Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 19, dez. 2020
Edição Iniciação Científica

Um breve estudo sobre espaços metrizáveis: de Urysohn, Nagata e Smirnov

A brief study on metrizable spaces: by Urysohn, Nagata and Smirnov

Alef Alves Fidelis
Faculdade de Matemática
UFU - Universidade Federal de Uberlândia
alef.fidelis222530@gmail.com

Francielle Rodrigues de Castro Coelho
Faculdade de Matemática
UFU - Universidade Federal de Uberlândia
francielle@ufu.br

Resumo

Este trabalho consiste em um estudo sobre Espaços Topológicos, em particular Espaços Topológicos Metrizáveis, cuja topologia é induzida por uma métrica. O foco principal do artigo é apresentação da demonstração de três resultados clássicos da Topologia, a saber Teorema de Metrização de Urysohn, o Teorema de Metrização de Nagata-Smirnov, e o Teorema de Metrização de Smirnov, que nos fornecem condições necessárias e/ou suficientes para que um espaço topológico seja metrizável. Para o entendimento do artigo são apresentados os pré-requisitos necessários em Topologia Geral.

Palavras-chave: Espaços Metrizáveis. Lema de Urysohn. Teorema de Metrização de Urysohn. Teorema de Metrização de Nagata-Smirnov. Teorema de Metrização de Smirnov.

Abstract

This work consists of a study on Topological Spaces, in particular Metrizable Topological Spaces, whose topology is induced by a metric. The main focus of the article is the presentation of the demonstration of three classic results of Topology, namely Urysohn Metrization Theorem, Nagata-Smirnov Metrization Theorem, and Smirnov Metrization Theorem, which provide us with necessary and/or sufficient conditions for a topological space to be metrizable. To understand the article, the necessary prerequisites in General Topology are presented.

Keywords: Metrizable Spaces. Urysohn Lemma. Urysohn Metrization Theorem. Nagata-Smirnov Metrization Theorem. Smirnov Metrization Theorem.

Artigo recebido em maio 2020 e aceito em set. 2020

1 Introdução

Os assuntos abordados em Topologia são bastante interessantes, além de servirem como base para estudos em outras áreas, como por exemplo, em Análise, em Geometria e em Topologia Algébrica. A Topologia é uma área da Matemática que se preocupa, dentre outras coisas, com o estudo da generalização dos conceitos de distância e continuidade.

O principal objeto de estudo da Topologia são os espaços topológicos. Neste trabalho estaremos interessados na classificação desses espaços topológicos em relação aos axiomas de separação, axiomas de enumerabilidade e a conceitos como paracompacidade e metrizabilidade. Para isto, utilizaremos como fonte principal para nossa pesquisa a referência [1].

Neste artigo, introduziremos conceitos e resultados relevantes de Topologia Geral, os quais serão fundamentais para o objetivo principal que é realizar um estudo detalhado em espaços topológicos que são metrizáveis apresentando importantes resultados sobre este assunto, a saber, o Teorema de Metrização de Urysohn (Teorema 51), o Teorema de Metrização de Nagata-Smirnov (Teorema 67) e o Teorema de Metrização de Smirnov (Teorema 73).

É importante ressaltar que a escolha do tema para se trabalhar neste artigo se deu principalmente pelo fato de que praticamente não existem artigos em língua portuguesa que exploram este tema.

Este artigo é baseado em parte do projeto de iniciação científica desenvolvido pelo aluno Alef Alves Fidelis, sob orientação da Profa. Dra. Francielle R. de Castro Coelho, através do Programa de Educação Tutorial.

2 Noções topológicas básicas

Nesta seção apresentamos a definição de espaços topológicos e alguns resultados básicos.

2.1 Espaços topológicos

Definição 1 *Uma topologia em um conjunto X não vazio é uma coleção $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X tais que:*

(i) O conjunto vazio $\emptyset$ e o conjunto todo X pertencem à $\mathcal{T}$;

(ii) A união dos elementos de qualquer subcoleção de $\mathcal{T}$ pertence à $\mathcal{T}$;

(iii) A interseção dos elementos de qualquer subcoleção finita de $\mathcal{T}$ pertence à $\mathcal{T}$.

O par ordenado $(X, \mathcal{T})$, onde X é um conjunto não vazio e $\mathcal{T}$ é uma topologia em X, é chamado de espaço topológico. Se X é um espaço topológico com uma topologia $\mathcal{T}$, um subconjunto $U \subseteq X$ é um conjunto aberto de X se $U \in \mathcal{T}$.

Exemplo 2 *A coleção de todos os subconjuntos de X é uma topologia em X e é chamada de topologia discreta.*

Exemplo 3 *A coleção formada somente pelo conjunto vazio $\emptyset$ e o conjunto todo X também é uma topologia em X e é chamada de topologia trivial.*

Definição 4 *Suponha que $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ sejam duas topologias no conjunto X. Se $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, dizemos que $\mathcal{T}'$ é mais fina que $\mathcal{T}$; se $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ dizemos que $\mathcal{T}'$ é estritamente mais fina que $\mathcal{T}$.*

Definição 5 *Seja X um espaço topológico com topologia $\mathcal{T}$. Se Y é um subconjunto de X, a coleção*

$$\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U|\ U \in \mathcal{T}\}$$

é uma topologia em Y chamada de topologia do subespaço. Com essa topologia, Y é chamado de subespaço topológico de X.

2.2 Base para uma topologia

Definição 6 *Se X é um conjunto, uma base para uma topologia em X é uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X (chamados elementos básicos) tal que*

(i) Para cada $x \in X$, existe pelo menos um elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$;

(ii) Se x pertence à interseção de dois elementos básicos B_1 e B_2, então existe um elemento básico B_3 contendo x, de modo que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Observação 7 *Se $\mathcal{B}$ é uma base para uma topologia em X, então definimos uma topologia $\mathcal{T}$ gerada por $\mathcal{B}$ da forma: $U \in \mathcal{T}$ se para cada $x \in U$ existir um elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$. Note que, cada elemento básico é um elemento de $\mathcal{T}$.*

Exemplo 8 *Se X é um conjunto qualquer, a coleção de todos os subconjuntos unitários de X é uma base para a topologia discreta em X.*

Lema 9 *Sejam X um conjunto e $\mathcal{B} = \{B_\alpha|\ \alpha \in J\}$, com J um conjunto de índices, uma base para alguma topologia $\mathcal{T}$ em X. Então, $\mathcal{T}$ é igual à coleção de todas as uniões possíveis de elementos de $\mathcal{B}$, isto é, $\mathcal{T} = \left\{\bigcup_\alpha B_\alpha|\ B_\alpha \in \mathcal{B}\right\}$, com $\alpha \in I \subset J$.*

Demonstração. Seja $\bigcup_\alpha B_\alpha \in \left\{\bigcup_\alpha B_\alpha|\ B_\alpha \in \mathcal{B}\right\}$. Cada $B_\alpha \in \mathcal{B}$ e assim, $B_\alpha \in \mathcal{T}$. Como $\mathcal{T}$ é uma topologia, segue que $\bigcup_\alpha B_\alpha \in \mathcal{T}$.

Reciprocamente, tome $U \in \mathcal{T}$, escolha para cada $x \in U$ um elemento básico B_x de $\mathcal{B}$ de modo que $x \in B_x \subseteq U$. Então

$$U = \bigcup_{x \in U} B_x,$$

ou seja, U é igual a uma união de elementos de $\mathcal{B}$. ∎

Quando as topologias são dadas por bases, é útil haver um critério em termos das bases para determinar quando uma topologia é mais fina que outra. Podemos utilizar o seguinte critério:

Lema 10 *Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases para as topologias $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ em X, respectivamente. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $\mathcal{T}'$ é mais fina que $\mathcal{T}$;

(ii) Para cada $x \in X$ e para cada elemento básico $B \in \mathcal{B}$ contendo x, existe um elemento básico $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subseteq B$.

Demonstração. Mostremos primeiro que (ii) implica (i). Tome um elemento U de $\mathcal{T}$, queremos mostrar que $U \in \mathcal{T}'$. Seja $x \in U$. Como $\mathcal{B}$ é base de $\mathcal{T}$, existe um elemento $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$. A hipótese nos diz que existe um elemento $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subseteq B$, então $x \in B' \subseteq U$. Logo $U \in \mathcal{T}'$.

Agora, mostremos que (i) implica (ii). Sejam $x \in X$ e $B \in \mathcal{B}$, com $x \in B$. Como B pertence à $\mathcal{T}$ por definição, e $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ por hipótese, segue que $B \in \mathcal{T}'$. Assim, existe um elemento $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subseteq B$. ■

Exemplo 11 *Se $\mathcal{B}$ for a coleção de todos os intervalos abertos da reta real, $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} |\ a < x < b,\ a < b\}$, a topologia gerada por $\mathcal{B}$ é chamada de topologia usual da reta real; se tivermos agora $\mathcal{B}'$ sendo a coleção de todos os intervalos semiabertos da forma $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} |\ a \leq x < b,\ a < b\}$, a topologia gerada por $\mathcal{B}'$ é chamada de topologia do limite inferior da reta real. E além disso, a topologia do limite inferior é estritamente mais fina que a topologia usual em $\mathbb{R}$.*

Definição 12 *Uma sub-base $\mathcal{S}$ para uma topologia em X é uma coleção de subconjuntos de X cuja união é igual à X. A topologia gerada pela sub-base $\mathcal{S}$ é definida como a coleção $\mathcal{T}$ da união de todas as interseções finitas de elementos de $\mathcal{S}$.*

2.3 Conjuntos fechados, fecho e interior de um conjunto, pontos de acumulação

Definição 13 *Um subconjunto A do espaço topológico X é dito fechado se o conjunto $X - A$ for aberto.*

Exemplo 14 *O subconjunto $[a,b]$ da reta real é fechado, pois o seu complementar $\mathbb{R} - [a,b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ é aberto.*

Exemplo 15 *Seja X um conjunto. Na topologia discreta em X, qualquer subconjunto é aberto e fechado.*

Definição 16 *Seja A um subconjunto de um espaço topológico X. O interior de A é a união de todos os conjuntos abertos contidos em A; e o fecho de A é a interseção de todos os conjuntos fechados que contém A.*

O interior de A será denotado por $int A$ e o fecho de A será denotado por $\overline{A}$. Segue que o $int A$ é um conjunto aberto e o $\overline{A}$ é um conjunto fechado. Além disso,

$$int A \subset A \subset \overline{A}.$$

Teorema 17 *Seja A um subconjunto de um espaço topológico X.*

(i) $x \in \overline{A}$ se, e somente se, todo conjunto aberto U que contém x intercepta A;

(ii) Supondo que a topologia de X é dada por uma base, então $x \in \overline{A}$ se, e somente se, todo elemento básico B que contém x intercepta A.

Demonstração. Provar (i) é equivalente a provar: $x \notin \overline{A}$ se, e somente, existe um conjunto aberto U contendo x que não intercepta A. Desta forma, se x não pertence a $\overline{A}$, o conjunto $U = X - \overline{A}$ é um conjunto aberto contendo x que não intercepta A, como desejado. Reciprocamente, se existe um conjunto U contendo x que não intercepta A, então $X - U$ é um conjunto fechado contendo A. Por definição do fecho de A, o conjunto $X - U$ contém $\overline{A}$, portanto, x não pertence à $\overline{A}$.

Agora provemos (ii). Seja $x \in \overline{A}$. Por (i), todo conjunto aberto contendo x intercepta A. Logo, todo elemento básico B contendo x intercepta A, pois B é um conjunto aberto. Reciprocamente, se todo elemento básico B contendo x intercepta A, o mesmo acontece para todo conjunto aberto U contendo x, porque U contém um elemento básico que contém x. ■

Observação 18 *Algumas vezes, ao invés de dizermos "U é um conjunto aberto contendo x" podemos simplesmente dizer "U é uma vizinhança de x".*

Definição 19 *Sejam A um subconjunto do espaço topológico X e x um ponto de X. Dizemos que x é um ponto de acumulação de A se toda vizinhança de x intercepta A em algum ponto diferente de x, ou seja, $(V - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$, para toda vizinhança V de x.*

Seja A um subconjunto do espaço X. Denotaremos por $A^{'}$ o conjunto de todos os pontos de acumulação de A.

Teorema 20 *Seja A um subconjunto de um espaço topológico X. Então, $\overline{A} = A^{'} \cup A$.*

Demonstração. Se x está em $A^{'}$, toda vizinhança de x intercepta A em um ponto diferente de x. Portanto, pelo Teorema 17, $x \in \overline{A}$. Consequentemente, $A^{'} \subset \overline{A}$. Já que, por definição, $A \subset \overline{A}$, segue que $A^{'} \cup A \subset \overline{A}$.

Para apresentar que $\overline{A} \subset A^{'} \cup A$, tomemos $x \in \overline{A}$ e mostremos que $x \in A^{'} \cup A$. Se $x \in A$, é trivial ver que $x \in A^{'} \cup A$. Suponha que $x \neq A$. Já que $x \in \overline{A}$, sabemos que toda vizinhança U de x intercepta A. Como $x \notin A$, o conjunto U intercepta A em um ponto diferente de x. Então, $x \in A^{'}$ e segue que $x \in A^{'} \cup A$, como desejado. ■

2.4 Funções contínuas e homeomorfismo

Definição 21 *Sejam X e Y espaços topológicos. A função $f : X \longrightarrow Y$ é dita contínua se para todo subconjunto aberto V de Y, o conjunto $f^{-1}(V) = \{x \in X | \, f(x) \in V\}$ for um subconjunto aberto em X.*

Observação 22 *Seja $\mathcal{B}$ uma base para o conjunto Y Então, para provar a continuidade de f é suficiente mostrar que $f^{-1}(B)$ é aberto em X, para todo $B \in \mathcal{B}$.*

Observação 23 *Seja $\mathcal{S}$ uma sub-base para o conjunto Y. Então, para provar a continuidade de f é suficiente mostrar que $f^{-1}(S)$ é aberto em X, para todo $S \in \mathcal{S}$.*

Lema 24 *Sejam X e Y espaços topológicos, e $f : X \longrightarrow Y$. Se, para todo $x \in X$ e para toda vizinhança V de $f(x)$, existir uma vizinhança U de x tal que $f(U) \subset V$, então f é contínua.*

Demonstração. Sejam V um conjunto aberto de Y e $x \in f^{-1}(V)$. Então, $f(x) \in V$. Por hipótese, existe uma vizinhança U_x de x tal que $f(U_x) \subset V$. Assim, $U_x \subset f^{-1}(V)$ e daí, $x \in U_x \subset f^{-1}(V)$. Portanto, $f^{-1}(V)$ é aberto em X. ■

Lema 25 *Se $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ forem contínuas, então a composição $g \circ f$ será contínua.*

Demonstração. Se U é um conjunto aberto de Z, então $g^{-1}(U)$ será um conjunto aberto em Y e $f^{-1}(g^{-1}(U))$ será um conjunto aberto em X. Mas, $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$. Logo, a função composta é contínua. ■

Definição 26 *Sejam X e Y espaços topológicos. Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma bijeção. Se ambas as funções f e f^{-1} forem contínuas, então f é chamada de homeomorfismo.*

Observação 27 *Sejam $f : X \longrightarrow Y$ um homeomorfismo e A um subconjunto de X. Então, A é aberto em X se, e somente se, $f(A)$ é aberto em Y.*

Definição 28 *Suponha que $f : X \longrightarrow Y$ seja uma função contínua injetora, onde X e Y são espaços topológicos. Seja Z o conjunto imagem $f(X)$, considerado um subespaço de Y. Se a função bijetora $f^{'} : X \longrightarrow Z$ (obtida por restringir o contradomínio de f) for um homeomorfismo de X em Z, dizemos que f é um mergulho topológico, ou simplesmente mergulho, de X em Y.*

3 As topologias produto e métrica

3.1 Topologia produto

Definição 29 *Seja J um conjunto de índices. Suponha que X é um conjunto. Definimos uma J-upla de elementos de X como uma função $x : J \longrightarrow X$. Se α é um elemento de J, podemos denotar o valor de x em α como x_α ao invés de $x(\alpha)$; chamaremos isto da $\alpha^{\underline{o}}$ coordenada de x. Denotamos a função x propriamente pelo símbolo $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$.*

Definição 30 *Sejam $\{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ uma família de conjuntos e $X = \bigcup\limits_{\alpha \in J} A_\alpha$. O produto cartesiano desta família é denotado por*

$$\prod_{\alpha \in J} A_\alpha,$$

que é definido como o conjunto de todas as J-uplas $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ de elementos de X tal que $x_\alpha \in A_\alpha$, para todo $\alpha \in J$. Isto é, é o conjunto de todas as funções

$$x : J \longrightarrow \bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha$$

tal que $x(\alpha) \in A_\alpha$, para todo $\alpha \in J$.

Comumente denotaremos o produto cartesiano simplesmente por $\prod A_\alpha$, e seus elementos por (x_α), caso o conjunto de índices já esteja subentendido. Além disso, se todos os conjuntos A_α forem iguais ao conjunto X, então o produto cartesiano $\prod A_\alpha$ é o conjunto X^J.

Exemplo 31 *Seja J um conjunto de índices qualquer e tome $A_\alpha = \mathbb{R}$, para todo $\alpha \in J$. O produto cartesiano $\prod\limits_{\alpha \in J} A_\alpha$ é representado por $\mathbb{R}^J$. Em particular, se $J = \mathbb{Z}_+$, então o produto cartesiano $\prod\limits_{\alpha \in \mathbb{Z}_+} A_\alpha$ é representado por $\mathbb{R}^\omega$.*

Agora, seja

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha \in J} X_\alpha \longrightarrow X_\beta$$

uma função atribuindo para cada elemento do espaço produto sua $\beta^{\underline{o}}$ coordenada,

$$\pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in J}) = x_\beta,$$

com X_α sendo um espaço topológico, para todo $\alpha \in J$. Esta função é chamada de projeção na $\beta^{\underline{o}}$ coordenada.

Observação 32 *Note que o conjunto* $\mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) |\ U_\beta$ *é aberto em* $X_\beta\}$ *é uma sub-base para uma topologia em* $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$. *De fato, o conjunto* $\mathcal{S}_\beta$ *é uma coleção de subconjuntos desse produto cartesiano. Além disso, é verdade que*

$$\bigcup_{U_\beta \in X_\beta} \pi_\beta^{-1}(U_\beta) = \pi_\beta^{-1}\left(\bigcup_{U_\beta \in X_\beta} U_\beta\right),$$

e como $\bigcup_{U_\beta \in X_\beta} U_\beta = X_\beta$, *segue que* $\bigcup_{U_\beta \in X_\beta} \pi_\beta^{-1}(U_\beta) = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$.

Definição 33 *Sejam*

$$\mathcal{S}_\beta = \{\pi_\beta^{-1}(U_\beta) |\ U_\beta \text{ é aberto em } X_\beta\} \ \text{ e } \ \mathcal{S} = \bigcup_{\beta \in J} \mathcal{S}_\beta.$$

A topologia gerada pela sub-base $\mathcal{S}$ *é chamada de topologia produto.*

A topologia produto em $\prod X_\alpha$ tem como base todos os conjuntos da forma $\prod U_\alpha$, onde U_α é aberto em X_α, para cada α, e $U_\alpha = X_\alpha$, exceto para uma quantidade finita de α's.

Teorema 34 *Seja* $f : A \longrightarrow \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ *dada pela equação*

$$f(a) = (f_\alpha(a))_{\alpha \in J},$$

onde $f_\alpha : A \longrightarrow X_\alpha$, *para todo* $\alpha \in J$. *Seja* $\prod X_\alpha$ *com a topologia produto. Então, a função* f *é contínua se, e somente se, cada* f_α *for contínua.*

Demonstração. Seja π_β a projeção do produto em seu $\beta^{\underline{o}}$ fator. A função π_β é contínua, pois se U_β é um conjunto aberto em X_β, o conjunto $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ é um elemento sub-básico para a topologia produto em $\prod X_\alpha$. Agora, suponha que $f : A \longrightarrow \prod X_\alpha$ é contínua. A função f_β é igual a composta $\pi_\beta \circ f$; sendo a composição de duas funções contínuas, ela também será contínua.

Reciprocamente, suponha que cada função coordenada f_α seja contínua. Para provar que f é contínua, é suficiente mostrar que a imagem inversa de f de cada elemento sub-básico é aberto em A (pois os abertos de $\prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ são uniões de interseções finitas de elementos sub-básicos). Um típico elemento sub-básico para a topologia produto $\prod X_\alpha$ é um conjunto da forma $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$, onde β é algum índice e U_β é aberto em X_β. Agora,

$$f^{-1}(\pi_\beta^{-1}(U_\beta)) = f_\beta^{-1}(U_\beta),$$

porque $f_\beta^{-1} = \pi_\beta \circ f$. Como f_β é contínua, tal conjunto é aberto em A, como queríamos. ∎

3.2 Topologia métrica

Definição 35 *Uma métrica em um conjunto X é uma função*

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

tendo as seguintes propriedades:

(i) $d(x, y) \geq 0$, *para todos* $x, y \in X$*; a igualdade se dá se, e somente se,* $x = y$*;*

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$, *para todos* $x, y \in X$*;*

(iii) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$, *para todos* $x, y, z \in X$.

Considere uma métrica d em X, o número $d(x, y)$ é chamado de distância entre x e y na métrica d. Tome $\varepsilon > 0$, considere o conjunto

$$B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X | \ d(x, y) < \varepsilon\}$$

de todos os pontos y tal que a distância de x à y é menor que ε. Este conjunto é chamado de ε-bola centrada em x.

Definição 36 *Se d for uma métrica em um conjunto X, então a coleção de todas as ε-bolas $B_d(x, \varepsilon)$, para $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, formam uma base para uma topologia em X, chamada de topologia métrica induzida por d.*

Exemplo 37 *Tome um conjunto X qualquer. Defina uma função $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ da forma*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & se \ x \neq y, \\ 0, & se \ x = y. \end{cases}$$

É fácil ver que d é uma métrica (chamada de métrica zero-um) e a topologia induzida por d é a topologia discreta. Neste caso, $B_d(x, 1) = \{x\}$, para todo $x \in X$.

Definição 38 *Seja $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico. Dizemos que X é metrizável se existe uma métrica d definida em X tal que a topologia induzida por d é $\mathcal{T}$. É claro que todo espaço métrico é um espaço topológico metrizável.*

Teorema 39 *Seja X um espaço métrico com métrica d. Defina $\overline{d} : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ pela equação*

$$\overline{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}.$$

Então, $\overline{d}$ é uma métrica que induz a mesma topologia que d. A métrica $\overline{d}$ é chamada de métrica usual limitada correspondente à d.

Demonstração. *(i)* Vamos provar a primeira condição para $\overline{d}$ ser uma métrica. Já que d é uma métrica, temos que para todo $x, y \in X$, $\overline{d}(x, y)$ será sempre um número maior ou igual à zero, sendo zero somente quando $x = y$.

(ii) Para provar a segunda condição para $\overline{d}$ ser uma métrica, utilizamos o fato de d ser métrica para mostrar que $\overline{d}(x, y) = \overline{d}(y, x)$, para $x, y \in X$.

(iii) Vamos verificar agora a desigualdade triangular:

$$\overline{d}(x,z) \leq \overline{d}(x,y) + \overline{d}(y,z), \text{ para todos } x,y,z \in X.$$

Suponhamos que $d(x,y) \geq 1$ ou $d(y,z) \geq 1$. Então, $\overline{d}(x,y) = \min\{d(x,y),1\} = 1$ ou $\overline{d}(y,z) = \min\{d(y,z),1\} = 1$. Assim,

$$\overline{d}(x,y) + \overline{d}(y,z) \geq 1.$$

Por outro lado, $\overline{d}(x,z) = \min\{d(x,z),1\} \leq 1$. Logo,

$$\overline{d}(x,z) \leq \overline{d}(x,y) + \overline{d}(y,z).$$

Agora, suponhamos que $d(x,y) < 1$ e $d(y,z) < 1$. Daí,

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = \overline{d}(x,y) + \overline{d}(y,z).$$

Logo,

$$\overline{d}(x,z) = \min\{d(x,z),1\} \leq d(x,z) \leq \overline{d}(x,y) + \overline{d}(y,z).$$

Agora, notemos que em qualquer espaço métrico a coleção de ε-bolas com $\varepsilon < 1$ forma uma base para a topologia métrica, pois todo elemento básico contendo x contém uma ε-bola centrada em x. Logo, d e $\overline{d}$ induz a mesma topologia em X, pois as coleções de ε-bolas com $\varepsilon < 1$ sob estas duas métricas são as mesmas. ■

Agora definiremos uma métrica em $\mathbb{R}^J$, chamada de métrica uniforme.

Definição 40 *Sejam J um conjunto de índices, $x = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$ e $y = (y_\alpha)_{\alpha \in J}$ pontos de $\mathbb{R}^J$. Defina uma métrica $\overline{\rho}$ em $\mathbb{R}^J$ da seguinte maneira*

$$\overline{\rho}(x,y) = \sup\{\overline{d}(x_\alpha, y_\alpha) \mid \alpha \in J\},$$

onde $\overline{d}$ é a métrica definida no Teorema 39. Dizemos que $\overline{\rho}$ é chamada de métrica uniforme em $\mathbb{R}^J$ e a topologia que ela induz é chamada topologia uniforme.

Lema 41 *A topologia uniforme em $\mathbb{R}^J$ é mais fina que a topologia produto.*

Demonstração. Suponhamos que $x = (x_\alpha)_{\alpha \in J} \in \mathbb{R}^J$ e $\prod U_\alpha$ é um elemento básico da topologia produto que contém x. Seja $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ índices para os quais $U_\alpha \neq \mathbb{R}$. Então, para i, escolhemos $\varepsilon_i > 0$ tal que a ε_i-bola centrada em x_{α_i} esteja contida em U_{α_i}, na métrica $\overline{d}_i$. Isto é possível porque U_{α_i} é aberto em $\mathbb{R}$. Seja $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$. Então, a ε-bola centrada em x está contida em $\prod U_\alpha$, na métrica $\overline{\rho}$ (pois se z é um ponto de $\mathbb{R}^J$ tal que $\overline{\rho}(x,z) < \varepsilon$, então $\overline{d}(x_\alpha, y_\alpha) < \varepsilon$ para todo α, e assim, $z \in \prod U_\alpha$). Logo, a topologia uniforme é mais fina que a topologia produto. ■

No caso onde J é infinito, $\mathbb{R}^J$ só é metrizável se J for enumerável e se, em $\mathbb{R}^J$, a topologia é a topologia produto.

Teorema 42 *Seja $\overline{d}(a,b) = \min\{|a-b|,\ 1\}$ a métrica usual limitada em $\mathbb{R}$. Se x e y forem dois pontos de $\mathbb{R}^\omega$, definimos*

$$D(x,y) = \sup\left\{\frac{\overline{d}(x_i,y_i)}{i}\right\}.$$

Então, D é uma métrica que induz a topologia produto em $\mathbb{R}^\omega$.

Demonstração. As propriedades de uma métrica são satisfeitas trivialmente, exceto a desigualdade triangular, a qual é provada percebendo que, para todo i,

$$\frac{\overline{d}(x_i, z_i)}{i} \leq \frac{\overline{d}(x_i, y_i)}{i} + \frac{\overline{d}(y_i, z_i)}{i} \leq D(x, y) + D(y, z),$$

e assim,

$$\sup \left\{ \frac{\overline{d}(x_i, z_i)}{i} \right\} \leq D(x, y) + D(y, z).$$

O fato que D induz a topologia requer um pouco mais de trabalho. Primeiro, sejam U um aberto na topologia métrica e $x \in U$. Encontraremos um conjunto aberto V na topologia produto tal que $x \in V \subset U$. Escolha uma ε-bola tal que $B_D(x, \varepsilon) \subset U$. Então, escolha N tão grande quanto quiser, de modo que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Finalmente, seja V o seguinte elemento da topologia produto,

$$V = (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \times \cdots \times (x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$$

Afirmamos que $V \subset B_D(x, \varepsilon)$. Para ver isto, tome $y \in \mathbb{R}^\omega$. Então,

$$\frac{\overline{d}(x_i, y_i)}{i} \leq \frac{1}{N}, \text{ para } i \geq N.$$

Portanto,

$$D(x, y) \leq \max \left\{ \frac{\overline{d}(x_1, y_1)}{1}, \cdots, \frac{\overline{d}(x_N, y_N)}{N}, \frac{1}{N} \right\}.$$

Se $y \in V$, esta expressão é menor que ε. Logo, $V \subset B_D(x, \varepsilon)$, como queríamos.

Reciprocamente, considere o elemento básico

$$U = \prod_{i \in \mathbb{Z}_+} U_i$$

da topologia produto, onde U_i é aberto em $\mathbb{R}$, para $i = \alpha_1, \cdots, \alpha_n$, e $U_i = \mathbb{R}$ para todos os outros índices i. Tome $x \in U$. Vamos encontrar um conjunto aberto V da topologia métrica, tal que $x \in V \subset U$. Escolha um intervalo $(x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i)$ em $\mathbb{R}$ centrado em x_i e contido em U_i, para cada $i = \alpha_1, \cdots, \alpha_n$, com cada $\varepsilon_i \leq 1$. Então, definimos

$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{\varepsilon_i}{i} \,\middle|\, i = \alpha_1, \cdots, \alpha_n \right\}.$$

Afirmamos que $x \in B_D(x, \varepsilon) \subset U$. Seja $y \in B_D(x, \varepsilon)$. Então, para todo i,

$$\frac{\overline{d}(x_i, y_i)}{i} \leq D(x, y) < \varepsilon.$$

Agora, se $i = \alpha_1, \cdots, \alpha_n$, então, $\varepsilon \leq \frac{\varepsilon_i}{i}$. Logo, $\overline{d}(x_i, y_i) < \varepsilon_i \leq 1$, e $|x_i - y_i| < \varepsilon_i$. Portanto, $y \in U$, como queríamos. ∎

4 Os axiomas de enumerabilidade e separação

4.1 Axiomas de enumerabilidade

Definição 43 *Dizemos que um espaço topológico X tem uma base enumerável sobre x se existir uma coleção $\mathcal{B}$ enumerável de vizinhanças de x tal que cada vizinhança de x contém pelo menos um dos elementos de $\mathcal{B}$. Dizemos que um espaço X que possui uma base enumerável para cada um de seus pontos satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.*

Definição 44 *Dizemos que um espaço topológico X satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade se X possui uma base enumerável para a sua topologia.*

Observação 45 *Temos que o segundo axioma de enumerabilidade implica o primeiro, pois se $\mathcal{B}$ é uma base enumerável da topologia em X, então a subcoleção de $\mathcal{B}$ consistindo dos elementos básicos contendo x é uma base enumerável de x.*

Observação 46 *$\mathbb{R}^\omega$, com a topologia uniforme, satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade pois, basta tomar como base enumerável sobre x a coleção $\mathcal{B}_x = \left\{B_{\overline{\rho}}\left(x, \frac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$. Mas não satisfaz o segundo. De fato, mostremos primeiro que se X é um espaço que possui uma base enumerável $\mathcal{B}$, então qualquer subespaço discreto A de X deve ser enumerável. Escolha, para cada $a \in A$, um elemento básico B_a tal que $B_a \cap A = \{a\}$. Se a e b são pontos distintos de A, então $B_a \neq B_b$, pois $a \in B_a$ e $a \neq B_b$. Assim, a relação $a \longmapsto B_a$ é um injeção de A em $\mathcal{B}$ e portanto, A deve ser enumerável. Agora, note que o subespaço A de $\mathbb{R}^\omega$ consistindo de todas as sequências que contém somente zeros e uns como elementos é não enumerável. Além disso, A tem a topologia discreta pois $\overline{\rho}(a, b) = 1$, para quaisquer $a \neq b$. Portanto, na topologia uniforme, $\mathbb{R}^\omega$ não possui uma base enumerável.*

4.2 Axiomas de separação

Definição 47 *Seja X um espaço topológico, e suponha que conjuntos unitários são fechados em X.*

(a) Dizemos que X é um espaço Hausdorff se, para todos $x, y \in X$ com $x \neq y$, existem vizinhanças U e V de x e y, respectivamente, tais que $U \cap V = \emptyset$.

(b) Dizemos que X é um espaço regular se, para $x \in X$ e um conjunto fechado $B \subset X$ com $x \notin B$, existem conjuntos abertos disjuntos contendo x e B, respectivamente.

(c) Dizemos que X é um espaço normal se, para cada par A, B de conjuntos fechados disjuntos de X, existem conjuntos abertos disjuntos contendo A e B, respectivamente.

Seja X um espaço topológico em que $\{x\}$ é fechado, para todo $x \in X$. É fácil ver que, se X é regular, então X é Hausdorff e se X é normal, então X é regular. O axioma de normalidade é mais forte que o axioma de regularidade que é mais forte que o axioma Hausdorff. Caso retiremos a condição de que todo conjunto unitário $\{x\}$ de X é fechado, nada garante que um espaço regular é Hausdorff ou que um espaço normal é regular.

Observação 48 *Vale ressaltar que em um espaço metrizável X, conjuntos unitários são fechados e, além disso, X é normal, regular e Hausdorff.*

Lema 49 *Seja X um espaço topológico. Consideremos, em X, que conjuntos unitários são fechados.*

(a) X é regular se, e somente se, dado um ponto x de X e uma vizinhança U de x, existir uma vizinhança V de x tal que $\overline{V} \subset U$;

(b) X é normal se, e somente se, dado um conjunto fechado A e um conjunto aberto U contendo A, existir um conjunto aberto V contendo A tal que $\overline{V} \subset U$.

Demonstração. *(a)* Suponhamos que X é regular, $x \in X$ e U seja uma vizinhança de x. Seja $B = X - U$. Então, B é um conjunto fechado tal que $x \notin B$. Por hipótese, existem conjuntos abertos disjuntos V e W contendo x e B, respectivamente. Observe que, $\overline{V} \cap B = \emptyset$ pois se $y \in B$, temos que W é uma vizinhança de y disjunta de V e daí, $y \notin \overline{V}$. Portanto, $\overline{V} \subset U$, como desejado.

Reciprocamente, suponhamos que $x \in X$ e B é um conjunto fechado tal que $x \notin B$. Seja $U = X - B$. Temos que $x \in U$ e assim, existe uma vizinhança V de x tal que $\overline{V} \subset U$. Logo, os conjuntos V e $X - \overline{V}$ são abertos e disjuntos contendo x e B, respectivamente.

(b) Suponhamos que X é normal, A é um conjunto fechado e U um aberto que contém A. Seja $B = X - U$. Então, B é um conjunto fechado disjunto de A. Por hipótese, existem conjuntos abertos disjuntos V e W contendo A e B, respectivamente. Observe que o conjunto $\overline{V}$ é disjunto de B, pois se $y \in B$, o conjunto W é uma vizinhança de y disjunta de V. Portanto, $\overline{V} \subset U$.

Agora, suponhamos que A e B são fechados disjuntos de X. Seja $U = X - B$. Por hipótese, existe um conjunto aberto V contendo A tal que $\overline{V} \subset U$. Os conjuntos V e $X - \overline{V}$ são abertos e disjuntos contendo A e B, respectivamente. Logo, X é normal. ■

5 O Lema de Urysohn

Apresentaremos nesta seção a demonstração de um dos teoremas mais belos da Topologia Geral, conhecido como Lema de Urysohn. Esse resultado é muito importante na demonstração do primeiro Teorema de Metrização que veremos neste trabalho, que é o Teorema de Metrização de Urysohn.

Teorema 50 *Seja X um espaço normal. Sejam A e B conjuntos fechados disjuntos de X, e $[a, b]$ um intervalo fechado da reta real. Então, existe uma função contínua*

$$f : X \longrightarrow [a, b]$$

tal que $f(x) = a$, para todo $x \in A$, e $f(x) = b$, para todo $x \in B$.

Demonstração. Precisamos considerar somente o caso onde o intervalo em questão é o intervalo $[0, 1]$. O caso geral segue do fato que $[0, 1]$ e $[a, b]$ são homeomorfos. O primeiro passo desta demonstração é construir, usando que X é normal, uma certa família U_p de conjuntos abertos de X indexada pelos números racionais. Usaremos esses conjuntos para definir a continuidade de f.

Passo 1: Seja P o conjunto de todos os números racionais do intervalo $[0, 1]$. Definiremos, para cada $p \in P$, um conjunto aberto U_p de X de modo que se $p < q$, teremos $\overline{U_p} \subset U_q$. Assim, os conjuntos U_p podem ser simplesmente ordenados pela inclusão, da mesma maneira que seus índices são ordenados pela ordem usual na reta real.

Como P é enumerável, podemos usar indução para definir os conjuntos U_p, ou melhor, pelo princípio da definição recursiva. Vamos organizar os elementos de P em uma sequência infinita e, por conveniência, suponhamos que os números 1 e 0 são os primeiros elementos desta sequência.

Defina os conjuntos U_p como segue. Primeiro, defina $U_1 = X - B$. Como A é um conjunto fechado contido no conjunto aberto U_1, pelo Lema 49, escolha um conjunto aberto U_0 tal que $A \subset U_0$ e $\overline{U}_0 \subset U_1$.

De modo geral, seja P_n o conjunto consistindo dos n primeiros números racionais da sequência anterior. Suponha que U_p é definido para todos os números racionais p pertencentes ao conjunto P_n, satisfazendo a condição

$$p < q \Longrightarrow \overline{U}_p \subset U_q. \tag{$*$}$$

Seja r o próximo número racional dessa sequência. Definiremos agora U_r.

Considere o conjunto $P_{n+1} = P_n \cup \{r\}$. Temos que P_{n+1} é um subconjunto finito do intervalo $[0, 1]$, e é ordenado com a ordem derivada da ordem usual $<$ da reta real. Em um conjunto finito ordenado, todo elemento, exceto o menor e o maior, tem um sucessor imediato e um antecessor imediato. Como o número 0 é o menor elemento e o 1 é o maior elemento do conjunto ordenado P_{n+1}, segue que r não é 0, nem 1. Logo, r tem um antecessor imediato p em P_{n+1} e um sucessor imediato q em P_{n+1}. Sabemos que U_p e U_q são tais que $\overline{U}_p \subset U_q$, pela hipótese de indução. Usando que X é normal, podemos encontrar um conjunto aberto U_r de X tal que

$$\overline{U}_p \subset U_r \text{ e } \overline{U}_r \subset U_q.$$

Mostremos agora que vale para todo par de elementos de P_{n+1}. Se ambos elementos estiverem em P_n, segue pela hipótese de indução que $(*)$ é válida. Agora, se um desses elementos for r e o outro for um ponto s de P_n, então, para $s \leq p$,

$$\overline{U}_s \subset \overline{U}_p \subset U_r,$$

ou para $s \geq q$,

$$\overline{U}_r \subset U_q \subset U_s.$$

Logo, para todo par de elementos de P_{n+1}, a relação $(*)$ é válida.

Passo 2: Agora que temos definido U_p para todos os números racionais p no intervalo $[0, 1]$, estenderemos esta definição para todos os números racionais p em $\mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} U_p &= \emptyset, \quad \text{se } p < 0 \\ U_p &= X, \quad \text{se } p > 1. \end{aligned}$$

Para todo par de números racionais p e q, $(*)$ se mantém. De fato, dados $p, q \in [0, 1]$, a implicação é verdadeira. Agora, se $p < 0$, temos que $\overline{U}_p = U_p = \emptyset$, e para qualquer valor de q, desde que $p < q$, $\overline{U}_p \subset U_q$. Por outro lado, se $q > 1$, então, $\overline{U}_p \subset X = U_q$, para $p < q$.

Parte 3: Tome um ponto x de X, defina $\mathbb{Q}(x)$ como sendo o conjunto dos números racionais p tais que $x \in U_p$, ou seja,

$$\mathbb{Q}(x) = \{p \in \mathbb{Q} |\, x \in U_p\}.$$

Temos que, para todo $x \in X$, $x \notin U_p$, para $p < 0$ e $x \in U_p$, para $p > 1$. Portanto, $\mathbb{Q}(x)$ é limitado inferiormente, e seu maior limitante inferior é um ponto do intervalo $[0, 1]$. Defina

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) = \inf\{p |\, x \in U_p\}.$$

Passo 4: Mostremos que f é a função desejada. Se $x \in A$, então $x \in U_p$ para todo $p \geq 0$. Assim, $\mathbb{Q}(x) = \{p \in \mathbb{Q} | \ p \geq 0\}$. Logo, $f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) = 0$. Analogamente, se $x \in B$, então $x \in U_p$, para nenhum $p \leq 1$. Daí, $\mathbb{Q}(x) = \{p \in \mathbb{Q} | \ p > 1\}$. Portanto, $f(x) = 1$.

Provemos que f é contínua. Para isso, vamos provar inicialmente as seguintes afirmações:

(a) $x \in \overline{U}_r \Longrightarrow f(x) \leq r$;

(b) $x \notin U_r \Longrightarrow f(x) \geq r$.

Para provar (a), observe que se $x \in \overline{U}_r$, então $x \in U_s$, para todo $s > r$. Portanto, todos os racionais maiores que r pertencem a $\mathbb{Q}(x)$. Logo, pela definição,

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \leq r.$$

Para provar (b), note que se $x \notin U_r$, então $x \neq U_s$, para todo $s < r$. Assim, qualquer número racional menor que r não pertence a $\mathbb{Q}(x)$. Logo,

$$f(x) = \inf \mathbb{Q}(x) \geq r.$$

Agora, para provar a continuidade de f, tome um ponto x_0 de X e um intervalo aberto $(c, d) \subset \mathbb{R}$ que contém $f(x_0)$. Queremos encontrar uma vizinhança U de x_0 tal que $f(U) \subset (c, d)$. Para isto, escolha números racionais p e q tais que

$$c < p < f(x_0) < q < d.$$

Afirmação: O conjunto aberto $U = U_q - \overline{U}_p$ é a vizinhança desejada de x_0.

Primeiro, vamos mostrar que $x_0 \in U$. Como $f(x_0) < q$, (b) implica que $x_0 \in U_q$, enquanto que pelo fato de $f(x_0) > p$, (a) acarreta que $x_0 \notin \overline{U}_p$.

Agora, provemos que $f(U) \subset (c, d)$. Seja $x \in U$. Então, $x \in U_q \subset \overline{U}_q$. Daí, $f(x) \leq q$ (por (a)) e $x \notin \overline{U}_p$, implica que $x \notin U_p$. Assim, $f(x) \geq p$ (por (b)). Logo, $f(x) \in [p, q] \subset (c, d)$. Portanto, f é contínua, como queríamos mostrar. ■

6 O Teorema de Metrização de Urysohn

Apresentaremos agora um importante Teorema de Metrização que nos fornece uma condição necessária (mas não suficiente) para que um espaço topológico seja metrizável.

Teorema 51 *Todo espaço regular X com uma base enumerável é metrizável.*

Demonstração. Provemos que X é metrizável mergulhando-o em um espaço metrizável Y, isto é, mostrando que X é homeomorfo a um subespaço de Y. Aqui apresentaremos duas versões da demonstração deste teorema, as quais diferem somente pela escolha do espaço metrizável Y. Na primeira versão, Y é o espaço $\mathbb{R}^\omega$ na topologia produto, um espaço que sabemos que é metrizável (Teorema 42). No segundo caso, o espaço Y também será $\mathbb{R}^\omega$, mas neste caso a topologia adotada será proveniente da métrica uniforme $\overline{\rho}$. Em cada caso, mergulharemos X no subespaço $[0, 1]^\omega$ de $\mathbb{R}^\omega$.

Passo 1: Provemos o seguinte: Existe uma coleção de funções contínuas $f_n : X \longrightarrow [0, 1]$ tendo a propriedade que dado qualquer ponto $x_0 \in X$ e qualquer vizinhança U de x_0, existe um índice n tal que f_n é positiva em x_0 e se anula fora de U.

Pelo Lema de Urysohn, dados x_0 e U, existe tal função. De qualquer modo, se escolhermos tal função para cada par (x_0, U), a coleção em geral é não enumerável. Vamos reduzir essa coleção para que fique enumerável. Façamos o seguinte:

Seja $\{B_n\}$ uma base enumerável para X. Para cada par n, m de índices onde $\overline{B}_n \subset B_m$, aplicamos o Lema de Urysohn para escolher uma função contínua $g_{n,m} : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $g_{n,m}(\overline{B}_n) = \{1\}$ e $g_{n,m}(X - B_m) = \{0\}$. Então, a coleção $\{g_{n,m}\}$ satisfaz o que desejamos. De fato, dados x_0 e uma vizinhança U de x_0, escolhemos um elemento básico B_m contendo x_0 tal que $B_m \subset U$. Usando que X é regular, tome B_n de modo que $x_0 \in B_n$ e $\overline{B}_n \subset B_m$. Então, n, m é o par de índices para o qual a função $g_{n,m}$ é definida, e é positiva em x_0 e se anula fora de U. Além disso, pelo fato da coleção $\{g_{n,m}\}$ ser indexada com um subconjunto de $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$, ela é enumerável. Portanto, pode ser reindexada com os inteiros positivos, o que nos dá a coleção desejada $\{f_n\}$.

Passo 2: (Primeira versão da demonstração) Dadas as funções f_n do Passo 1, tome $\mathbb{R}^\omega$ na topologia produto e defina a relação $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^\omega$ da forma

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots).$$

Afirmamos que F é um mergulho.

Primeiro, note que F é contínua pois $\mathbb{R}^\omega$ tem a topologia produto e cada f_n é contínua. Observe também que, F é injetora pois dados x e y de modo que $x \neq y$, sabemos que existe um índice n tal que $f_n(x) > 0$ e $f_n(y) = 0$. Logo, $F(x) \neq F(y)$.

Finalmente, basta mostrar que F é um homeomorfismo de X sobre sua imagem, o subespaço $Z = F(X)$ de $\mathbb{R}^\omega$. Sabemos que F define uma bijeção contínua de X com Z, precisamos mostrar somente que, para cada conjunto aberto U em X, o conjunto $F(U)$ é aberto em Z. Seja $z_0 \in F(U)$. Devemos encontrar um conjunto aberto W de Z tal que

$$z_0 \in W \subset F(U).$$

Seja $x_0 \in U$ tal que $F(x_0) = z_0$. Escolha um índice N para o qual $f_N(x_0) > 0$ e $f_N(X - U) = \{0\}$. Considere o intervalo aberto $(0, +\infty)$ em $\mathbb{R}$, e seja V o conjunto aberto

$$V = \pi_N^{-1}((0, +\infty))$$

de $\mathbb{R}^\omega$. Tome $W = V \cap Z$. Então, W é aberto em Z, pela definição de subespaço topológico.

Afirmação: $z_0 \in W \subset F(U)$.

Primeiro, $z_0 \in W$ pois $\pi_N(z_0) = \pi_N(F(x_0)) = f_N(x_0) > 0$. Agora, vamos verificar que $W \subset F(U)$. De fato, se $z \in W$, então $z = F(x)$ para algum $x \in X$, e $\pi_N(z) \in (0, +\infty)$. Como $\pi_N(z) = \pi_N(F(x)) = f_N(x)$ e f_N se anula fora de U, segue que $x \in U$. Assim, $z = F(x) \in F(U)$, como queríamos mostrar.

Logo, F é um mergulho de X em $\mathbb{R}^\omega$, e segue que X é metrizável.

Passo 3: (Segunda versão da demonstração) Nesta versão, mergulharemos X no espaço métrico $(\mathbb{R}^\omega, \overline{\rho})$. Na verdade, mergulharemos X no subespaço $[0, 1]^\omega$, no qual $\overline{\rho}$ é igual a métrica

$$\rho(x, y) = \sup\{|x_i - y_i|\}.$$

Usaremos a coleção enumerada de funções $f_n : X \longrightarrow [0, 1]$ construídas no Passo 1. Agora vamos impor a condição adicional que $f_n(x) \leq \dfrac{1}{n}$, para todo o x. Para isso, basta dividir cada função f_n por n.

Defina $F : X \longrightarrow [0, 1]^\omega$ pela equação

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots).$$

Afirmamos que F é um mergulho relativo à métrica ρ em $[0,1]^\omega$. Do Passo 2, temos que F é injetiva. Além disso, sabemos que se usarmos a topologia produto em $[0,1]^\omega$, F leva conjuntos abertos de X em conjuntos abertos do subespaço $Z = F(X)$. Como a topologia em $[0,1]^\omega$ induzida pela métrica é mais fina que a topologia produto em $[0,1]^\omega$, segue que F leva abertos de X em abertos de $Z = F(X)$ também. Falta provar que F é contínua. Isso não segue do fato que cada função componente é contínua, pois não estamos com a topologia produto em $\mathbb{R}^\omega$ agora. Por isso, colocamos a condição que $f_n(x) \leq \dfrac{1}{n}$.

Sejam $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$. Para provar a continuidade, precisamos encontrar uma vizinhança U de x_0 tal que

$$x \in U \Longrightarrow \rho(F(x), F(x_0)) < \varepsilon.$$

Primeiro tome N grande o suficiente de modo que $\dfrac{1}{N} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Então, para $n = 1, \ldots, N$, usamos a condição de f_n para escolher uma vizinhança U_n de x_0 tal que

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

para cada $x \in U_n$. Seja $U = U_1 \cap \ldots \cap U_N$. Mostremos que U é a vizinhança desejada de x_0. Para isto, considere $x \in U$. Se $n \leq N$,

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

pela escolha de U. E se $n > N$,

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{1}{N} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

pois de f_n aplica X em $\left[0, \dfrac{1}{n}\right]$. Logo, para todo $x \in U$,

$$\rho(F(x), F(x_0)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Portanto, X é metrizável. ■

O passo 2 da demonstração anterior sugere um resultado mais forte do que o que está enunciado lá, que é o seguinte Teorema de Mergulho. Além disso, este teorema será útil na apresentação da demonstração do Teorema de Metrização de Nagata-Smirnov (Teorema 67).

Teorema 52 *Seja X um espaço topológico onde conjuntos unitários são fechados. Suponha que $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ é uma família de funções contínuas $f_\alpha : X \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo que, para cada $x_0 \in X$ e cada vizinhança U de x_0, existe um índice α tal que f_α é positiva em x_0 e se anula fora de U. Então, a função $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^J$ dado por*

$$F(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}$$

é um mergulho de X em $\mathbb{R}^J$. Se f_α aplica X em $[0,1]^J$, para cada α, então F mergulha X em $[0,1]^J$.

Demonstração. Para provar que F é um mergulho de X em $\mathbb{R}^J$, basta mostrar que F é um homeomorfismo de X com o subespaço $Z = F(X)$ de $\mathbb{R}^J$.

Como $\mathbb{R}^J$ está dado na topologia produto, F é contínua (pelo Teorema 34). Além disso, F é injetiva, pois dados $x, y \in X$, com $x \neq y$, existe um índice β tal que $f_\beta(x) > 0$ e $f_\beta(y) = 0$. Além disso, restringindo o contradomínio a $Z = F(X)$, F é sobrejetiva.

Basta mostrar que dado um conjunto aberto U de X, $F(U)$ é aberto em Z. Sejam $z_0 \in F(U)$ e $x_0 \in U$ tal que $F(x_0) = z_0$. Escolha um índice β para o qual $f_\beta(x) > 0$ e $f_\beta(X - U) = \{0\}$. Considere o intervalo aberto $(0, +\infty) \subset \mathbb{R}$, e seja $V = \pi_\beta^{-1}((0, +\infty))$ aberto em $\mathbb{R}^J$. Seja $W = V \cap Z$. Então, W é aberto em Z, pela definição de subespaço topológico. Afirmamos que $z_0 \in W \subset F(U)$.

Primeiro, temos que $z_0 \in W$ pois $\pi_\beta(z_0) = \pi_\beta(F(x_0)) = f_\beta(x_0) > 0$.

Falta mostrar que $W \subset F(U)$. Com efeito, se $z \in W$, então $z = F(x)$, para algum $x \in X$ e $\pi_\beta(z) \in (0, +\infty)$. Como $\pi_\beta(z) = \pi_\beta(F(x)) = f_\beta(x)$ e f_β se anula fora de U, o ponto x deve pertencer a U. Então, $z = F(x) \in F(U)$, como queríamos mostrar.

Logo, F é um mergulho de X em $\mathbb{R}^J$. Analogamente, prova-se que se f_α aplica X em $[0, 1]^J$, para cada α, então F mergulha X em $[0, 1]^J$. ∎

7 Finitude local

Definição 53 *Seja X um espaço topológico. Definimos que uma coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X é localmente finita em X se todo ponto de X possui uma vizinhança que intercepta somente um número finito de elementos de $\mathcal{A}$.*

Exemplo 54 *A coleção de intervalos $\mathcal{A} = \{(n, n+2) |\ n \in \mathbb{Z}\}$ é localmente finita em $\mathbb{R}$ com a topologia usual.*

Lema 55 *Seja $\mathcal{A}$ uma coleção localmente finita de subconjuntos de X. Então:*

(a) Qualquer subcoleção de $\mathcal{A}$ é localmente finita;

(b) A coleção $\mathcal{B} = \{\overline{A}\}_{A \in \mathcal{A}}$ dos fechos dos elementos de $\mathcal{A}$ é localmente finita;

(c) $\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$.

Demonstração. *(a)* Seja $\mathcal{A}'$ uma subcoleção de $\mathcal{A}$. Suponha que $\mathcal{A}'$ não é localmente finita, ou seja, existe um ponto $x \in X$ tal que nenhuma vizinhança de x intercepta um número finito de elementos de $\mathcal{A}'$. Como $\mathcal{A}'$ é uma subcoleção de $\mathcal{A}$, então cada vizinhança de x intercepta no mínimo a mesma quantidade de elementos de $\mathcal{A}'$. Por suposição, nenhuma vizinhança de x intercepta um número finito de elementos de $\mathcal{A}'$, consequentemente nenhuma vizinhança intercepta um número finito de elementos de $\mathcal{A}$, ou seja, $\mathcal{A}$ não é localmente finita, o que é uma contradição. Portanto, qualquer subcoleção de $\mathcal{A}$ é localmente finita.

(b) Observe que, se U é um conjunto aberto tal que $U \cap \overline{A} \neq \emptyset$, então teremos que $U \cap A \neq \emptyset$. Portanto, se U é uma vizinhança de x que intercepta um número finito de elementos A de $\mathcal{A}$, então U pode interceptar no máximo o mesmo número de conjuntos da coleção $\mathcal{B}$ (pois se U interceptasse um número maior de conjuntos da coleção $\mathcal{B}$, digamos que $\overline{B}_1 \in \mathcal{B}$ fosse um desses, então $U \cap B_1 \neq \emptyset$, o que não pode ocorrer pois mudaria o número de conjuntos interceptados por U em $\mathcal{A}$). Note que, é possível interceptar menos conjuntos já que $\overline{A}_1$ e $\overline{A}_2$ podem ser iguais sem que A_1 e A_2 sejam.

(c) Seja Y a união dos elementos de $\mathcal{A}$:

$$Y = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

De modo geral, $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A} \subset \overline{Y}$. Temos que, $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} (A' \cup A) = \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A' \right) \cup \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \right)$. Seja, $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$. Então,

$$x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A' \text{ ou } x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Se $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A'$, então toda vizinhança de x intercepta A_α em um ponto diferente de x, para algum α. Portanto, toda vizinhança de x intercepta $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, para algum ponto diferente de x Assim, $x \in \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A' \right) \subset \overline{Y}$. Se $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, então $x \in Y$. Logo, $x \in \overline{Y}$.

Para provar que $\overline{Y} \subset \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$, lembremos que $\mathcal{A}$ é localmente finita. Sejam $x \in \overline{Y}$ e U uma vizinhança de x que intercepta somente um número finito de elementos de $\mathcal{A}$, digamos A_j com $j = 1, \ldots, k$. Afirmamos que x pertence à algum dos conjuntos $\overline{A}_j$ e assim, $x \in \bigcup \overline{A}$. Caso contrário, o conjunto $U - \bigcup_{j=1}^{k} \overline{A}_j$ deveria ser uma vizinhança de x que não intercepta elementos de $\mathcal{A}$. Daí, $U - \bigcup_{j=1}^{k} \overline{A}_j$ não intercepta Y, contrariando a hipótese que $x \in \overline{Y}$. ∎

Definição 56 *Dizemos que uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X é enumerável localmente finita se $\mathcal{B}$ pode ser escrito como a união enumerável de coleções $\mathcal{B}_n$, e cada uma delas é localmente finita.*

Definição 57 *Seja $\mathcal{A}$ uma coleção de subconjuntos do espaço X. Dizemos que uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X é um refinamento de $\mathcal{A}$ (ou ainda, refina $\mathcal{A}$) se para cada elemento $B \in \mathcal{B}$ existir um elemento $A \in \mathcal{A}$ contendo B. Se os elementos de $\mathcal{B}$ são conjuntos abertos, dizemos que $\mathcal{B}$ é um refinamento aberto de $\mathcal{A}$. Se os elementos de $\mathcal{B}$ são conjuntos fechados, dizemos que $\mathcal{B}$ é um refinamento fechado de $\mathcal{A}$.*

Para a apresentação da demonstração do próximo lema vamos relembrar a definição de conjunto bem ordenado e o Teorema da Boa Ordenação.

Definição 58 *Dizemos que um conjunto A com uma relação de ordem $<$ é bem ordenado se todo subconjunto não vazio de A possui um menor elemento.*

Teorema 59 *Se A é um conjunto, existe uma relação de ordem sobre A tal que A é bem ordenado.*

Demonstração. A demonstração deste teorema foi feita por Ernst Zermelo em 1904 e pode ser encontrada em [2]. ■

Observação 60 *Dugundji, em* [3]*, observa que apesar do Teorema* 59 *assegurar que todos os conjuntos possam ser bem ordenados, nenhuma construção específica para um conjunto não-enumerável (por exemplo, o conjunto dos números reais) foi apresentada. Além disso, em* [3] *Teorema* 2.1*, foi apresentada a prova de que o Teorema* 59*, o Axioma da Escolha e o Lema de Zorn são equivalentes.*

Definição 61 *Dizemos que uma coleção $\mathcal{A}$ de subconjuntos de um espaço topológico X cobre X, ou é uma cobertura de X, se a união dos elementos de $\mathcal{A}$ é igual à X. Essa coleção é chamada de cobertura aberta de X se seus elementos são subconjuntos abertos de X.*

Lema 62 *Seja X um espaço metrizável. Se $\mathcal{A}$ é uma cobertura aberta de X, então existe uma cobertura $\mathcal{E}$ de X que refina $\mathcal{A}$ e $\mathcal{E}$ é enumerável localmente finita.*

Demonstração. Suponhamos que a coleção $\mathcal{A}$ seja bem ordenada pela relação de ordem $<$. Denotemos os elementos dessa coleção genericamente pelas letras $U, V, W, \ldots$

Escolha uma métrica d para X. Seja n um inteiro positivo fixo. Dado um elemento $U \in \mathcal{A}$, defina

$$S_n(U) = \left\{x \,\middle|\, B_d\left(x, \frac{1}{n}\right) \subset U\right\}.$$

Agora, usamos a relação de ordem $<$ em $\mathcal{A}$ para passar para um conjunto menor. Para cada U em $\mathcal{A}$, defina

$$T_n(U) = S_n(U) - \bigcup_{V<U} V.$$

A situação em que $\mathcal{A}$ tem apenas três conjuntos é ilustrada na figura 1.

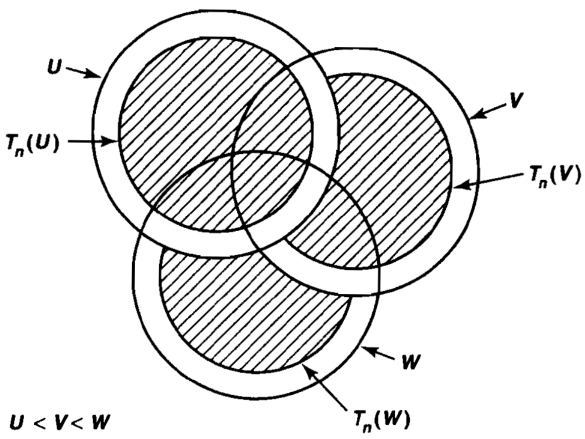

Figura 1: Ordem em $\mathcal{A}$ com três elementos.

Os conjuntos $T_n(U)$ são disjuntos. De fato, se V e W são elementos distintos de $\mathcal{A}$, então $d(x, y) \geq \frac{1}{n}$, para quaisquer $x \in T_n(V)$ e $y \in T_n(W)$. Para mostrar isso, assuma que $V < W$. Como

$x \in T_n(V)$, então $x \in S_n(V)$. Daí, $B_d\left(x, \frac{1}{n}\right) \subset V$. Por outro lado, como $V < W$ e $y \in T_n(W)$, segue que $y \notin V$. Logo, $y \notin B_d\left(x, \frac{1}{n}\right)$.

Os conjuntos $T_n(U)$ ainda não são os que desejamos, pois não sabemos se eles são conjuntos abertos. Vamos expandir cada um deles para obter um conjunto aberto $E_n(U)$. Considere $E_n(U)$ a $\frac{1}{3n}$-vizinhança de $T_n(U)$, isto é, $E_n(U) = \bigcup_{x \in T_n(U)} B_d\left(x, \frac{1}{3n}\right)$. Os conjuntos E_n formados são disjuntos.

De fato, se V e W são elementos distintos de $\mathcal{A}$, afirmamos que $d(x, y) \geq \frac{1}{3n}$ quando $x \in E_n(V)$ e $y \in E_n(W)$. Sejam $x \in T_n(V)$, $y \in T_n(W)$, $x_0 \in E_n(V)$ e $y_0 \in E_n(W)$. Então, pela desigualdade triangular,

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y_0) + d(y_0, y).$$

Como $d(x, y) \geq \frac{1}{n}$, $d(x, x_0) \leq \frac{1}{3n}$ e $d(y_0, y) \leq \frac{1}{3n}$, segue que

$$d(x_0, y_0) \geq d(x, y) - d(x, x_0) - d(y, y_0) \geq \frac{1}{n} - \frac{1}{3n} - \frac{1}{3n} = \frac{3-1-1}{3n} = \frac{1}{3n}.$$

Logo, os E_n's formados são disjuntos.

Defina

$$\mathcal{E}_n = \{E_n(U) |\ U \in \mathcal{A}\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{E}_n$ é uma coleção localmente finita de conjuntos abertos que refina $\mathcal{A}$. O fato que $\mathcal{E}_n$ é um refinamento de $\mathcal{A}$ vem de que $E_n(V) \subset V$, para cada $V \in \mathcal{A}$. Além disso, como $\mathcal{E}_n$ é localmente finita, então para qualquer x em X, a $\frac{1}{6n}$-vizinhança de x pode interceptar no máximo um elemento de $\mathcal{E}_n$.

Temos que, a coleção $\mathcal{E}_n$ não cobre X, mas afirmamos que a coleção

$$\mathcal{E} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{E}_n$$

cobre X. Para ver isto, seja $x \in X$. Sabemos que $\mathcal{A}$ cobre X. Considere U o primeiro elemento de $\mathcal{A}$ (na relação de ordem $<$) que contém x. Já que U é aberto, podemos escolher n de modo que $B_d\left(x, \frac{1}{n}\right) \subset U$. Então, por definição, $x \in S_n(U)$. Agora, pelo fato de U ser o primeiro elemento de $\mathcal{A}$ que contém x, o ponto x pertence à $T_n(U)$. Logo, $x \in E_n(U)$. Portanto, $x \in \mathcal{E}_n$. ■

8 O Teorema de Metrização de Nagata-Smirnov

Nesta seção apresentaremos a demonstração do importante Teorema de Metrização de Nagata-Smirnov (Teorema 67) que mostra que a regularidade de um espaço topológico X e a existência, em X, de uma base enumerável localmente finita são equivalentes a X ser um espaço metrizável.

Definição 63 *Um subconjunto A de um espaço X é chamado um G_δ-conjunto em X se ele for igual à interseção de uma coleção enumerável de subconjuntos abertos de X.*

Exemplo 64 *Se X é um espaço topológico qualquer, temos que cada subconjunto aberto de X é um G_δ-conjunto de modo trivial.*

Lema 65 *Seja X um espaço regular com uma base enumerável localmente finita $\mathcal{B}$. Então, X é normal e todo conjunto fechado em X é um G_δ-conjunto em X.*

Demonstração. *Passo 1:* Seja W aberto em X. Mostremos que existe uma coleção enumerável $\{U_n\}$ de conjuntos abertos de X tal que

$$W = \bigcup U_n = \bigcup \overline{U}_n.$$

Como a base $\mathcal{B}$ para X é enumerável localmente finita, podemos escrever $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$, onde cada coleção $\mathcal{B}_n$ é localmente finita. Seja C_n a coleção dos elementos básicos B tal que $B \in \mathcal{B}_n$ e $\overline{B} \subset W$. Então, C_n é uma subcoleção de $\mathcal{B}_n$ que é localmente finita. Defina

$$U_n = \bigcup_{B \in C_n} B.$$

Então, U_n é um conjunto aberto, e pelo Lema 55,

$$\overline{U}_n = \bigcup_{B \in C_n} \overline{B}.$$

Portanto, $\overline{U}_n \subset W$ e assim,

$$\bigcup U_n \subset \bigcup \overline{U}_n \subset W.$$

A igualdade é válida pois dado $x \in W$, como X é regular, segue que existe um elemento básico $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ e $\overline{B} \subset W$. Agora, $B \in \mathcal{B}_n$ para algum n, e assim $B \in C_n$ (por definição). Então, $x \in U_n$. Logo, $W \subset \bigcup U_n$, como queríamos.

Passo 2: Mostremos que todo conjunto fechado C de X é um G_δ conjunto em X.

De fato, dado C, considere $W = X - C$. Pelo Passo 1, existem conjuntos U_n em X tal que $W = \bigcup \overline{U}_n$. Então,

$$C = \bigcap (X - \overline{U}_n).$$

Logo, C é uma interseção enumerável de subconjuntos abertos de X.

Passo 3: Vamos provar que X é normal. Para isto, sejam C e D conjuntos fechados disjuntos em X. Aplicando o Passo 1 no conjunto aberto $X - D$, construímos uma coleção enumerável $\{U_n\}$ de conjuntos abertos tal que $\bigcup U_n = \bigcup \overline{U}_n = X - D$. Daí, $\{U_n\}$ cobre C e cada conjunto $\overline{U}_n$ é disjunto de D. Analogamente, existe uma cobertura enumerável $\{V_n\}$ de D de conjuntos abertos cujos fechos são disjuntos de C.

Os conjuntos $U = \bigcup U_n$ e $V = \bigcup V_n$ são conjuntos abertos contendo C e D, respectivamente, mas não são precisamente disjuntos. Utilizaremos a seguinte estratégia para construir conjuntos abertos que são disjuntos: dado n, defina

$$U_n' = U_n - \bigcup_{j=1}^{n} \overline{V}_j \ \text{ e } \ V_n' = V_n - \bigcup_{j=1}^{n} \overline{U}_j.$$

Note que, os conjuntos U_n' e V_n' são abertos. A coleção $\{U_n'\}$ cobre C, porque cada x em C pertence à U_n, para algum n, e x não pertence à nenhum conjunto $\overline{V}_j$. De modo similar, a coleção $\{V_n'\}$ cobre D. Finalmente, os conjuntos

$$U' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} U_n' \ \text{ e } \ V' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} V_n'$$

são disjuntos e abertos cobrindo C e D, respectivamente, pois se $x \in U' \cap V'$, então $x \in U_i' \cap V_k'$, para algum i e para algum k. Suponha que $i \leq k$. Segue da definição de U_i' que $x \in U_i$ e como $i \leq k$, temos que $x \notin \overline{U}_i$ (pela definição de V_k'). A contradição também acontece se $i \geq k$. ■

Lema 66 *Sejam X um espaço topológico normal e A um G_δ-conjunto fechado em X. Então, existe uma função contínua $f : X \longrightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$, para $x \in A$, e $f(x) > 0$, para $x \notin A$.*

Demonstração. Como A é um G_δ-conjunto, existe uma coleção $\{U_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$ tal que $A = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}_+} U_n$. Para cada n escolha uma função contínua $f_n : X \longrightarrow [0, 1]$ dada por $f_n(x) = 0$, para $x \in A$, e $f_n(x) = 1$, para $x \in X - U_n$. Defina $f(x) = \sum \dfrac{f_n(x)}{2^n}$. Essa série converge uniformemente, por comparação com a série $\sum \dfrac{1}{2^n}$. Logo, f é contínua. Além disso, f se anula em A e é positiva em $X - A$. ■

Agora que estamos munidos de poderosos resultados, podemos finalmente apresentar a demonstração o Teorema de Metrização de Nagata-Smirnov, o qual nos dá uma caracterização completa de um espaço metrizável. Ou seja, uma condição necessária e suficiente para isto acontecer, e como se comporta tal topologia.

Teorema 67 *Um espaço topológico X é metrizável se, e somente se, X é regular e tem uma base enumerável localmente finita.*

Demonstração. Suponha que X é regular com uma base enumerável localmente finita $\mathcal{B}$. Pelo Lema 65, X é normal, e todo conjunto fechado em X é um G_δ-conjunto em X. Mostremos que X é metrizável mergulhando-o no espaço métrico $(\mathbb{R}^J, \overline{\rho})$, para algum J.

Seja $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$, onde cada coleção $\mathcal{B}_n$ é localmente finita. Para cada número inteiro positivo n e cada elemento $B \in \mathcal{B}_n$, escolha uma função contínua

$$f_{n,B} : X \longrightarrow \left[0, \frac{1}{n}\right],$$

tal que $f_{n,B}(x) > 0$, para $x \in B$, e $f_{n,B}(x) = 0$, para $x \notin B$. A coleção $\{f_{n,B}\}$ separa pontos e conjuntos fechados em X. De fato, dado um ponto x_0 e uma vizinhança U de x_0, existe um elemento básico B tal que $x_0 \in B \subset U$. Então, $B \in \mathcal{B}_n$, para algum n. Logo, $f_{n,B}(x_0) > 0$ e $f_{n,B}$ se anula fora de U.

Seja J um subconjunto de $\mathbb{Z}_+ \times \mathcal{B}$ consistindo de todos os pares (n, B) tal que B é um elemento de $\mathcal{B}_n$. Defina $F : X \longrightarrow [0, 1]^J$ por

$$F(x) = (f_{n,B}(x))_{(n,B) \in J}.$$

Pelo Teorema 52, a função F mergulha X em $[0, 1]^J$.

Agora, dado $[0, 1]^J$ na topologia induzida pela métrica uniforme, mostremos que F é um mergulho relativo a essa topologia também. Aqui usaremos a condição de que $f_{n,B}(x) < \dfrac{1}{n}$. A topologia uniforme é mais fina que a topologia produto e assim, relativo a métrica uniforme, a função F é injetora e leva conjuntos abertos de X em conjuntos abertos na imagem $Z = F(X)$.

Vamos provar que F é contínua. De fato, note que no subespaço $[0, 1]^J$ de $\mathbb{R}^J$, a métrica uniforme é igual a métrica

$$\rho((x_\alpha), (y_\alpha)) = sup\{|x_\alpha - y_\alpha|\}, \text{ onde } \alpha \in J.$$

Tomemos $x_0 \in X$ e $\varepsilon > 0$, devemos encontrar uma vizinhança W de x_0 tal que

$$x \in W \Longrightarrow \rho(F(x_0), F(x)) < \varepsilon.$$

Para n fixo, escolha uma vizinhança U_n de x_0 que intercepta somente um número finito de elementos da coleção $\mathcal{B}_n$. Isso significa que como B varia em $\mathcal{B}_n$, todas menos uma quantidade finita de funções $f_{n,B}$ são iguais à zero em U_n. Pelo fato de que cada função $f_{n,B}$ é contínua, podemos escolher uma vizinhança V_n de x_0 contida em U_n sobre a qual cada uma das funções restantes $f_{n,B}$, para $B \in \mathcal{B}_n$, varia no máximo em $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Tome uma vizinhança V_n de x_0, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Então, escolha N de modo que $\dfrac{1}{N} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ e defina $W = \displaystyle\bigcap_{\beta=1}^{N} V_\beta$. Afirmamos que W é a vizinhança desejada de x_0. Com efeito, seja $x \in W$. Se $n \leq N$, então

$$|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

pois a função $f_{n,B}$ se anula identicamente ou varia no máximo $\frac{\varepsilon}{2}$ sobre W. Se $n > N$, então

$$|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq \frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$$

pois $f_{n,B}$ aplica X em $\left[0, \frac{1}{n}\right]$. Portanto,

$$\rho(F(x), F(x_0)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

como desejado.

Reciprocamente, assuma que X seja metrizável. Sabemos que X é regular, basta mostrar que possui uma base enumerável localmente finita.

Escolha uma métrica d para X. Dado m um número inteiro positivo, seja $\mathcal{A}_m$ a cobertura de X de todas as bolas abertas de raio $\frac{1}{m}$. Pelo Lema 62, existe uma cobertura aberta $\mathcal{B}_m$ de X que é um refinamento de $\mathcal{A}_m$ tal que essa nova cobertura é enumerável localmente finita. Notemos que cada elemento de $\mathcal{B}_m$ tem diâmetro no máximo de $\frac{2}{m}$. Seja $\mathcal{B}$ a união das coleções $\mathcal{B}_m$, para $m \in \mathbb{Z}_+$. Pelo fato de cada coleção C_m ser enumerável localmente finita, $\mathcal{B}$ também é. Mostremos que $\mathcal{B}$ é uma base para X.

Dados $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, mostremos que existe um elemento B de $\mathcal{B}$ contendo x que está contido em $B_d(x, \varepsilon)$. Primeiro escolha m de modo que $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Então, como $\mathcal{B}_m$ cobre X, podemos escolher um elemento B de $\mathcal{B}_m$ que contém x. Como B contém x e têm diâmetro no máximo $\frac{2}{m} < \varepsilon$, ele está contido em $B_d(x, \varepsilon)$, como queríamos mostrar. ■

9 Paracompacidade

Definição 68 *Um espaço topológico X é paracompacto se toda cobertura aberta $\mathcal{A}$ de X admite um refinamento aberto localmente finito $\mathcal{B}$ que cobre X.*

O próximo resultado nos será útil na apresentação da demonstração do Teorema 73.

Teorema 69 *Se X é um espaço paracompacto Hausdorff, então X é regular.*

Demonstração. Sejam $a \in X$ e B um conjunto fechado de X, de forma que $a \notin B$. A condição de X ser Hausdorff nos permite escolher, para cada $b \in B$, um conjunto aberto U_b sobre b, cujo fecho não contém a. Obtenha um refinamento aberto localmente finito C cobrindo X, tomando como cobertura de X a coleção de conjuntos abertos U_b, juntamente com o conjunto aberto $X - B$. Forme a subcoleção $\mathcal{D}$ de C consistindo de todos os elementos de C que interceptam B. Então, $\mathcal{D}$ cobre B. Além disso, se $D \in \mathcal{D}$, então $a \notin \overline{D}$. Pelo fato de D interceptar B, ele pertence à algum conjunto U_b, cujo fecho não contém a. Seja

$$V = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D.$$

Então, V é um conjunto aberto em X que contém B. E ainda, como $\mathcal{D}$ é localmente finito,

$$\overline{V} = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} \overline{D},$$

além de que, $a \notin \overline{V}$. Logo, X é regular. ■

Lema 70 *Considere que X é um espaço topológico regular. Se X tem uma cobertura aberta com um refinamento aberto enumerável localmente finito cobrindo X, então X tem um refinamento localmente finito cobrindo X.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{A}$ uma cobertura aberta de X e $\mathcal{B}$ um refinamento aberto enumerável localmente finito de $\mathcal{A}$ cobrindo X. Considere $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$, onde cada $\mathcal{B}_n$ é localmente finito.

Aplicaremos a mesma estratégia utilizada no Lema 62 para conseguir que conjuntos de diferentes $\mathcal{B}_n$'s sejam disjuntos. Dado i, seja

$$V_i = \bigcup_{U \in \mathcal{B}_i} U.$$

Então, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$ e cada elemento $U \in \mathcal{B}_n$, defina

$$S_n(U) = U - \bigcup_{i<n} V_i \;\text{ e }\; C_n = \{S_n(U) |\, U \in \mathcal{B}_n\}.$$

Assim, C_n é um refinamento de $\mathcal{B}_n$, pois $S_n(U) \subset U$, para cada $U \in \mathcal{B}_n$.

Seja $C = \bigcup C_n$. Afirmamos que C é o refinamento localmente finito de $\mathcal{A}$, que cobre X.

Seja $x \in X$. Queremos mostrar que x está em algum elemento de C, e que x possui uma vizinhança que intercepta somente um número finito de elementos de C. Considere a cobertura $\mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}_n$. Sejam N o menor inteiro tal que x está em algum elemento de $\mathcal{B}_N$, e $U \in \mathcal{B}_N$, tal que $x \in U$. Primeiro, observe que $x \notin \mathcal{B}_i$, para $i < N$, e daí, $x \in S_N(U)$, com $S_N(U) \in C$. Agora, note que, como cada coleção $\mathcal{B}_n$ é localmente finita, para $i = 1, \cdots, N$, podemos escolher uma vizinhança W_n de x que intercepta somente um número finito de elementos de $\mathcal{B}_n$. Se W_n intercepta o elemento $S_n(V) \in C_n$, ele deve interceptar o elemento $V \in \mathcal{B}_n$, pois $S_n(V) \subset V$. Portanto, W_n intercepta somente um número finito de elementos de C_n. Além disso, pelo fato de $U \in \mathcal{B}_N$, U não intercepta elementos de C_n, para $n > N$. Com isso, a vizinhança

$$W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_N \cap U$$

de x intercepta somente um número finito de elementos de C. ■

Teorema 71 *Todo espaço topológico metrizável é paracompacto.*

Demonstração. Seja X um espaço metrizável. Já sabemos que dado uma cobertura aberta $\mathcal{A}$ de X, existe um refinamento enumerável localmente finito que cobre X (pelo Lema 62). Pelo Lema 70, $\mathcal{A}$ tem um refinamento localmente finito que cobre X. Portanto, X é paracompacto. ■

10 O Teorema de Metrização de Smirnov

Vimos que o Teorema da Metrização de Nagata-Smirnov (Teorema 67) nos fornece condições necessárias e suficientes para que um espaço topológico X seja metrizável. O Teorema de Metrização de Smirnov (Teorema 73), que apresentaremos nessa seção, é um corolário do Teorema 67 e foi demonstrado por Smirnov.

Definição 72 *Um espaço topológico X é localmente metrizável se todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança U que é metrizável como um subespaço topológico.*

Teorema 73 *Um espaço topológico X é metrizável se, e somente se, ele é um espaço paracompacto Hausdorff localmente metrizável.*

Demonstração. Suponha que X é metrizável. Então, existe uma métrica d que induz a topologia de X, e segue que X é Hausdorff. Além disso, para todo $x \in X$, dado uma vizinhança U de x, U é metrizável visto como um subespaço topológico. E, pelo Teorema 71, X é paracompacto.

Reciprocamente, suponha que X é um espaço topológico paracompacto Hausdorff localmente metrizável. Como X é paracompacto Hausdorff, segue que X é regular (pelo Teorema 69). Falta mostrar que X possui uma base enumerável localmente finita, e pelo Teorema de Nagata-Smirnov (Teorema 67), temos que X é metrizável.

Tome a cobertura de X formada por conjuntos abertos que são metrizáveis e escolha um refinamento aberto localmente finito $\mathcal{C}$ desta cobertura, cobrindo X. Temos que cada elemento $C \in \mathcal{C}$ é metrizável. Seja $d_C : C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ uma métrica que induz a topologia de C. Dado $x \in C$, considere $B_C(x, \varepsilon)$ o conjunto de todos os pontos $y \in C$ tal que $d_C(x, y) < \varepsilon$, e, sendo aberto em C, o conjunto $B_C(x, \varepsilon)$ também é aberto em X.

Dado $m \in \mathbb{Z}_+$, seja $\mathcal{A}_m$ a cobertura de X por todas as bolas abertas de raio $\dfrac{1}{m}$, isto é,

$$\mathcal{A}_m = \left\{ B_C\left(x, \frac{1}{m}\right) \middle| \, x \in C, \; C \in \mathcal{C} \right\}.$$

Como X é paracompacto, segue que existe um refinamento aberto localmente finito $\mathcal{D}_m$ de $\mathcal{A}_m$, cobrindo X. Seja $\mathcal{D}$ a união das coleções $\mathcal{D}_m$. Então, D é enumerável localmente finita. Afirmamos que $\mathcal{D}$ é uma base para X. Para ver isto, sejam $x \in X$ e U uma vizinhança de x. Queremos encontrar um elemento $D \in \mathcal{D}$, tal que $x \in D \subset U$. Como x pertence à uma quantidade finita de elementos de $\mathcal{C}$, digamos $C_1, \cdots, C_k$, então $U \cap C_i$ é uma vizinhança de x no conjunto C_i. Logo, existe $\varepsilon_i > 0$, tal que

$$B_{C_i}(x, \varepsilon) \subset U \cap C_i.$$

Escolha m de modo que $\dfrac{2}{m} < \min\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k\}$. Pelo fato da coleção $\mathcal{D}_m$ cobrir X, deve existir um elemento $D \in \mathcal{D}_m$ de modo que $x \in D$. Como $\mathcal{D}_m$ refina $\mathcal{A}_m$, deve existir um elemento $B_C\left(y, \dfrac{1}{m}\right) \in \mathcal{A}_m$, para algum $C \in \mathcal{C}$ e para algum $y \in C$, contendo D. Como

$$x \in D \subset B_C\left(y, \frac{1}{m}\right),$$

temos que $x \in C$ e assim, C deve ser algum dos conjuntos $C_1, \cdots, C_k$. Digamos $C = C_i$. Como $B_C\left(y, \dfrac{1}{m}\right)$ tem diâmetro no máximo $\dfrac{2}{m} < \varepsilon_i$, segue que

$$x \in D \subset B_{C_i}\left(y, \frac{1}{m}\right) \subset B_{C_i}(x, \varepsilon_i) \subset U,$$

como queríamos mostrar. ■

11 Conclusão

Espaços metrizáveis é um assunto estudado em Topologia Geral que também tem sua importância em outras áreas da Matemática, como por exemplo, nas áreas de Análise Funcional e Geometria.

Ao longo deste artigo percebemos a importância dos axiomas de separação e dos axiomas de enumerabilidade no estudo de espaços metrizáveis, pois quando um espaço topológico atende algum ou alguns desses axiomas, várias propriedades úteis surgem nesse espaço. Além disso, vimos que essas propriedades dependem da topologia definida no espaço.

À medida que exploramos os espaços metrizáveis algumas questões surgem naturalmente. São elas: Quando um espaço topológico é metrizável? Quais condições podemos impor para que um espaço se torne metrizável? Quais as consequências de um espaço ser metrizável?

Estas perguntas foram respondidas no decorrer deste artigo com a apresentação dos seguintes três teoremas: Teorema de Metrização de Urysohn (Teorema 51), Teorema de Metrização de Nagata-Smirnov (Teorema 67) e Teorema de Metrização de Smirnov (Teorema 73). O Teorema 51 nos fornece uma condição necessária para a metrização de um espaço, mas ele não garante uma condição suficiente para isso pois a condição do espaço possuir uma base enumerável é muito forte para se exigir de um espaço metrizável. Já o Teorema 67 e o Teorema 73 nos fornecem condições equivalentes a metrizabilidade de um espaço.

Estes três teoremas são resultados clássicos de Topologia Geral por apresentarem técnicas interessantes em suas demonstrações e a possibilidade de se trabalhar com espaços metrizáveis, em Topologia ou áreas afins, com mais facilidade através das equivalências obtidas em dois desses teoremas.

12 Referências Bibliográficas

[1] MUNKRES, J. R. **Topology.** 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, Pearson, 2000.

[2] ZERMELO, E. Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. **Mathematische Annalen**, Berlim, v. 59. p. 514 - 516, 1904.

[3] DUGUNDJI, J. **Topology.** Boston: Allyn & Bacon, 1966.