conjunto focal

No restante dessa seção vamos supor que M não tem pontos parabólicos. Faremos o estudo da geometria do conjunto focal somente para a folha vermelha \mathcal{F}_1 , imagem da aplicação FC dada em (2). Para a folha azul, o estudo é análogo. Seja $\Sigma = \{q \in U; q \text{ é um ponto singular de } FC\}$. Se $q \notin \Sigma$, então \mathcal{F}_1 é localmente uma superfície regular parametrizada por FC e, portanto, quando a superfície é genérica, a função distância ao quadrado $d_{FC(q)}$ tem uma singularidade A_2 em q . Se $q \in \Sigma$, então $d_{FC(q)}$ tem singularidade A_3, A_4 ou D_4 em q . De agora em diante, passaremos a chamar cada folha do conjunto focal de M de **superfície focal**.

Há pontos especiais sobre a superfície M , chamados ridges, que podem ser definidos como pontos onde as curvaturas principais tem um valor extremo (máximo ou mínimo) quando movendo ao longo da linha de curvatura de mesma cor. Porteous em [4, 15] foi quem primeiro deu um tratamento matemático para ridges e, posteriormente, ridges foram reconhecidas como significantes para uma superfície ao se encontrar diversas aplicações, como por exemplo em [2], onde ridges surgem no estudo de imagens de ressonâncias magnéticas. Mais precisamente, temos:

Definição 7 Um ponto $p = \mathbf{x}(q) \in M$ é dito **ponto de ridge** vermelho (resp. azul) quando $\mathbf{v}_1 \kappa_1(q) = 0$ (resp. $\mathbf{v}_2 \kappa_2(q) = 0$), e o ponto $FC(q)$ da superfície focal (resp. $\widehat{FC}(q)$) é chamado de **ponto de rib** vermelho (resp. azul), onde \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 são os vetores principais de M em q .

Como vamos estudar a superfície focal vermelha, quando nos referirmos a um ponto de ridge, queremos dizer um ponto de ridge vermelho.

Observação 8 (a) Se $p = \mathbf{x}(q)$ é ponto de ridge vermelho então q é ponto singular de FC . Ainda mais, se M não tem pontos umbílicos, então todo ponto singular de FC é de ridge.

De fato, tomando uma parametrização especial \mathbf{x} para M e usando a Observação 1, obtemos:

$$\mathbf{v}_1 \kappa_1(q) = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \kappa_1}{\partial u}(q) \text{ e } \mathbf{v}_2 \kappa_1(q) = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \kappa_1}{\partial v}(q).$$

Diferenciando (2) em $q \in U$, obtemos:

$$FC_u(q) = -\frac{1}{\kappa_1^2(q)} \frac{\partial \kappa_1}{\partial u}(q) N(q) \text{ e } FC_v(q) = \frac{\kappa_1(q) - \kappa_2(q)}{\kappa_1(q)} \mathbf{x}_v(q) - \frac{1}{\kappa_1^2(q)} \frac{\partial \kappa_1}{\partial v}(q) N(q). \quad (3)$$

Logo, se q não é ponto umbílico, então FC é singular em q se, e somente se, $FC_u(q) = 0$, ou seja, q é ponto de ridge, de onde concluímos (a).

(b) Se M não tem pontos umbílicos e \mathbf{x} é parametrização especial, temos:

$$\Sigma = \{q \in U; \frac{\partial \kappa_1}{\partial u}(q) = 0\}, \quad (4)$$

$$FC_u \times FC_v = -\frac{1}{\kappa_1^2} \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)}{\kappa_1} (N \times \mathbf{x}_v) = \left(\frac{\partial \kappa_1}{\partial u} \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)}{\kappa_1^3} \sqrt{G} \right) \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}.$$

e

$$\frac{FC_u \times FC_v}{\|FC_u \times FC_v\|}(q) = \text{sgn}(\lambda(q)) \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}}(q) = \text{sgn}(\lambda(q)) \mathbf{V}_1(q)$$

onde

$$\lambda(q) = \frac{\partial \kappa_1}{\partial u}(q) \frac{\kappa_1(q) - \kappa_2(q)}{\kappa_1^3(q)} \sqrt{G(q)} \quad (5)$$

e $\text{sgn}(\lambda(q)) = +1$, quando $\lambda(q) > 0$, e $\text{sgn}(\lambda(q)) = -1$, quando $\lambda(q) < 0$.

Logo, fora de pontos umbílicos, a direção normal à superfície focal \mathcal{F}_1 é a direção principal \mathbf{V}_1 associada à curvatura principal κ_1 (ver Observação 1).

Obtemos assim uma função suave $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por (5), que veremos ser bastante útil no que segue. Note que o conjunto singular de FC coincide com o conjunto $\{q \in U; \lambda(q) = 0\}$, isto é, $\Sigma = \lambda^{-1}(0)$. Além disso, considerando a aplicação $\nu : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\nu(q) = \frac{\mathbf{x}_u(q)}{\|\mathbf{x}_u(q)\|} = \frac{\mathbf{x}_u(q)}{\sqrt{E(q)}} = \mathbf{V}_1(q), \quad (6)$$

obtemos que ν é um campo de vetores unitários normais à \mathcal{F}_1 e que $\lambda = \langle FC_u \times FC_v, \nu \rangle$.

Observamos que, considerando a folha azul \mathcal{F}_2 , com o mesmo raciocínio obtemos o campo de vetores normais unitários

$$\hat{v}(q) = \frac{\mathbf{x}_v(q)}{\|\mathbf{x}_v(q)\|} = \frac{\mathbf{x}_v(q)}{\sqrt{G(q)}} = \mathbf{V}_2(q). \quad (7)$$

Quando M é uma superfície genérica que não contém pontos umbílicos nem parabólicos, então a superfície focal é difeomorfa a uma cuspidal edge, quando $d_{FC(q)}$ tem uma singularidade A_3 em q , ou a um rabo de andorinha, quando $d_{FC(q)}$ tem singularidade A_4 em q . Calculando os conjuntos singulares dos \mathcal{A} -modelos de cuspidal edges e rabos de andorinha, obtemos que Σ é localmente uma curva regular (chamada de **curva singular**). Assim, como \mathbf{x} é uma imersão, concluímos que o conjunto de pontos de ridge constituem uma *curva regular* em M , que chamaremos de **curva ridge**. Se $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, $\varepsilon > 0$, é uma parametrização para a curva singular, com $\gamma(t) = (u(t), v(t))$, sejam $\gamma_d := \mathbf{x} \circ \gamma$ uma parametrização para a ridge de $M = \mathbf{x}(U)$ e $\gamma_b := FC \circ \gamma$ uma parametrização para a rib.

Apresentaremos agora um resultado que foi provado por Porteous em [5], p. 176, que dá informações sobre as linhas de curvatura focais. Faremos aqui uma demonstração alternativa a dada em [5].

No que segue, denotaremos $\mathbf{x} \circ (u(t), v(t))$ apenas por $\mathbf{x}(t)$, com abuso de notação, e de modo análogo para demais funções vetoriais.

Proposição 9 *Sejam $M = \mathbf{x}(U)$ uma superfície regular sem pontos parabólicos nem umbílicos, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$ uma curva tal que $\mathbf{x} \circ \alpha$ é uma linha de curvatura vermelha de M e $\beta(t) = FC \circ \alpha(t)$ parametrização para a linha de curvatura focal vermelha. Então, em pontos regulares de β , seu vetor normal principal é normal à superfície focal, isto é, $\beta(I)$ é uma geodésica de \mathcal{F}_1 .*

Demonstração. Podemos supor que \mathbf{x} é uma parametrização especial para M . Assim, $\alpha(t) = (u(t), v_0)$, para algum v_0 real, e podemos supor que u é crescente. Podemos supor também que β está parametrizada pelo comprimento de arco. Logo, basta mostrarmos que a curvatura geodésica $\kappa_g(t)$ de β se anula em todo ponto regular, onde $\kappa_g = \langle \beta'', v \times \beta' \rangle$, onde v é dado em (6).

Sejam $t \in I$ um ponto regular de β e $q = (u(t), v_0)$. Logo, por (3),

$$\beta'(t) = \frac{dFC_q(1, 0)}{\|dFC_q(1, 0)\|} = \frac{FC_u(q)}{\|FC_u(q)\|} = c(t)N(t),$$

com $c(t) \in \mathbb{R}$. Logo, $v \times \beta'$ é paralelo ao vetor \mathbf{x}_v .

Como $\langle \beta'(t), \mathbf{x}_v(t) \rangle = 0$, para todo t , derivando em t essa expressão e usando que $m = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = 0$, obtemos que $\langle \beta''(t), \mathbf{x}_v(t) \rangle = 0$, ou seja, o vetor $\beta''(t)$ é perpendicular a $\mathbf{x}_v(t)$, de onde segue que $\kappa_g(t) = \langle \beta''(t), v(t) \times \beta'(t) \rangle = 0$, como queríamos. \square

Vimos que o conjunto focal de uma superfície regular M é obtido considerando as singularidades da função distância ao quadrado, que está relacionada com o contato entre a superfície e esferas. A geometria do conjunto focal pode também ser capturada estudando o contato de M com planos, pois este dá informações sobre o conjunto parabólico da superfície focal.

Definição 10 *Um ponto $\mathbf{x}(q) \in M$ tal que $FC(q)$ (resp. $\widehat{FC}(q)$) é parabólico em \mathcal{F}_1 (resp. em \mathcal{F}_2) é chamado de **sub-parabólico vermelho** (resp. **sub-parabólico azul**).*

A definição acima foi dada por Bruce e Wilkinson em [10]. Morris, em [6], a define como o conjunto dos pontos de M em que $\frac{\partial \kappa_2}{\partial u} = 0$, que veremos serem definições equivalentes.

Usando (3) e (6), obtemos os coeficientes das formas fundamentais da superfície focal.

Proposição 11 ([7], p. 195) *Seja $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização especial de M . Os coeficientes da primeira forma fundamental de \mathcal{F}_1 são:*

$$E_{FC} = \frac{1}{\kappa_1^4} \left(\frac{\partial \kappa_1}{\partial u} \right)^2, \quad F_{FC} = \frac{1}{\kappa_1^4} \frac{\partial \kappa_1}{\partial u} \frac{\partial \kappa_1}{\partial v} \quad e \quad G_{FC} = \left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1} \right)^2 G + \frac{1}{\kappa_1^4} \left(\frac{\partial \kappa_1}{\partial v} \right)^2$$

e os da segunda forma fundamental são:

$$l_{FC} = \frac{\sqrt{E}}{\kappa_1} \frac{\partial \kappa_1}{\partial u}, \quad m_{FC} = 0 \quad e \quad n_{FC} = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_1} \right) \frac{G_u}{2}.$$

Para a superfície focal azul \mathcal{F}_2 , seus coeficientes são:

$$E_{\widehat{FC}} = \frac{1}{\kappa_2^4} \left(\frac{\partial \kappa_2}{\partial v} \right)^2, \quad F_{\widehat{FC}} = \frac{1}{\kappa_2^4} \frac{\partial \kappa_2}{\partial v} \frac{\partial \kappa_2}{\partial u}, \quad G_{\widehat{FC}} = \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\kappa_2} \right)^2 E + \frac{1}{\kappa_2^4} \left(\frac{\partial \kappa_2}{\partial u} \right)^2,$$

$$l_{\widehat{FC}} = \frac{\sqrt{G}}{\kappa_2} \frac{\partial \kappa_2}{\partial v}, \quad m_{\widehat{FC}} = 0 \quad e \quad n_{\widehat{FC}} = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_2} \right) \frac{E_v}{2}.$$

Morris mostrou em [6] relações entre um ponto sub-parabólico e o comportamento da curvatura Gaussiana K_{FC} da superfície focal, como veremos nas próximas seções. O teorema abaixo apresenta uma expressão para K_{FC} que pode ser obtida substituindo os coeficientes dados na Proposição 11 em $K_{FC} = (l_{FC}n_{FC} - m_{FC}^2)/(E_{FC}G_{FC} - F_{FC}^2)$, observando que $G_u = 2\langle \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_v \rangle = -2\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_{vv} \rangle$, pois $\langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0$.

Teorema 12 *Sejam M uma superfície regular sem pontos parabólicos e umbílicos e $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização especial de M . A curvatura Gaussiana da superfície focal \mathcal{F}_1 em um ponto regular é dada por*

$$K_{FC} = - \frac{\kappa_1^4 G_u}{2(\kappa_1 - \kappa_2)(\kappa_1)_u G}. \quad (8)$$

Concluimos de (8) que o conjunto parabólico de \mathcal{F}_1 é o conjunto dos pontos $FC(q) \in \mathcal{F}_1$ tal que $G_u(q) = 0$. Assim, genericamente, o conjunto sub-parabólico de M é uma curva. Estudando o conjunto dos pontos de M em que a curvatura Gaussiana K_{FC} dada em (8) se anula, podemos provar o seguinte resultado. A demonstração pode ser encontrada em [6], porém recomendamos a demonstração feita no livro [7], p. 196, que usa uma linguagem de mais fácil entendimento.

Teorema 13 ([6]) *Sejam M uma superfície regular sem pontos parabólicos e umbílicos e $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrização especial de M . Fora de pontos de ridge, a curva sub-parabólica vermelha de M é o conjunto dos pontos $\mathbf{x}(u, v)$ onde $\frac{\partial \kappa_2}{\partial u}(u, v) = 0$. A curva sub-parabólica azul de M é o conjunto dos pontos $\mathbf{x}(u, v)$ onde $\frac{\partial \kappa_1}{\partial v}(u, v) = 0$.*

Corolário 14 *Fora de pontos de ridge, a curva sub-parabólica vermelha (resp. azul) de M é o conjunto dos pontos onde a curvatura principal κ_2 (resp. κ_1) tem um extremo ao longo da linha de curvatura vermelha (resp. azul), ou seja, um ponto $p = \mathbf{x}(q) \in M$ é sub-parabólico vermelho (resp. azul) se, e somente se, $\mathbf{v}_2 \kappa_1(q) = 0$ (resp. $\mathbf{v}_1 \kappa_2(q) = 0$).*

A curva sub-parabólica de M também possui a seguinte propriedade, cuja demonstração pode ser consultada no livro [7], p. 197. Recorde que uma inflexão geodésica é um ponto de uma curva em que a curvatura geodésica se anula.

Teorema 15 ([6]) *A curva sub-parabólica vermelha de M é o lugar geométrico das inflexões geodésicas das linhas de curvaturas azuis (correspondentes a curvatura principal κ_2).*

3.3 Frentes de onda

Superfícies parametrizadas por frentes de onda têm importantes propriedades e têm sido muito estudadas nos últimos anos. Frentes de onda são exemplos de superfícies parametrizadas que possuem um campo de vetores normais bem definido, inclusive nos pontos singulares. Quando M é uma superfície genérica, sem pontos umbílicos nem parabólicos, sua superfície focal é uma cuspidal edge ou rabo de andorinha. Como estas superfícies focais são imagens de frentes de onda, podemos usar a teoria sobre tais aplicações para o estudo da sua geometria. Vamos recordar brevemente alguns conceitos relacionados a frentes de onda que usaremos nesta seção. Para maiores informações, sugerimos o excelente artigo [9].

Definição 16 Uma aplicação suave $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma **frontal** se existe um campo unitário suave $\nu : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais à f , isto é, $\|\nu(q)\| = 1$ e $\langle df_q(X), \nu(q) \rangle = 0$, para todo $X \in \mathbb{R}^2$ e $q \in U$. Se além disso $(f, \nu) : U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ for uma imersão, dizemos que f é uma **frente de onda** (ou simplesmente **frente**) e ν é a **aplicação de Gauss** de f .

Toda parametrização de superfícies regulares é uma frente de onda, basta tomar ν como sendo a aplicação normal de Gauss da parametrização. O **plano tangente limitante** de M em $f(q)$ é o plano que passa por $f(q)$ e é perpendicular a $\nu(q)$, estando bem definido para todo $q \in U$. Dada uma frente $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ denotaremos seu conjunto singular por Σ_f , ou seja, $\Sigma_f = \{q \in U; \text{posto } df_q < 2\}$.

Exemplo 17 A cuspidal edge usual $f_1(u, v) = (u, v^2, v^3)$ é uma frente de onda. De fato, basta tomar $\nu(u, v) = \frac{1}{\sqrt{4+9v^2}}(0, -3v, 2)$. A aplicação $f_2(u, v) = (au^2 + v^2, bv^2 + v^3, u)$, com $a, b \in \mathbb{R}$, é uma cuspidal edge, sendo sua aplicação de Gauss dada por $\nu(u, v) = \frac{1}{\delta(u, v)}(-3v - 2b, 2, 2au(3v + 2b))$, onde $\delta(u, v) = \sqrt{4 + (1 + 4a^2u^2)(4b^2 + 12bv + 9v^2)}$. É fácil verificar que a aplicação $f_3(u, v) = (u, 2uv + 4v^3, uv^2 + 3v^4)$, a qual é um rabo de andorinha, também é uma frente. A Figura 3 apresenta o traço de f_1 (esquerda), de f_2 para $a = b = 1$ (centro-esquerda), e para $a = b = -1$ (centro-direita) e de f_3 (direita).

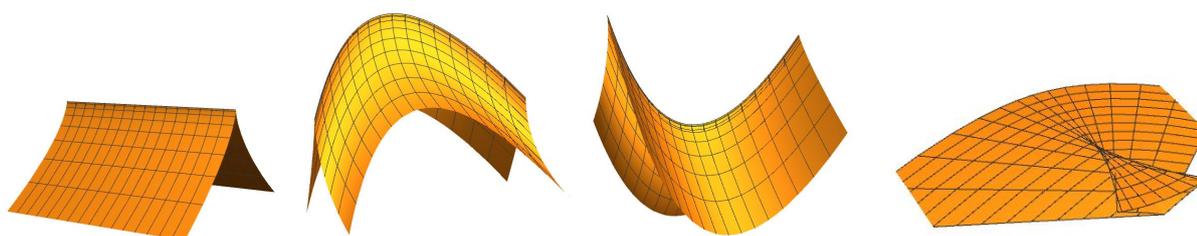


Figura 3: Cuspidal edges e rabo de andorinha dadas no Exemplo 17.

Cuspidal edges e rabos de andorinha são singularidades genéricas de frentes de onda em \mathbb{R}^3 . Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma frente, com $f(U) = M$ e ν a aplicação de Gauss de f .

A função $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\lambda(q) = \langle f_u(q) \times f_v(q), \nu(q) \rangle = \det(f_u, f_v, \nu)(q)$$

é chamada **função densidade de área** de f e satisfaz $\Sigma_f = \lambda^{-1}(0)$.

Dizemos que $q \in \Sigma_f$ é um **ponto singular não degenerado** de f se q é um ponto regular de λ , ou seja, se $\lambda_u(q)$ e $\lambda_v(q)$ não se anulam simultaneamente. Segue do Teorema da Função Implícita

que, em uma vizinhança de pontos singulares não degenerados, Σ_f é localmente uma curva regular, chamada **curva singular** de f . Podemos mostrar que os pontos singulares de cuspidal edges e rabos de andorinhas são não degenerados.

A partir de agora, dado um ponto singular não degenerado q de f , denotaremos por $\gamma : (\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ ($\varepsilon > 0$) uma parametrização para a curva singular, com $\gamma(0) = q$ e vamos tomar ε tal que $\gamma(t)$ é um ponto singular não degenerado para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Se $q \in \Sigma_f$ é não degenerado, então a diferencial df_q é uma aplicação linear de posto 1 e, assim, o núcleo de df_q tem dimensão 1. A direção de \mathbb{R}^2 dada por este núcleo é chamada de **direção nula**. Podemos escolher um campo suave de vetores $\eta(t)$ ao longo de γ tal que $\eta(t)$ pertence a direção nula para todo t , ou seja, $df_{\gamma(t)}(\eta(t)) = \mathbf{0}$, chamado de **campo anulador** de vetores ao longo de γ . A **reta tangente** à M em $f(q)$, denotada por $T_{f(q)}M$, é definida como sendo a reta que passa por $f(q)$ e é paralela a reta $df_q(\mathbb{R}^2)$. O **plano normal** à M em $f(q)$, denotado por $N_{f(q)}M$, é definido como sendo o plano perpendicular à $df_q(\mathbb{R}^2)$ passando por $f(q)$.

Um ponto singular q não-degenerado de uma frontal $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dito ser do **primeiro tipo** se $\gamma'(t_0)$ não é paralelo a $\eta(t_0)$, onde $\gamma(t_0) = q$. Caso contrário, q é dito do **segundo tipo**.

Observação 18 *Cuspidal edges são frentes com pontos singulares não degenerados do primeiro tipo e rabos de andorinha são frentes do segundo tipo que satisfazem $\left. \frac{d}{dt} \det(\gamma'(t), \eta(t)) \right|_{t_0} \neq 0$ (conforme [9], Fato 1.5). Essa última condição para ser um ponto de rabo de andorinha significa que a curva singular, além de ser tangente à reta por q que tem a direção nula em t_0 , não a cruza (tal tangência é chamada ordinária).*

As vezes é conveniente tomar um sistema de coordenadas em \mathbb{R}^2 que simplifica notações e cálculos, dado como segue.

Definição 19 *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma frontal e q um ponto singular de f do primeiro tipo (resp. segundo tipo). Um sistema de coordenadas (u, v) em torno de q é dito **adaptado** se é compatível com a orientação de \mathbb{R}^2 e as seguintes condições são satisfeitas:*

- (a) $\Sigma_f \cap U$ está contida no eixo u ;
- (b) $\eta = \partial_v$ (resp. $\eta = \partial_u + \varepsilon(u)\partial_v$, com $\varepsilon(0) = 0$) é um campo anulador de vetores de f ao longo do eixo- u .

Suponhamos que a curva singular é composta somente por pontos singulares não degenerados. Em um sistema de coordenadas adaptado, como a curva singular está contida no eixo- u , então a função λ se anula sobre o eixo- u . Assim, $\lambda = v g$, onde g é uma função suave e, portanto, λ_u também se anula sobre o eixo- u . Como todos os pontos de Σ_f são não degenerados, então λ_v não se anula sobre o eixo- u . Segue portanto que, como $\lambda_v(u, 0) = g(u, 0)$, então g não muda de sinal em U (diminuindo U , se necessário) e, assim, λ muda de sinal quando cruza o eixo- u . Com isso, concluímos que a curva singular Σ separa U em duas regiões U_+ e U_- , onde $\lambda > 0$ e $\lambda < 0$, respectivamente.

3.4 Focal como frente de onda

Supondo que M não tem pontos parabólicos nem umbílicos então, quando x for uma parametrização especial de M , temos bem definido em todo ponto da superfície focal \mathcal{F} de M um campo de

vetores normais unitários, dado por ν em (6) para a folha vermelha e por $\hat{\nu}$ em (7), para a folha azul. Além disso ν e $\hat{\nu}$ são aplicações suaves definidas em U . Isso prova que FC e \widehat{FC} , dadas em (2) são frontais. O próximo resultado garante que essas aplicações são frentes de onda.

Proposição 20 *Suponha que $M = \mathbf{x}(U)$, sem pontos umbílicos e parabólicos. Então as aplicações FC e \widehat{FC} , dadas em (2), que parametrizam as folhas da superfície focal de M são frentes de onda.*

Demonstração: Basta provar o resultado para FC , pois para \widehat{FC} é análogo. Podemos supor que \mathbf{x} é parametrização especial. Como FC é frontal, basta provar que a aplicação $L = (FC, \nu)$ é uma imersão. A matriz jacobiana de L é dada pela matriz

$$\text{Jac}(L) = \begin{bmatrix} FC_u & FC_\nu \\ \nu_u & \nu_\nu \end{bmatrix}_{6 \times 2}.$$

Segue de (3) que FC_ν não se anula e que FC_u se anula sobre a curva singular. Assim, se garantirmos que $\nu_u \neq 0$ em todo ponto, então $\text{Jac}(L)$ tem posto máximo e, portanto, FC é uma frente de onda.

Como $\nu_u = \frac{1}{\sqrt{E}}\mathbf{x}_{uu} - \frac{E_u}{2\sqrt{E}^3}\mathbf{x}_u$, basta mostrarmos que \mathbf{x}_{uu} e \mathbf{x}_u são linearmente independentes.

De fato, considerando a base ortonormal $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_\nu, N\}$ e escrevendo $\mathbf{x}_{uu} = \alpha \frac{\mathbf{x}_u}{\sqrt{E}} + \beta \frac{\mathbf{x}_\nu}{\sqrt{G}} + \delta N$, temos

$\delta = \langle \mathbf{x}_{uu}, N \rangle = l \neq 0$, pois $\kappa_1 = \frac{l}{E}$ (ver Observação 1) e M não há pontos parabólicos. \square

Como FC é uma frente de onda, podemos estudar a geometria da superfície focal de M fazendo uso de todos os conceitos e propriedades válidas para frentes. Na Observação 8 obtemos o conjunto singular Σ de FC , a função densidade de área λ e o campo normal ν .

Observação 21 *Segue de (3) e (6), onde tomamos uma parametrização especial \mathbf{x} para M , que o plano tangente limitante a \mathcal{F} em $FC(q)$, que é o plano por $FC(q)$ ortogonal a $\nu(q)$, é paralelo ao plano gerado por $N(q)$ e $\mathbf{x}_\nu(q)$. Além disso, λ dada em (5) é a função densidade de área e, se q é um ponto singular não degenerado de FC e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma parametrização para a curva singular, então $\eta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dado por $\eta(t) = (a(t), 0)$ é um campo anulador de vetores ao longo de γ , para alguma função suave $a : I \rightarrow \mathbb{R}$, já que $FC_u(\gamma(t)) = 0, \forall t \in I$, ou seja, $(1, 0)$ é sempre uma direção nula. Ainda mais, obtemos:*

$$\gamma'_b = u'FC_u + \nu'FC_\nu = \nu'FC_\nu.$$

Logo, a rib é singular em t_0 se, e somente se, $\nu'(t_0) = 0$.

Concluimos a seguinte consequência do Teorema 12, onde usamos que o conjunto singular de FC é dado por (4), $\kappa_1 - \kappa_2 \neq 0$ e $\kappa_1 \neq 0$ em U , pois M não contém pontos umbílicos nem parabólicos, por hipótese. Assim, como a função densidade de área λ muda de sinal quando cruza a curva singular, então $(\kappa_1)_u$ e K_ψ também mudam.

Corolário 22 *Genericamente, temos:*

- (a) *A curvatura Gaussiana K_{FC} diverge para o infinito em pontos singulares, tendo sinais opostos em cada lado da curva singular.*
- (b) *A curvatura Gaussiana K_{FC} muda de sinal ao passar por uma curva parabólica de \mathcal{F} .*

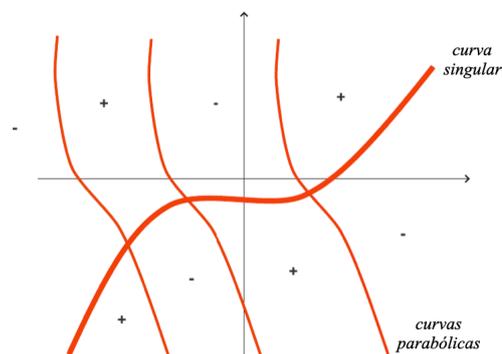


Figura 4: Partição de U segundo o sinal da curvatura Gaussiana de \mathcal{F}_1 (Corolário 22).

3.5 Caracterizações geométricas para as singularidades da superfície focal

Vimos no Teorema 6 os modelos para a superfície focal de superfícies regulares genéricas, sem pontos parabólicos, em termos das singularidades da função distância ao quadrado. Veremos nesta seção caracterizações geométricas para essas singularidades.

Proposição 23 ([7], p. 191) *Sejam M uma superfície genérica sem pontos parabólicos e umbílicos, e $q \in \Sigma$. O ponto $FC(q)$ é uma cuspidal edge se, e somente se, a curva ridge é transversal em $\mathbf{x}(q)$ à linha de curvatura de mesma cor. O ponto $FC(q)$ é um rabo de andorinha se, e somente se, a curva ridge e a linha de curvatura de mesma cor são tangentes em $\mathbf{x}(q)$.*

Demonstração: Seja $q = \gamma(t_0)$, com $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ a curva singular. Podemos supor que \mathbf{x} é uma parametrização especial para M e, assim, $\mathbf{x}_u(q)$ é direção tangente à linha de curvatura vermelha e o campo de vetores constante $\eta(t) = (1, 0)$ é um campo anulador de vetores (conforme Observação 21). Portanto, o resultado segue usando a Observação 18, que diz que q é cuspidal edge se, e somente se, os vetores $\gamma'_d(t_0)$ e $\mathbf{x}_u(q)$ são linearmente independentes ou, equivalentemente, $v'(t_0) \neq 0$, uma vez que $\gamma'_d(t_0) = d\mathbf{x}_q(u'(t_0), v'(t_0))$, $\mathbf{x}_u(q) = d\mathbf{x}_q(1, 0)$ e \mathbf{x} é uma imersão. Sendo a superfície genérica sem pontos umbílicos, então segue também o resultado para quando $FC(q)$ for rabo de andorinha. \square

Observação 24 *Segue da Observação 21 e da demonstração da proposição anterior que a rib γ_b é singular em t_0 se, e somente se, $\gamma(t_0)$ é um rabo de andorinha. Assim, a curva rib consistindo de arestas cuspidais é uma curva regular.*

Usando os resultados vistos até agora, em especial os Teoremas 2 e 6 e as Proposições 3 e 23, obtemos caracterizações geométricas para as singularidades genéricas da função distância ao quadrado sobre M em termos da superfície focal.

Teorema 25 ([5] p. 189) *Sejam M uma superfície genérica, \mathcal{F} sua superfície focal e $p = \mathbf{x}(q)$. Então as singularidades da função distância ao quadrado $d_{\mathbf{u}}$ em q são caracterizadas como segue:*

- $A_1 \Leftrightarrow \mathbf{u}$ pertence à reta normal a M em q , mas não à sua superfície focal \mathcal{F} .
- $A_2 \Leftrightarrow \mathbf{u} \in \mathcal{F}$, mas p não é um ponto de ridge.
- $A_3 \Leftrightarrow \mathbf{u} \in \mathcal{F}$, p é um ponto de ridge e a curva ridge é transversal à linha de curvatura de mesma cor por p .
- $A_4 \Leftrightarrow \mathbf{u} \in \mathcal{F}$, p pertence a uma curva ridge e a mesma tem tangência ordinária com a linha de curvatura de mesma cor por p .
- $D_4 \Leftrightarrow \mathbf{u} \in \mathcal{F}$ e p é um ponto umbílico.

3.6 Geometria da rib

Vamos estudar agora com mais detalhes a geometria da rib, quando a superfície focal \mathcal{F}_1 é uma cuspidal edge. Como a rib é uma curva composta por pontos singulares de FC , as curvaturas normal e geodésica não estão definidas. Porém, como temos bem definido um campo de vetores normais à FC , é possível definir funções curvatura para a rib que dão informações sobre a geometria da superfície focal. Essas funções foram definidas nos artigos [8] e [9] para cuspidal edges.

Recorde que $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_b = FC \circ \gamma$ e $\gamma_d = \mathbf{x} \circ \gamma$ são parametrizações para a curva singular, rib e ridge, respectivamente. Continuaremos supondo que M não contém pontos umbílicos nem parabólicos e que a curva singular é formada apenas de cuspidal edges, que são pontos singulares não degenerados, isto é $(\lambda_u, \lambda_v) \neq 0$ para todo ponto sobre a curva singular, onde λ é a função densidade de área de FC .

Seja η um campo anulador de vetores ao longo de γ tal que $\{\gamma'(t), \eta(t)\}$ seja uma base positivamente orientada ao longo da curva singular. Em [9] os autores definem:

$$\kappa_v(t) := \frac{\langle \gamma_b''(t), \nu(t) \rangle}{\|\gamma_b'(t)\|^2} \quad \text{e} \quad \kappa_s(t) := \text{sgn}(d\lambda_{\gamma(t)}(\eta(t))) \frac{\langle \gamma_b''(t), \nu(t) \times \gamma_b'(t) \rangle}{\|\gamma_b'(t)\|^3}$$

sobre a curva singular de uma frente de onda consistindo de cuspidal edges, chamadas de **curvatura normal limitante** e **curvatura singular** de γ_b , respectivamente. Essas definições aplicam-se, portanto, para a rib γ_b . Em [9], p. 497, prova-se que a definição de curvatura singular não depende da escolha de ν (ao contrário de κ_v), nem da orientação da curva singular. Além disso, os autores provam que κ_s é um invariante intrínseco. Note que, a menos de sinal, a expressão para κ_s coincide com a curvatura geodésica de uma curva sobre uma superfície regular.

Observamos que Morris, em [6], define essas curvaturas, porém desconsidera o sinal para a curvatura singular κ_s . Aqui optamos por definir κ_s com sinal, pois ele tem uma importante interpretação geométrica. Por exemplo, as cuspidal edges dadas na Figura 3, esquerda para a direita possuem curvatura singular nula, positiva e negativa, respectivamente.

Em [8] os autores definem outras três funções curvatura para cuspidal edges, que apresentaremos a seguir.

Tomando um sistema adaptado de coordenadas $(U; u, v)$ na vizinhança de $(0, 0)$, que é um ponto singular de FC (recorde que pontos singulares de cuspidal edges são não degenerados do primeiro tipo), temos $\gamma(t) = (u(t), 0)$, com $u(t)$ uma função suave que podemos supor crescente. Nesse caso, temos o campo anulador de vetores $\eta(u, 0) = (0, e(t))$, onde $e(t) > 0$, uma vez que $\{\gamma'(t), \eta(t)\}$ é uma base positiva para \mathbb{R}^2 . Logo, $dFC_{(u,0)}(\eta(u, 0)) = e(u)FC_v(u, 0)$, concluindo assim que $FC_v(u, 0) = 0$. Assim, $\gamma_b' = u'FC_u$ e $\gamma_b'' = u'^2FC_{uu} + u''FC_u$. Além disso, $\text{sgn}(d\lambda_{\gamma(t)}(\eta(t))) = \text{sgn}(\lambda_v(t))$. Portanto, nesse sistema de coordenadas, podemos reescrever a curvatura singular como:

$$\kappa_s = \text{sgn}(\lambda_v) \frac{\langle FC_{uu}, \nu \times FC_u \rangle}{\|FC_u\|^3} = \text{sgn}(\lambda_v) \frac{\det(FC_u, FC_{uu}, \nu)}{\|FC_u\|^3}.$$

Note que, como $FC_v(u, 0) = 0$, então existe uma função suave $h : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$FC_v(u, v) = vh(u, v)$$

em uma vizinhança de $(0, 0)$. Além disso, FC_u e h são linearmente independentes e $\{FC_u, h, \nu\}$, com $\nu = \frac{FC_u \times h}{\|FC_u \times h\|}$ sendo a aplicação de Gauss de FC , forma uma base de \mathbb{R}^3 em todos os pontos de U . Considerando o sistema adaptado de coordenadas, definimos:

$$\begin{aligned}\kappa_c(u) &= \frac{\|FC_u\|^{\frac{3}{2}} \det(FC_u, h, FC_{vvv})(u, 0)}{\|FC_u \times h\|}, \\ \kappa_t(u) &= \left(\frac{\det(FC_u, h, FC_{uvv})}{\|FC_u \times h\|^2} - \frac{\det(FC_u, h, FC_{uu}) \langle FC_u, h \rangle}{\|FC_u\|^2 \|FC_u \times h\|^2} \right) (u, 0), \\ \kappa_i(u) &= \frac{\det(FC_u, h, FC_{uuu})}{\|FC_u\|^3 \|FC_u \times h\|} (u, 0) - 3 \frac{\langle FC_u, FC_{uu} \rangle \det(FC_u, h, FC_{uu})}{\|FC_u\|^5 \|FC_u \times h\|} (u, 0),\end{aligned}$$

chamados **curvatura cuspidal**, **torção curvatura** e **curvatura inflexional** da rib, respectivamente. Para definições em um sistema qualquer de coordenadas para \mathbb{R}^2 , ver [8].

A dissertação de mestrado [16] é voltada ao estudo da geometria de cuspidal edges e apresenta com detalhes as interpretações geométricas dos cinco invariantes que definimos. Assim, iremos omitir aqui suas interpretações, as quais podem ser consultadas no Capítulo 5 de [16], que é um bom texto em português para consulta. Por exemplo, é mostrado que o sinal da curvatura geodésica está relacionado com a posição do plano retificante da rib com relação à superfície focal. Já o sinal da curvatura normal relaciona-se com o plano tangente limitante nos pontos da rib, sendo que $\kappa_v(t) = 0$ se, e somente se, o plano osculador da rib em $FC(\gamma(t))$ coincide com o plano tangente limitante da superfície focal naquele ponto. Já a curvatura cuspidal está relacionada com a “abertura” da curva cúspide obtida ao intersectar a cuspidal edge com o plano que passa por um ponto da rib perpendicularmente a seu vetor tangente.

Podemos concluir que o estudo da geometria da superfície focal na vizinhança de pontos que são cuspidal edges apresentado por Porteous em [5], Morris em [6], e outros autores que já citamos, pode ser enriquecido ao considerar a teoria sobre frentes de onda. Quando o ponto singular da folha focal é um rabo de andorinha, podemos ainda considerar a teoria de frentes de ondas já amplamente desenvolvida.

3.7 Sobre umbílicos

Podemos notar na Figura 2 que, por um ponto umbílico $p = \mathbf{x}(q)$, podem passar uma (quando p é singularidade D_4^+) ou três curvas ridges (quando p é singularidade D_4^-), isto é, em uma singularidade D_4 da superfície focal, podem passar uma ou três curvas singulares. O conjunto dessas curvas que passam por $q \in U$ é dada, a menos de difeomorfismos, por $uv(u - v) = 0$, se $FC(q)$ é uma singularidade D_4^- e $u = 0$, se $FC(q)$ é D_4^+ (conforme [7], p.192).

Porteous, em [5], mostrou que ridges podem ou não mudar de cor quando passam por um ponto umbílico. Em umbílicos D_4^- , onde passam três ridges, existem duas configurações possíveis, uma onde todas as ridges trocam de cor e outra onde todas as cores se mantêm ao passar pelo ponto umbílico.

4 Conjunto focal de superfícies singulares

Nas seções anteriores tratamos do conjunto focal de superfícies regulares e vimos que seu estudo fornece novas propriedades geométricas para a superfície. Podemos então perguntar sobre estudos similares para o conjunto focal de superfícies singulares, uma vez que podemos considerar o contato destas superfícies com esferas, de modo análogo ao feito no caso regular, em que conjunto focal surgiu quando lidamos com as singularidades da aplicação de contato, que é a função distância ao quadrado. Em [17], os autores estudam a geometria de superfícies com singularidades de posto 1

em \mathbb{R}^3 , definindo seu conjunto focal em $p \in M$ como sendo o conjunto dos pontos que são centros de esferas com contato degenerado com M em p , ou seja, pontos $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ tais que a função distância ao quadrado $d_{\mathbf{u}}$ tem uma singularidade degenerada em p . É mostrado que, dependendo do tipo de singularidade de posto 1, o conjunto focal em p pode ser: uma cônica (elipse, parábola ou hipérbole); união de duas retas transversais, intersectando em pontos especiais (centros de curvatura definidos como no caso regular, porém considerando a curvatura umbílica no lugar das curvaturas principais, a qual é definida em [17], e não entraremos em detalhes aqui); uma reta ou união de duas retas paralelas, como também um plano, em casos mais degenerados. Guarda-chuvas de Whitney, ou cross-caps, como são mais conhecidos, que são germes de superfícies singulares \mathcal{A} -equivalentes à (u, v^2, uv) , são amplamente estudados na literatura (Figura 5). West, em sua tese de doutorado [18], estudou as singularidades da função distância ao quadrado de cross-caps e investigou seu conjunto focal.

Frentes de onda em \mathbb{R}^3 constituem uma classe de superfícies com singularidades. Genericamente, frentes de onda são cuspidal edges e rabos de andorinha. Seus pontos singulares são não degenerados, do 1o. e 2o. tipos, respectivamente. Outros exemplos de frentes de onda são: borboletas cuspidais (\mathcal{A} -equivalentes à $(u, 5v^4 + 2uv, 4v^5 + uv^2)$ em $(0, 0)$, sendo singularidade não degenerada do 2o. tipo), lábios e bicos cupidais (\mathcal{A} -equivalentes à $(u, v^3 \pm u^2v, 3v^4 \pm 2u^2v^2)$ em $(0, 0)$, sendo singularidades degeneradas) e D_4^\pm (\mathcal{A} -equivalentes à $(uv, u^2 \pm 3v^2, u^2v \pm v^3)$ em $(0, 0)$, sendo singularidades degeneradas de posto 0) (ver Figura 5).

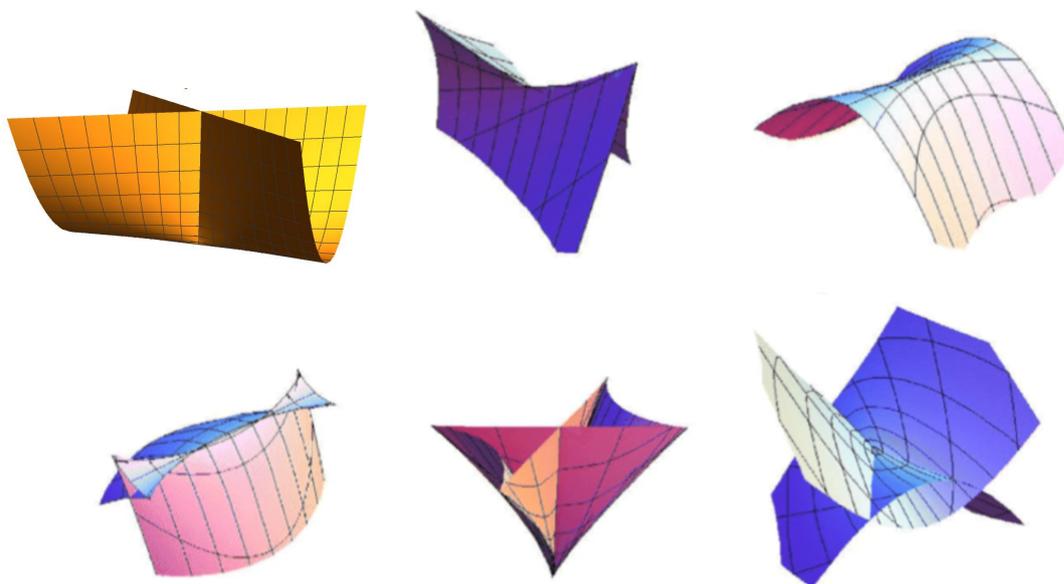


Figura 5: Cima, da esquerda para direita: cross-cap, borboleta e lábios cuspidais. Baixo, da esquerda para direita: bicos cuspidais, D_4^+ e D_4^- .

Ao estudar superfícies focais de frentes de onda, espera-se encontrar novas propriedades geométricas para as frentes. No recente artigo [11], Teramoto caracteriza as singularidades das superfícies focais de frentes em termos de propriedades geométricas da superfície focal e dos invariantes geométricos da frente inicial. Vamos expor nesta seção os principais resultados sobre superfícies focais de frentes de onda apresentados em [11].

4.1 Mais sobre frentes de onda

Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma frente com $q \in U$ uma singularidade não degenerada do primeiro tipo. Consideremos um sistema adaptado de coordenadas para \mathbb{R}^2 . Assim, $f_v(u, 0) = 0$, para u suficientemente pequeno e, portanto, existe uma função suave $h : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f_v(u, v) = vh(u, v)$ em U . Além disso, f_u e h são linearmente independentes e $\{f_u, h, v\}$, com $v = \frac{f_u \times h}{|f_u \times h|}$, forma uma base de \mathbb{R}^3 em todos os pontos de U . Dadas as condições acima, definimos as seguintes funções:

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= \|f_u\|^2, & \tilde{F} &= \langle f_u, h \rangle, & \tilde{G} &= \|h\|^2 \\ \tilde{L} &= -\langle v_u, f_u \rangle, & \tilde{M} &= -\langle v_u, h \rangle, & \tilde{N} &= -\langle v_v, h \rangle. \end{aligned} \quad (9)$$

Quando q for uma singularidade não degenerada do segundo tipo, considerando um sistema adaptado de coordenadas, temos que $f_u(u, 0) + \varepsilon(u)f_v(u, 0) = 0$, para u suficientemente pequeno. Logo, existe uma função $h : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f_u(u, v) + \varepsilon(u)f_v(u, v) = vh(u, v)$. Nesse caso, $\{h, f_v, v\}$, com $v = \frac{h \times f_v}{|h \times f_v|}$, forma uma base de \mathbb{R}^3 em todos os pontos de U e obtemos as funções:

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \|h\|^2, & \hat{F} &= \langle h, f_v \rangle, & \hat{G} &= \|f_v\|^2 \\ \hat{L} &= -\langle h, v_u \rangle, & \hat{M} &= -\langle h, v_v \rangle, & \hat{N} &= -\langle f_v, v_v \rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

Com essas funções dadas em (9) e (10), Teramoto mostrou em [11] que uma das curvaturas principais (definidas nos pontos regulares) é limitada perto da singularidade, enquanto a outra é não limitada. Denotando por κ_1 e κ_2 as curvaturas principais e seguindo a notação de [11], vamos supor que κ_2 é a curvatura limitada, denotando-a simplesmente por κ . Seja $\hat{\kappa} = \lambda\kappa_1$, onde λ é a função densidade de área. As funções κ e $\hat{\kappa}$ podem ser estendidas como funções suaves sobre U , sendo que $\hat{\kappa}$ não se anula em U ([12], p. 546). No que segue, sempre que falarmos em κ e $\hat{\kappa}$, estaremos já considerando suas extensões em U . Além disso, os vetores principais das curvaturas principais κ (supondo não nula) e $\hat{\kappa}$ são, respectivamente, dados por

$$V = (\tilde{N} - v\kappa\tilde{G}, -\tilde{M} + \kappa\tilde{F}) \quad \text{e} \quad \hat{V} = (v(\lambda\tilde{M} - \hat{\kappa}\tilde{F}), -\lambda\tilde{L} + \hat{\kappa}\tilde{E}),$$

para singularidades do primeiro tipo e, para singularidade do segundo tipo, é apresentado apenas o vetor principal para a curvatura limitada κ :

$$V = (-\hat{M} + \kappa\hat{F}, \hat{L} - \kappa(v\hat{E} - \varepsilon(u)\hat{F})).$$

Mostra-se que estes vetores estão bem definidos em U .

4.2 Superfície focal

Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma frente e $q \in U$ um ponto singular não degenerado de f . Usaremos todas as notações estabelecidas nas seções anteriores. Assumiremos que $(U; u, v)$ é um sistema adaptado de coordenadas e, além disso, que $\lambda_v(u, 0) > 0$.

Considere a aplicação $\mathfrak{F} : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$\mathfrak{F}(u, v, w) = f(u, v) + wv(u, v).$$

É fácil mostrar que, no caso de superfícies regulares, o conjunto focal coincide com a imagem do conjunto singular de \mathfrak{F} . Para frentes de onda, a mesma abordagem é tomada em [11,12] e a explicitaremos a seguir.

Por cálculos diretos, o determinante Jacobiano de \mathfrak{F} é dado por

$$\det(\mathfrak{F}_u, \mathfrak{F}_v, \mathfrak{F}_w) = (1 - w\kappa)(\lambda - w\hat{\kappa}),$$

onde $\hat{\kappa}$ é uma função suave em U que não se anula sobre o eixo- u . Dessa maneira, o conjunto singular de \mathfrak{F} é dado por $\Sigma(\mathfrak{F}) = S_1(\mathfrak{F}) \cup S_2(\mathfrak{F})$, com

$$S_1(\mathfrak{F}) = \{(u, v, w); w = 1/\kappa(u, v)\} \text{ e } S_2(\mathfrak{F}) = \{(u, v, w); w = \lambda(u, v)/\hat{\kappa}(u, v)\}.$$

A imagem de $\Sigma(\mathfrak{F})$ por \mathfrak{F} são, portanto, duas superfícies que podem ser parametrizadas por

$$FC(u, v) = f(u, v) + \frac{1}{\kappa(u, v)}\nu(u, v) \text{ e } \widehat{FC}(u, v) = f(u, v) + \frac{\lambda(u, v)}{\hat{\kappa}(u, v)}\nu(u, v),$$

respectivamente. FC e \widehat{FC} são chamadas de **superfícies focais** de f , cada uma delas chamada de **folha**.

Note que, considerando pontos regulares (u, v) de f em que $\kappa(u, v)$ é não nula, $FC(u, v)$ pertence à folha associada a κ do conjunto focal de superfícies regulares. Além disso, FC não está definida nos pontos q em que $\kappa(q) = 0$, chamados **pontos parabólicos** da frente. Por outro lado, mesmo que $\kappa_1(q) = 0$, $\widehat{FC}(q)$ está sempre bem definida, pois $\hat{\kappa} = \lambda\kappa_1$ não se anula em U .

4.3 Singularidades de FC e \widehat{FC}

Nesta subseção, suporemos que q é não parabólico com respeito a κ (isto é, $\kappa(q) \neq 0$) e vamos considerar relações entre as singularidades de FC e \widehat{FC} e propriedades geométricas de f em p .

Pontos de ridge podem ser definidos de maneira similar à Definição 7, porém considerando como pontos em U . Ou seja, dizemos que $q \in U$ é um **ponto de ridge** de f (com respeito a κ) quando $V\kappa(q) = 0$. Dizemos que q é um ponto de ridge de **ordem** k se $V^{(m)}\kappa(q) = 0$, $1 \leq m \leq k$, e $V^{(k+1)}\kappa(q) \neq 0$, onde $V^{(m)}\kappa$ denota a m -ésima derivada direcional de κ com respeito a V . Chamaremos o conjunto dos pontos de ridge de **curva ridge** de f .

Os pontos de ridge são importantes para o estudo da superfície focal FC . Veremos que pontos de ridge são pontos singulares da superfície focal, assim como ocorre no caso regular.

Teorema 26 ([11], p. 434) *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma frente e $q \in U$ um ponto singular não degenerado de f . As seguintes afirmações são válidas:*

- (a) FC é uma superfície regular em q se, e somente se, q não é um ponto de ridge de f .
- (b) FC é uma cuspidal edge em q se, e somente se, q é um ponto de ridge de primeira ordem de f .
- (c) FC é um rabo de andorinha em q se, e somente se, q é um ponto de ridge de segunda ordem de f e a curva ridge passando por q é uma curva regular.

Exemplo 27 Consideremos a cuspidal edge dada por $f(u, v) = (u, \frac{v^2}{2}, \frac{u^2+v^3}{2})$. Podemos mostrar que $\kappa(\mathbf{0}) = 1$, $V\kappa(\mathbf{0}) = 0$ e $VV\kappa(\mathbf{0}) = -27/4$. Logo, a origem é um ponto de ridge de ordem 1 de f e, pelo Teorema 26, FC é uma cuspidal edge. As superfícies f e FC estão representadas na Figura 6.

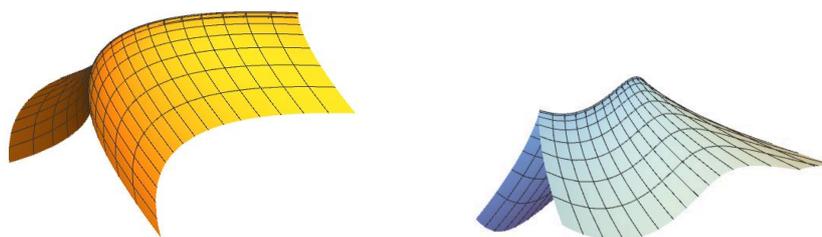


Figura 6: Superfície f (esquerda) do Exemplo 27 e sua superfície focal FC (direita).

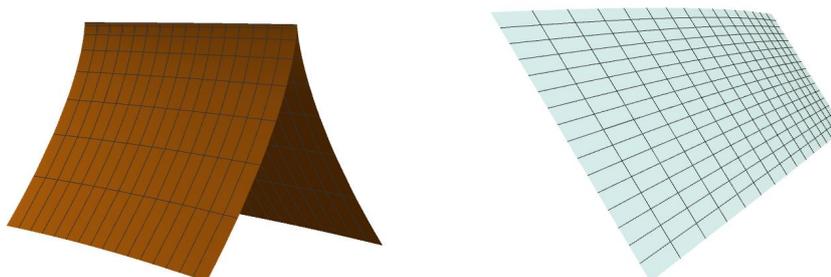


Figura 7: Superfície f (esquerda) do Exemplo 28 e sua superfície focal FC (direita).

Exemplo 28 Seja $f(u, v) = (u, \frac{v^2}{2}, \frac{u^2+u^3+v^3}{2})$. Então f é uma cuspidal edge e, além disso, $\kappa(\mathbf{0}) = 1$ e $V\kappa(\mathbf{0}) = \frac{9}{2}$. Logo, a origem não é um ponto de ridge de f e, pelo Teorema 26, FC é uma superfície regular. As superfícies f e FC estão representadas na Figura 7.

Vamos considerar agora a superfície \widehat{FC} relativa a curvatura principal não limitada κ_1 , onde consideramos sua extensão $\hat{\kappa} = \lambda\kappa_1$ a U . Mais precisamente, vamos supor que f é uma cuspidal edge em q e estudar a geometria de \widehat{FC} , que veremos ser uma superfície regular. Denotando por ν o campo unitário de vetores normais de f , recorde que o plano tangente limitante de f em $f(q)$ é o plano por $f(q)$ perpendicular à $\nu(q)$.

Proposição 29 ([11], p. 435) *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ um frente tal que $q \in \Sigma(f)$ uma cuspidal edge. A superfície focal \widehat{FC} de f é uma superfície regular em q . Além disso, o plano tangente limitante de f em $f(q)$ e o plano tangente limitante de \widehat{FC} em $\widehat{FC}(p)$ se intesectam ortogonalmente.*

Dizemos que a curva singular $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$ é uma **linha de curvatura** se o vetor principal V for tangente à curva singular γ . É conhecido ([12], Proposição 3.3]) que $\hat{\gamma}$ é uma linha de curvatura de f se, e somente se, sua torsão cuspidal se anula ao longo de γ . Neste caso, temos o seguinte resultado

Proposição 30 ([11], p. 437) *Seja f uma frente e q um ponto de cuspidal edge. Se $\hat{\gamma} = f \circ \gamma$ é uma linha de curvatura de f , então $\widehat{FC} \circ \gamma$ é uma linha de curvatura de \widehat{FC} .*

A proposição acima dá uma característica única para arestas cuspidais, uma vez que, para superfícies regulares, linhas de curvatura em f em geral não são linhas de curvaturas em seus conjuntos focais.

Como, pela Proposição 29, a superfície focal \widehat{FC} é regular, é possível calcular suas curvaturas Gaussiana e média sobre a curva $\widehat{FC} \circ \gamma$.



Teorema 31 ([11], p. 435) *As curvaturas Gaussiana $K_{\widehat{FC}}$ e média $H_{\widehat{FC}}$ da superfície focal \widehat{FC} sobre a curva $\widehat{FC} \circ \gamma$ são dadas por*

$$K_{\widehat{FC}} = -\frac{1}{4}(4\kappa_t^2 + \kappa_s \kappa_c^2) \text{ e } H_{\widehat{FC}} = \pm \frac{1}{8}(\kappa_c^2 - 4\kappa_s),$$

onde o sinal \pm em $H_{\widehat{FC}}$ depende da orientação do campo de vetores unitários normal a \widehat{FC} .

Assim como no caso de pontos de ridge, a definição de pontos sub-parabólicos para frentes de onda é dada de maneira análoga ao caso regular. Ou seja, dizemos que $q \in U$ é um **ponto sub-parabólico** (com respeito a curvatura limitada $\kappa = \kappa_2$) de f quando $V\kappa(q) = 0$, onde V é direção principal associada a κ_1 .

Teramoto mostrou em [11] (Proposição 2.8) que, quando $q \in \Sigma(f)$ é um ponto de cuspidal edge da frente f , então q é um ponto subparabólico de f se, e somente se, $4\kappa_t^2 + \kappa_s \kappa_c^2 = 0$ em q . Do teorema acima e desse resultado, segue o seguinte corolário, que é uma propriedade similar ao caso para superfícies regulares, obtido por Morris ([6]).

Corolário 32 ([11], p. 436) *Seja f uma frente e $q \in \Sigma$ um ponto de cuspidal edge. A curvatura Gaussiana de \widehat{FC} se anula em p se, e somente se, p é um ponto sub-parabólico de f com respeito a curvatura principal limitada.*

Expomos acima os principais resultados encontrados na literatura para a superfície focal \widehat{FC} , os quais consideram apenas o caso em que f é uma aresta cuspidal. O caso em que f é uma singularidade do segundo tipo é um problema em aberto.

5 Referências Bibliográficas

- [1] BRUCE, J. W.; GIBLIN, P. J.; TARI, F. Ridges, crests and sub-parabolic lines of evolving surfaces. **International Journal of Computer Vision**, v. 18, n. 3, p. 195-210, 1996.
- [2] GORDON, A. P.; THIRION, J.-P. The marching lines algorithm: new results and proofs. [S. l.]: INRIA, 1993. (Rapport de Recherche, n. 1881). Disponível em: <https://hal.inria.fr/inria-00074792>. Acesso em: 30 jun. 2022.
- [3] THIRION, J. -P. New feature points based on geometric invariants for 3D image registration. **International Journal of Computer Vision**, v. 18, n. 2, p. 121-137, 1996.
- [4] PORTEOUS, I. R. The normal singularities of a submanifold. **Journal Differential Geometry**, n. 5, p. 543-564, 1971.
- [5] PORTEOUS, I. R. **Geometric differentiation**. New York: Cambridge University Press, 2001.
- [6] MORRIS, R. The sub-parabolic lines of a surface. In: MULLINEUX, G. (ed.) **The mathematics of surfaces VI**. New York: Oxford University Press, 1996. p. 79-102, (The Institute of Mathematics & Its Applications Conference Series, new series 58).
- [7] IZUMIYA, S. *et al.* **Differential geometry from a singularity theory viewpoint**. Singapore: World Scientific, [2016].



- [8] MARTINS, L. F.; SAJI, K. Geometric invariants of cuspidal edges. **Canadian Journal of Mathematics**, v. 68, n. 2, p. 445-462, 2016.
- [9] SAJI, K.; UMEHARA, M.; YAMADA, K. The geometry of fronts. **Annals of Mathematics**, v. 169, n. 2, p. 491-529, 2009.
- [10] BRUCE, J. W.; WILKINSON, T. C. Folding maps and focal sets. *In*: MOND, D.; MONTALDI, J. (ed.). **Singularity theory and its applications**. Berlin; New York: Springer-Verlag, c1991. p. 63-72. (Lectures Notes in Mathematics, 1462).
- [11] TERAMOTO, K. Focal surfaces of wave fronts in the Euclidean 3-space. **Glasgow Mathematical Journal**, v. 61, n. 2, p. 425-440, 2019.
- [12] TERAMOTO, K. Principal curvatures and parallel surfaces of wave fronts. **Advances in Geometry**, v. 19, n. 4, p. 541-554, 2019.
- [13] SANTOS, S. P. **Geometria diferencial do conjunto focal**. 2018. 90 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto, 2018.
- [14] MOND, D.; NUÑO-BALLESTEROS, J. J. **Singularities of mappings: the local behaviour of smooth and complex analytic mappings**. Cham: Springer, 2020.
- [15] PORTEOUS, I. R. The normal singularities of a surface in \mathbb{R}^3 . *In*: ORLIK, P. (ed). **Singularities**. Providence: AMS, 1983. v. 40, part 2, p. 379-393 (Proceedings of Symposia Pure Mathematics). Disponível em: <https://www.ams.org/books/pspum/040.2/> Acesso em: 30 jun. 2022.
- [16] PANICHE, B. G. **Geometria diferencial da cuspidal edge**. 2021. 98 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto, 2021.
- [17] MARTINS, L. F.; NUÑO-BALLESTEROS, J. J. Contact properties of surfaces in \mathbb{R}^3 with corank 1 singularities. **Tohoku Mathematical Journal**, v. 67, n. 1, p. 105-124, 2015.
- [18] WEST, J. M. **The differential geometry of the cross-cap**. 1995. Thesis (Ph. D.) - University of Liverspool, Liverpool, 1995.