

**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 19, dez. 2020
Edição Iniciação Científica

Camila Marques dos Reis da Silva
Instituto de Geociências e Ciências
Exatas
UNESP - Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
camila.reis.silva@gmail.com

Jamil Viana Pereira
Instituto de Geociências e Ciências
Exatas
UNESP - Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
jamil.v.pereira@unesp.br

Equações do transporte de massa: soluções e aplicação ao desastre do Rio Doce

Mass transport equations: solutions and application to Doce River disaster

Resumo

O estudo de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) em modelos fenomenológicos esbarra, muitas vezes, na dificuldade de resolução das mesmas. Neste trabalho, será feita uma introdução às EDPs aplicadas ao transporte de massa, um estudo teórico da solução de um modelo e por fim a aplicação deste ao desastre do Rio Doce. Para o transporte de massa, foram considerados dois dos principais processos que ocorrem em rios: advecção e difusão, os quais foram descritos pela Equação do Transporte por Advecção e Difusão (ETAD). A análise da solução desta EDP permite compreender o comportamento da lama derramada no Rio Doce e, com base em informações obtidas nas primeiras 45 horas, indicar o tempo transcorrido para ela atingir o oceano, com precisão satisfatória para um estudo preliminar, aplicável em situações semelhantes, nas primeiras horas após o rompimento. Este trabalho evidencia a modelagem matemática através de EDPs como ferramenta imprescindível para a área ambiental.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Parciais. Equação do Transporte de Massa. Desastre na barragem de Mariana. Rio Doce.

Abstract

Partial Differential Equations (PDEs) applied to phenomenological models, often brings an extra difficulty to the study, solving the PDE. This work starts with an introduction to PDEs applied to mass transport phenomena, a theoretical study of the solution of a model and finally its application the Doce River disaster. For mass transport, two of the major processes that occur in rivers were considered, both described by the Advection-Diffusion Mass Transport Equation. The analysis of the PDE solution, allows to understand the behavior of the mud spilled in the Doce River and, based on information obtained in the first 45 hours, indicate the elapsed time for it reach the ocean, with satisfactory accuracy for a preliminary study, applicable in similar situations, in the first hours after the dam break. This work illustrates mathematical modeling through PDEs as an essential tool for the environmental area.

Keywords: Partial Differential Equations. Mass Transport Equation. Mariana dam disaster. Doce River.



1 Introdução

As Equações Diferenciais podem modelar diversas situações relacionadas a fenômenos físicos, químicos, biológicos, ambientais, entre outras (BOYCE; DIPRIMA, 2012, p. 1). Geralmente, uma dificuldade dos modelos que utilizam Equações Diferenciais Parciais (EDPs) é a busca de soluções, uma vez que, a teoria para resolução de EDPs consiste em dividi-las em classes, de acordo com características específicas, cada uma com método próprio para obtenção da solução. Muitas vezes, uma EDP que aparentemente não pertence a uma determinada classe, pode ser nela enquadrada após uma mudança de variável. Ainda assim, nem sempre é possível obter uma solução analítica, sendo muitas vezes necessária a busca de soluções numéricas (ZILL; CULLEN, 2001, p. 74).

Em particular, as equações do transporte de massa são EDPs parabólicas de segunda ordem e têm grande destaque em aplicações na área ambiental pois representam um modelo adequado, barato e de fácil aplicação, para o fenômeno de transporte de poluentes em rios, lençol freático, lagos, mares, estuários e atmosfera (DROPO; KRISHNAPPAN, 2016, p. 2754 ;RIVORD *et al*, 2014, p. 343; ZHENG; BENNETT, 1995, p. 177). O transporte de massa envolve diferentes processos sendo descritos por EDPs distintas, como por exemplo, o transporte por advecção e/ou difusão, que geram as equações do transporte por advecção (ETA), difusão (ETD) e por advecção e difusão (ETAD) (CHAPRA, 1997, p. 138 e 180; FISCHER *et al*, 1979, p. 32 e 51).

Neste sentido, este trabalho busca destacar o tratamento matemático das equações de transporte de massa, especialmente a ETAD, desde sua origem até a obtenção da solução, para posteriormente aplicá-la à situação real ocorrida no Rio Doce em 5 de novembro de 2015, quando o rompimento da barragem de rejeitos da mineração de ferro em Mariana- MG carregou uma enorme quantidade de lama para o Rio Doce (HATJE *et al*, 2017, p. 2; IBAMA, 2015, p. 2).

Sendo assim, os objetivos principais deste trabalho são:

- i) apresentar as equações do transporte de massa;
- ii) obter suas soluções;
- iii) aplicar e interpretar uma situação de transporte de poluente em rio, mais especificamente no desastre do Rio Doce;
- iv) discutir os resultados.

2 As equações do transporte de massa

Transporte de massa é o processo de transporte de substâncias em meio sólido, líquido ou gasoso, como por exemplo, o fluxo de substâncias no ar, na terra e na água (FISCHER *et al*, 1979, p. 5). Também pode ser definido pelo balanço de massa de uma substância através de um volume de controle, ou seja, a diferença entre a quantidade de material entrando e saindo de um sistema. Dentro do volume de controle são permitidas variações de energia na forma de calor e de trabalho, respeitando a 1ª Lei da Termodinâmica da Conservação da Energia e considera-se a quantidade de massa sempre constante (balanço igual a 0), seguindo a Lei da Conservação da Massa. Assim, a quantidade inicial de massa é sempre igual à quantidade final de massa (FRAGOSO JÚNIOR; FERREIRA; MARQUES, 2009, p. 178; POTTER; WIGGERT; RAMADAN, 2015, p. 117 e 121).

2.1 Equação do transporte

Para uma substância que não sofre reação química, chamada de substância conservativa, a variação da massa desta substância, em um volume controle com área da seção transversal igual a

A , e comprimento Δx é dada pela diferença entre a quantidade de massa que entra e sai do volume controle, isto é, se o fluxo de massa do rio na posição x e no instante t é dado por $F(x, t)$, tem-se que a variação da massa no volume controle neste instante é $A[F(x, t) - F(x + \Delta x, t)]$. Por outro lado, se a concentração da substância em questão no ponto x e no instante t é dada por uma função $C(x, t)$, definida homogeneamente no volume de controle, isto é, $C(\tilde{x}, t) = C(x, t)$ para todo \tilde{x} entre x e $x + \Delta x$, a variação da massa desta substância no instante t , será dada pelo produto do volume $V = A\Delta x$ pela variação da concentração $\frac{\partial C}{\partial t}$, esta última constante na variável x . Desta forma,

$$V \frac{\partial C}{\partial t}(\tilde{x}, t) = A[F(x, t) - F(x + \Delta x, t)].$$

Uma vez que $V = A\Delta x$ tem-se

$$\frac{\partial C}{\partial t}(\tilde{x}, t) = \frac{F(x, t) - F(x + \Delta x, t)}{\Delta x},$$

que leva à expressão da equação geral do transporte na posição x e instante t para material conservativo (CHAPRA, 1997, p. 9).

$$\frac{\partial C}{\partial t}(x, t) = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, t) \quad (1)$$

sendo $C(x, t)$ a concentração em kg/m^3 , $F(x, t)$ o fluxo em kg/s.m^2 .

Os principais processos de transporte de matéria são a advecção e a difusão (Figura 1). A advecção resulta de um fluxo que transporta a substância no espaço sem alterar a sua identidade ou sem que a substância sofra reação química. A difusão associa-se à diluição aleatória da massa, podendo ocorrer inclusive quando a velocidade é nula. A direção do movimento de transporte é do local de maior concentração para o de menor concentração (CHAPRA, 1997, p. 138).

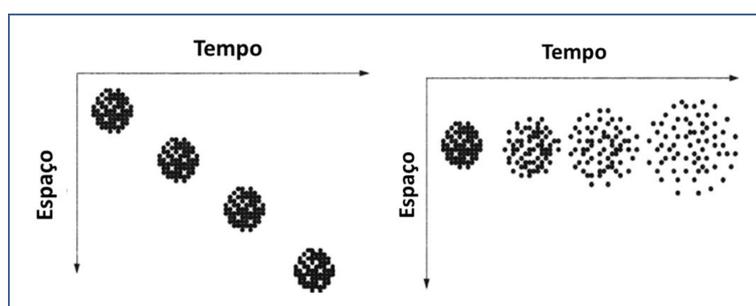


Figura 1: Transporte de massa por advecção à esquerda e difusão à direita (CHAPRA, 1997, p.138)

Uma vez estabelecido que o transporte de massa, variação da concentração de massa no espaço e no tempo, depende diretamente da variação do fluxo, as características dos fluxos relacionadas a diferentes fenômenos serão analisadas nas seções seguintes.

2.2 Diferentes fluxos e equações relacionadas

Fluxo de massa pode ser descrito como a taxa de massa por unidade de tempo que atravessa a seção transversal do volume controle, sendo possível utilizar equações diferenciais em sua representação (FISCHER *et al*, 1979, p. 31). Nesta seção serão apresentados os fluxos advectivo, difusivo e advectivo-difusivo, quando ambos ocorrem simultaneamente.

2.2.1 Advectivo

O transporte de partículas por advecção pode ser analisado estudando apenas o movimento destas através do rio, uma vez que as partículas não sofrem alterações, os parâmetros essenciais para seu transporte são a velocidade e a concentração. Desta forma, o fluxo de massa (quantidade dividida por área e intervalo de tempo) relativo ao transporte por advecção é, segundo (CHAPRA, 1997, p. 157), dado por

$$F_a(x, t) = V(x, t)C(x, t),$$

sendo $V(x, t)$ a velocidade do volume de controle, no instante x e no tempo t .

Assim, retomando (1), a Equação do Transporte por Advecção (ETA) é

$$\frac{\partial C}{\partial t}(x, t) = -\frac{\partial(VC)}{\partial x}(x, t).$$

Em particular, quando a velocidade no volume de controle é constante, tem-se

$$\frac{\partial C}{\partial t}(x, t) = -V\frac{\partial C}{\partial x}(x, t). \quad (2)$$

2.2.2 Difusivo

A Primeira Lei de Fick diz que em um sistema que sofre difusão, o fluxo de massa é proporcional ao gradiente de concentração multiplicado pelo coeficiente de difusão (CHAPRA, 1997, p. 141), isto é,

$$F_d(x, t) = -D\frac{\partial C}{\partial x}(x, t),$$

sendo D o Coeficiente de Difusão (m^2/s). O coeficiente D depende diretamente do meio no qual a massa se propaga, No caso específico de transporte em rios ou estuários, ele é denominado Coeficiente de Dispersão Longitudinal e denotado por E (CHAPRA, 1997, p. 178 e 245).

Substituindo a expressão do fluxo difusivo na equação do transporte original (1), obtemos a Equação do Transporte por Difusão (ETD)

$$\frac{\partial C}{\partial t}(x, t) = E\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x, t). \quad (3)$$

2.2.3 Advectivo e Difusivo

Ao serem considerados ambos os fenômenos, advecção e difusão, tem-se que o fluxo resultante é a soma dos fluxos de advecção e de difusão (CHAPRA, 1997, p. 181). A equação resultante, em um sistema de velocidade constante, será denominada Equação do Transporte por Advecção e Difusão (ETAD):

$$\frac{\partial C}{\partial t}(x, t) = -V\frac{\partial C}{\partial x}(x, t) + E\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x, t).$$

Quando o interesse do modelo consiste em uma situação de ruptura, é possível considerar a condição inicial na qual a massa está concentrada na origem do volume de controle, o que pode ser representado pelo Problema de Cauchy, que é o objeto principal dos estudos deste trabalho:

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} = -V\frac{\partial C}{\partial x} + E\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ C(x, 0) = M\delta(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4)$$

sendo M a quantidade de massa no sistema e $\delta(x)$ a função delta de Dirac.

A Lei da Conservação das Massas pode ser aplicada ao sistema dado por (4), sua consequência é a hipótese de que a quantidade de massa deste deve permanecer inalterada, não havendo perdas por processos químicos ou evaporação, isto é, o volume total da massa deve ser transportado. Isso implica que, em qualquer instante t vale a igualdade

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(x, t) dx = M, \quad \forall t \geq 0. \quad (5)$$

A equação (4) pode ser transformada em uma equação do calor, através da mudança de variáveis $w = x - Vt$, que fornece uma nova função para a concentração, definida por $\tilde{C}(w, t) := C(w + Vt, t) = C(x, t)$. Com esta nova função, tem-se uma formulação equivalente para a equação do transporte contida no problema (4):

$$\frac{\partial C}{\partial t}(x, t) = -V \frac{\partial C}{\partial x}(x, t) + E \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(x, t) \Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t}(w, t) = E \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial w^2}(w, t).$$

Sendo assim, é possível concentrar os esforços na busca de solução para

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial t}(w, t) = E \frac{\partial^2 \tilde{C}}{\partial w^2}(w, t) & w \in \mathbb{R}, t > 0 \\ \tilde{C}(w, 0) = M\delta(w) & w \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (6)$$

A mesma mudança de variável aplicada à integral presente em (5), permite concluir que conservação da massa permanece válida para $\tilde{C}(w, t)$, isto é, .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{C}(w, t) dw = M, \quad \forall t \geq 0. \quad (7)$$

3 Solução e interpretação da ETAD

3.1 Solução analítica

O problema (4) representa um Problema de Cauchy envolvendo uma EDP. Encontrar a solução analítica de uma EDP via métodos clássicos: Separação de Variáveis, Séries de Fourier, Transformada de Fourier, entre outros, consiste em classificar a equação de acordo com suas características e aplicar um método consagrado para obter sua solução. Muitas vezes a tarefa de se obter uma solução analítica para uma EDP diferente das clássicas (Onda, Calor, Laplace e similares) acaba sendo substituída por um estudo qualitativo de suas propriedades ou mesmo por uma solução numérica.

Após a mudança de variável realizada na seção anterior, a EDP presente em (4) foi transformada na equação equivalente (6), que envolve uma Equação do Calor Homogênea. Existem métodos diversos para a busca de soluções para esta equação, por exemplo, em Evans (1999, p. 16), é encontrada uma solução fundamental para uma versão simplificada de (6), via mudança de variáveis, sendo obtida uma solução fundamental do tipo $\tilde{C}(w, t) = v(\frac{w^2}{t})$. Já em Figueiredo (1977, p. 216), utiliza-se Transformadas de Fourier para resolver o Problema de Cauchy para a Equação do Calor Homogênea, obtendo-se uma solução representada pela convolução da solução obtida em Evans (1999, p. 16) com a condição inicial do Problema de Cauchy.

A abordagem escolhida para este trabalho, consiste em utilizar uma sugestão baseada na teoria física da semelhança, que consiste em agrupar variáveis de uma forma que as sete unidades básicas

do Sistema Internacional de Unidades (SI): metro (m) para distâncias, quilograma (kg) para massa, segundo (s) para tempo, kelvin (K) para temperatura, ampere (A) para corrente elétrica, candela (cd) para intensidade luminosa e mol (mol) para quantidade de substância, sejam agrupadas de acordo com o Teorema Π de Buckingham (BRUNETTI, 2008, p. 147; HUTTER, JÖHNK, 2004, p. 348; POTTER; WIGGERT; RAMADAN, 2015, p. 147), para obter a mudança de variável adequada e uma formulação equivalente. Observe que as demais unidades derivam das básicas, por exemplo: velocidade, medida em metros por segundo ($\frac{m}{s}$), newton ($\frac{kg\ m}{s^2}$), joule (Nm), densidade ($\frac{kg}{m^3}$), etc. Com base na análise dos parâmetros envolvidos na equação (6) e de suas respectivas unidades de medida, a mudança de variável sugerida por Socolofsky e Jirka (2005, p. 15), consiste do agrupamento das variáveis na forma

$$\tilde{C}(w, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Et}} f\left(\frac{w}{\sqrt{4Et}}\right), \quad (8)$$

sendo f uma função real (nova variável indeterminada).

Observe que tal sugestão reduz o trabalho de encontrar a solução da EDP original, ao trabalho de encontrar uma única função real contida em um problema equivalente. Como veremos a seguir, o novo problema será relacionado a uma Equação Diferencial Ordinária. Porém, a expressão sugerida em (8) não é trivial e nem intuitiva, o agrupamento das variáveis desta forma é sugerido pelo Teorema Π de Buckingham.

Calculando as derivadas parciais da candidata \tilde{C} dada em (8) e substituindo em (6), obtém-se a equação equivalente:

$$f''\left(\frac{w}{\sqrt{4Et}}\right) + 2\frac{w}{\sqrt{4Et}}f'\left(\frac{w}{\sqrt{4Et}}\right) + 2f\left(\frac{w}{\sqrt{4Et}}\right) = 0. \quad (9)$$

Com a mudança $\eta = \frac{w}{\sqrt{4Et}}$, pode-se reescrever a equação anterior como $f''(\eta) + 2\eta f'(\eta) + 2f(\eta) = 0$, uma EDO de segunda ordem que possui solução geral $f(\eta) = k_1 e^{-\eta^2} + k_2 e^{-\eta^2} \int e^{\eta^2} d\eta$. A condição inicial dada em (7), permite encontrar os valores das constantes, $k_1 = 1$ e $k_2 = 0$, obtendo-se então $f(\eta) = e^{-\eta^2}$ e conseqüentemente, a solução analítica para (6):

$$\tilde{C}(w, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Et}} e^{-\frac{w^2}{4Et}}.$$

Finalmente, pode-se voltar ao problema da ETAD (4) e explicitar sua solução:

$$C(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Et}} e^{-\frac{(x-Vt)^2}{4Et}}. \quad (10)$$

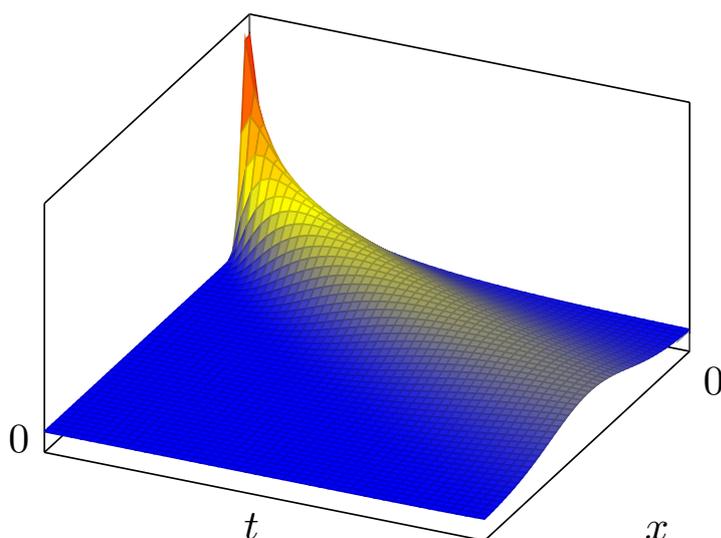


Figura 2: Gráfico de $C(x, t)$

3.2 Deslocamento e distribuição da massa

A função $C(x, t)$ pode ser utilizada para entender o deslocamento da massa no volume de controle, em uma posição fixa x_0 , através da curva $C(x_0, t)$, $t > 0$, correspondente à interseção entre o gráfico de $C(x, t)$ (Figura 2) e o plano $x = x_0$, que descreve o comportamento da massa com relação à posição x_0 , com o passar do tempo. É possível avaliar quanto tempo a massa transportada leva para chegar na posição x_0 , qual será o momento de maior concentração e quanto tempo será necessário para que não exista mais nenhum resquício de massa naquele ponto. Por outro lado, ao fixar o tempo t_0 , a curva $C(x, t_0)$, $x > 0$ descreve o comportamento da massa naquele no instante t_0 : sua distribuição ao longo do volume de controle e a localização de maior concentração.

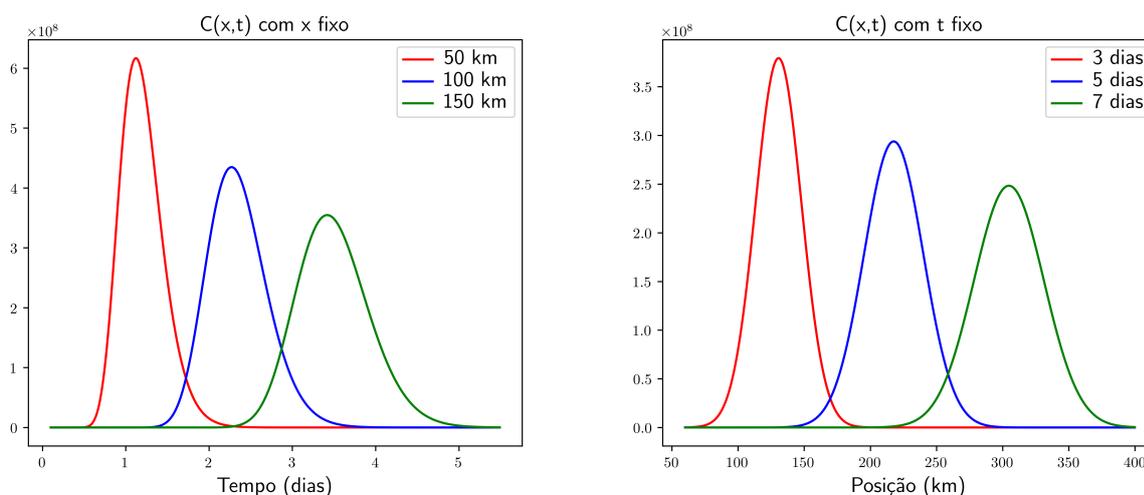


Figura 3: Curvas de $C(x, t)$ para x fixo (esquerda) e t fixo (direita).

Na Figura 3 são apresentadas curvas que simulam uma situação de transporte de massa, vê-se que o gráfico em vermelho do lado esquerdo, representa a situação da distribuição da massa na posição fixa 50 km, vê-se que aproximadamente após 0,5 dias o volume da massa chega nesta posição, em 1

dia se dará o momento de maior concentração e após 2 dias a maior parte da massa já passou pela posição 50 km. A curva azul do lado direito representa o momento fixo de 5 dias e diz que, passado este tempo, a distribuição da massa está entre os quilômetros 150 e 300, com maior concentração no quilômetro 210. Observe que, nas curvas apresentadas, enquanto a massa se desloca no volume de controle, ou a medida que o tempo passa, o pico de concentração diminui e o comprimento ocupado pela base aumenta, indicando que a massa fica distribuída em uma porção maior. Além disso, embora os gráficos da Figura 3 sejam similares, a diferença sutil entre eles é que os gráficos do lado esquerdo, a menos de constantes, tem comportamento similar ao da função $g(t) = \frac{e^{-\frac{(c-t)^2}{t}}}{\sqrt{t}}$, enquanto os do lado direito são similares a $h(x) = e^{-(x-c)^2}$, com atenção aos detalhes, pode-se perceber que os gráficos do lado esquerdo não possuem simetria, os do lado direito sim.

3.3 Quantidade de massa e transbordamento em um intervalo

A condição (5) trata da distribuição da quantidade total de massa ao longo da reta real, e pode ser restringida a uma região específica, por exemplo, entre as posições a e b , com $a < b$, obtendo assim o volume de massa presente na região, em um tempo fixo t_0 . Admitindo o volume de controle como um sólido com seção transversal (veja Figura 4) constante, de área A , a quantidade de massa em um subconjunto $[a, b]$ do volume de controle, ou nele todo, pode ser obtida com o mesmo processo da Integral de Riemann. Uma vez que concentração é massa dividida por volume, ou equivalentemente, massa é volume multiplicada por concentração, o processo das aproximações via Somas de Riemann, levam ao valor da quantidade de massa em um intervalo $[a, b]$, em um instante t_0 :

$$Q([a, b], t) = A \int_a^b C(x, t_0) dx. \quad (11)$$

Ao observar a curva azul do lado direito da Figura 3 ($t = 5$ dias), vê-se que o cálculo de $Q([140, 300], 5)$ retorna a quantidade total de massa do sistema, enquanto $Q([140, 220], 5)$ retorna aproximadamente metade da massa e $Q([0, 140], 5) = Q([300, 400], 5) = 0$.

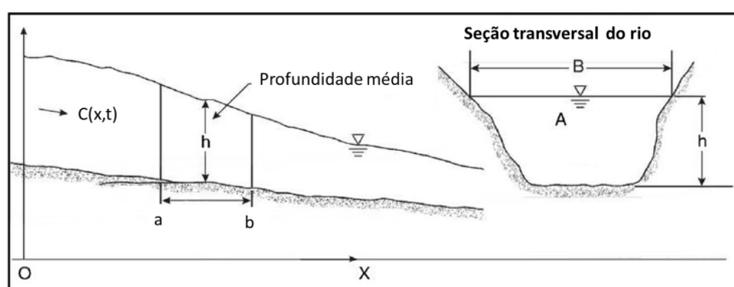


Figura 4: Esquema do rio em um sistema de coordenadas. Adaptado de Droppo e Krishnappan (2016, p. 2758).

Além disto, dada uma função $s(x)$, tal que $A \int_a^b s(x) dx$ fornece capacidade suportada pelo volume de controle no intervalo $[a, b]$, o valor

$$T([a, b], t) = A \int_a^b [C(x, t_0) - s(x)] dx \quad (12)$$

fornece o volume de massa não suportado pelo volume de controle (transbordamento), no instante t , entre as posições a e b .

Observando a Figura 5, note que a área colorida representa, após ser multiplicada por A , a quantidade de massa que o volume de controle não suporta. O cálculo da área abaixo da curva $C(x, t_0)$ (em azul), também após ser multiplicado por A , representa a quantidade de lama presente no trecho escolhido.

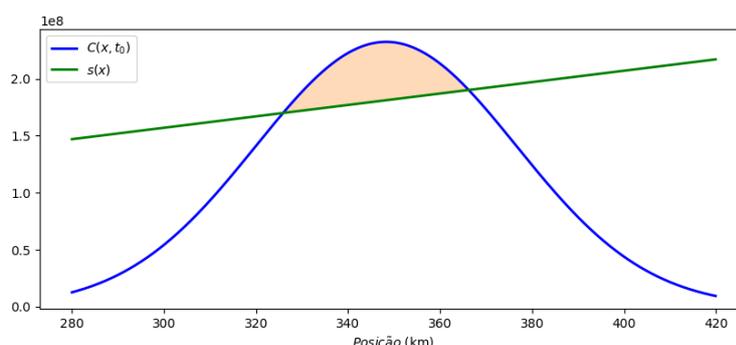


Figura 5: Curvas cujas integrais representam a quantidade de massa transportada e a suportada pelo volume de controle, em um instante t_0 fixo.

4 Aplicação ao desastre do Rio Doce

Desastre pode ser definido como um evento traumático, com início abrupto que é experimentado coletivamente, pode ser atribuído a causas naturais, tecnológicas ou humanas (RUDENSTINE; GALEA, 2012, p. 6). Desastres provocam impactos imensuráveis nas populações e nos ecossistemas afetados, causando efeitos ambientais e socioeconômicos devastadores como, por exemplo, destruição de casas e infraestruturas e contaminação da água, ameaçando a saúde da população e extinguindo espécies (BUTTON, 2014, p. 11; RUDENSTINE; GALEA, 2012, p. 8). É importante entender e prever estes desastres para garantir uma melhor qualidade de vida para as pessoas e menores impactos ao meio ambiente (CUTTER, 2001, p. 61).

Muitos desastres ambientais estão associados à mineração de compostos metálicos, pois o processo de extração e beneficiamento do minério produz, devido à baixa concentração do metal no minério, volumes significativos de rejeitos que nem sempre são manejados de maneira correta (ABRÃO, OLIVEIRA, 1998, p. 431; BELL, 1999, p. 503). Quando a extração mineral ocorre por processo úmido, os rejeitos originam uma espécie de lama, que é depositada em uma barragem (ABRÃO, OLIVEIRA, 1998, p. 431). Porém, mesmo com as legislações pertinentes e a fiscalização, na história ocorreram muitas falhas catastróficas das barragens de rejeitos, por exemplo, a falha de uma barragem em Buffalo Creek, Virgínia- EUA, em 1972 que destruiu 1500 casas e custou 118 vidas (BELL, 1999, p. 505). Da mesma maneira, ocorreu uma falha na barragem, na cidade de Mariana (MG), em 5 de novembro de 2015 carregando aproximadamente 50 milhões de m^3 de rejeitos da mineração de ferro para o Rio Gualaxo do Norte, que depois desaguou no Rio Doce (IBAMA, 2015, p. 3; SAMARCO, 2015, p. 3).

Neste trabalho, o derramamento da lama da barragem de rejeito no rio foi o cenário escolhido para a aplicação da ETAD e análise das informações que ela pode oferecer.

4.1 Metodologia

A metodologia consiste da aplicação do modelo: a ETAD para estudar o comportamento da lama no Rio Doce. Inicialmente, foi realizado levantamento bibliográfico da área de estudo, a caracterização da área de estudo e a verificação da aplicabilidade do modelo ao desastre. Em seguida, foi realizada a estimativa dos parâmetros de entrada do modelo, a partir de dados encontrados na literatura ou fornecidos por órgãos governamentais como a Agência Nacional das Águas (ANA) e o Instituto Brasileiro do Meio Ambiente e dos Recursos Naturais Renováveis (IBAMA). Por fim, foi aplicado o modelo à situação do Rio Doce e os resultados obtidos foram analisados.

4.2 Área de estudo

A área de estudo está inserida na Bacia Hidrográfica do Rio Doce, uma bacia com área de drenagem de 86715km^2 , com 86% da área dentro do estado de Minas Gerais (MG) e 14% no estado do Espírito Santo (ES), no Sudeste do Brasil. Dessa forma, a área de estudo restringe-se ao trecho da bacia atingida pela lama, desde a cidade de Mariana (MG) até a foz do Rio Doce, na cidade de Linhares (ES). Este trecho compreende o trajeto da lama que partiu da barragem, atingiu o Rio Gualaxo do Norte, em seguida desaguou no Rio Doce e por fim o Oceano Atlântico (AGÊNCIA NACIONAL DE ÁGUAS, 2016; COMITÊ DA BACIA HIDROGRÁFICA DO RIO DOCE, 2016).



Figura 6: Trecho da Bacia do Rio Doce atingido pela lama de Mariana-MG a Linhares-ES. Fonte: adaptado de Agência Nacional de Águas, 2016.

4.3 Hipóteses da ETAD e obtenção dos parâmetros

É importante observar que as informações referentes a maioria dos parâmetros envolvidos na ETAD depende de características intrínsecas do rio e podem ser obtidas a qualquer momento, as excessões são a quantidade de lama ou poluente e a velocidade média de deslocamento da onda, que podem ser obtidas de informações nas primeiras horas do desastre, em divulgações de órgãos oficiais ou da imprensa. Especificamente neste trabalho, a quantidade de lama foi obtida de informações oficiais divulgadas e a velocidade foi calculada através de reportagens que acompanharam o deslocamento da onda de lama nas primeiras 45 horas, com base nestas foi estimada

a velocidade com a qual ela se deslocaria até o oceano. Desta forma, acredita-se que, se aplicado simultaneamente ao desastre, o modelo é capaz de indicar (prever), o tempo necessário para que a onda de lama chegue às localidades ainda não atingidas e ao oceano, permitindo tomar providências que protejam as pessoas e minimizem os danos.

O modelo dado pela ETAD (4) considera uma única entrada de lama no rio, a mistura “água-lama” homogênea, a velocidade constante e a área de seção transversal do rio constante. O trecho da bacia do Rio Doce atingido pela lama, desde a Barragem até a foz possui aproximadamente $C = 674,4 \times 10^3 \text{ m}$ e foi determinada via ferramenta de medir distâncias do Google (c2016), com a qual foi estimado o comprimento da curva que segue o percurso do rio, por aproximações poligonais. Para o cálculo da largura média do rio, a mesma ferramenta foi utilizada, obtendo medições em 19 pontos distintos entre Mariana e Linhares e calculando a média aritmética destas, que foi igual a $L = 336,52 \text{ m}$, confira detalhes no Apêndice A. Já a profundidade média considerada foi $P = 3 \text{ m}$ (GONÇALVES, 2015). Desta forma, foi adotada como seção transversal do rio o retângulo de lados 336,52 e 3, obtendo área de seção transversal $A = 1009,56 \text{ m}^2$. Outro dado relativo às características do percurso obtido foi a altitude da Barragem do Fundão, estimada em $H = 756 \text{ m}$, pela ferramenta de definição de percurso do aplicativo Strava (c2016).

De posse destes dados básicos, relativos às características do leito dos rios, da bacia e dos locais de início e fim do percurso da lama, pode-se dar início ao próximo passo, a obtenção dos parâmetros necessários para a obtenção da ETAD (4), quantidade de massa derramada no rio, M , velocidade do fluxo do Rio V e o coeficiente de dispersão longitudinal E . Considerando as informações publicadas acerca da massa de lama: composta por 70% de água e 30% de rejeito (SOUZA; SANTOS FILHO, 2015), possui volume $0,05 \text{ km}^3$, densidades da água $1,00 \text{ kg/m}^3$ e do rejeito $3740,00 \text{ kg/m}^3$ (SILVA *et al*, 2006, p. 47), calculou-se a massa total de lama $M = 56135 \times 10^6 \text{ kg}$.

A velocidade média $V = 0,5039 \text{ m/s}$ foi estimada via aproximação exponencial, analisando a velocidade média da onda nas primeiras 45 horas, confira detalhes no Apêndice B.

Segundo Chapra (1997, p. 245), o coeficiente de dispersão longitudinal depende da velocidade de cisalhamento V^* , que por sua vez depende da aceleração da gravidade g e da declividade do leito do rio D :

$$E = \frac{0,011(V^2 L^2)}{P V^*}, \quad (13)$$

sendo

$$V^* = \sqrt{g P D}. \quad (14)$$

Considerando os dados obtidos $H = 756$ e $C = 674,4 \times 10^3$ monta-se um triângulo retângulo com estes catetos, sendo C horizontal e a declividade do leito do rio pode ser obtida via relações no triângulo retângulo, resultando em $0,06425$ graus, ou em radianos $D = 0,001121$. Admitindo então a aceleração da gravidade $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ (POPLE, 1999, p. 23), pode-se estimar $V^* = 0,1815 \text{ m/s}$ e finalmente $E = 580,91 \text{ m}^2/\text{s}$. Portanto, a ETAD (4) que traduz, segundo os dados levantados, reunidos na Tabela 1, a situação do desastre na Bacia do Rio Doce é:

$$C(x, t) = \frac{65701 \times 10^4}{\sqrt{t}} e^{-\frac{[x - (0,5039)t]^2}{(2323,64)t}} \quad (15)$$

Parâmetro	Unidade	Significado	Forma de obtenção/referência
C	m	° Comprimento do rio	Google Maps (c2016)
L	m	° Largura média do rio	Google Maps (c2016)
P	m	° Profundidade média do rio	Gonçalves (2015)
A	m^2	° Área da seção transversal	$A = L.H$
H	m	° Altitude inicial menos a final	Strava (2016)
M	kg	• Massa de lama	Silva <i>et al</i> (2006, p. 47)
V	m/s	• Velocidade do fluxo do rio	Confira Apêndice B
g	m/s	° Aceleração da gravidade	Pople (1999, p. 23)
D	-	° Declividade do leito do rio	Valor em radianos da inclinação média
V^*	m/s	° Velocidade de cisalhamento	$V^* = \sqrt{gPD}$
E	m^2/s	• Coeficiente de dispersão	$E = \frac{0,0011(V^2L^2)}{PV^*}$

Tabela 1: Parâmetros necessários para se obter a ETAD (15)

o: Parâmetros que independem de informações do desastre

•: Parâmetros que podem ser obtidos algumas horas após o desastre

5 Resultados

A equação (15) é o resultado da modelagem realizada, com informações disponíveis nas primeiras 45 horas, para o transporte da massa oriunda do rompimento da Barragem do Fundão, causando o desastre ambiental no Rio Doce, sob a perspectiva do transporte da lama pelos processos de advecção e difusão. Conforme descrito nas Seções 3.2 e 3.3, esta equação fornece informações importantes acerca do deslocamento da onda de lama em seu trajeto.

Inicialmente, uma mudança simples de variável permitirá avaliar as informações contidas em (15) em quilômetros por dia, ao invés de metros por segundo, facilitando a visualização dos gráficos. Para isto, basta tomar $C^*(x, t) = C(1000x, 86400t)$, C^* é a função que mede a concentração nas variáveis quilômetro e dia.

$$C^*(x, t) = \frac{65701x10^4}{\sqrt{86400t}} e^{-\frac{[1000x - (0,5039)(86400)t]^2}{(2323,64)(86400)t}}. \quad (16)$$

Assim, é possível verificar a disposição da lama no rio em uma data fixada ou mesmo, ao fixar uma posição, descobrir como a lama se deslocará naquela posição, com relação ao tempo.

É possível notar no gráfico da Figura 7 que a variação da concentração de lama em diferentes posições do rio, localizadas a 200 ou 674 km do local de rompimento da barragem, tem o seguinte comportamento: decorrido um t específico, a concentração de lama começa a aumentar, atinge seu pico e depois diminui suavemente tendendo a uma com concentração de equilíbrio, comportamento esperado, considerando a expressão da solução.

Na Figura 8, onde o tempo foi fixado e a posição varia, pode-se ver a distribuição da lama no rio no décimo e na metade do décimo quinto dia após o rompimento, concentrada nas posições 450 e 675 km, respectivamente.

Em particular, nos gráficos do lado direito das Figuras 7 e 8, observa-se que é considerada a foz do Rio Doce, em Linhares a aproximadamente 674 km do local do rompimento. Nota-se que o pico da concentração de lama ocorreu entre o décimo quinto e décimo sexto dias, valor muito próximo aos 16 dias, 7 horas e 40 minutos divulgados, sendo 22 de novembro de 2015 o dia chegada da lama na foz do Rio Doce (MACHADO, 2016), o que justifica a aplicação do modelo neste cenário.

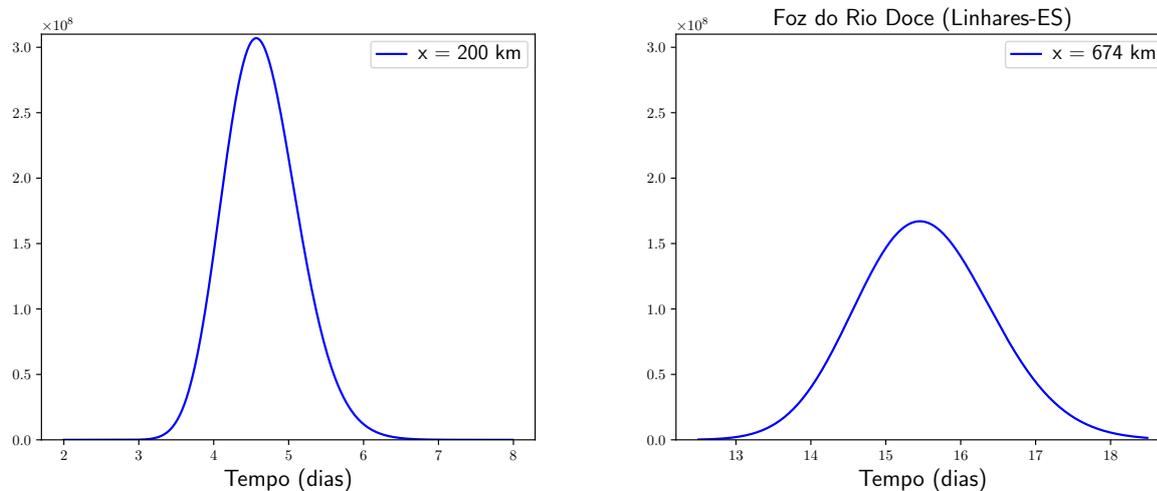


Figura 7: Posições fixas

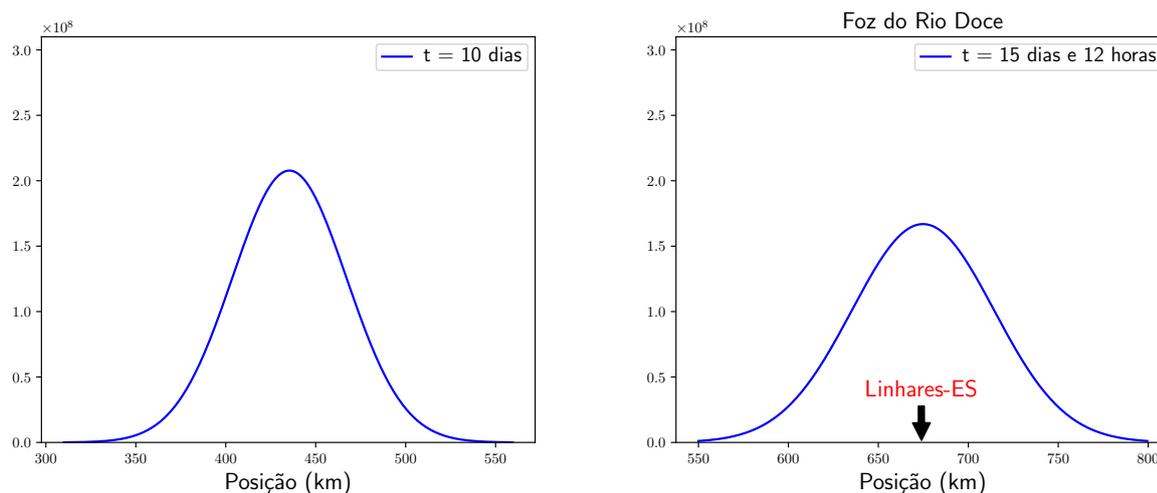


Figura 8: Dias fixos

6 Considerações finais

Diante do que foi exposto, este trabalho tratou de estabelecer um modelo simples para o desastre do Rio Doce, estimando características do transporte da lama pelo rio por um modelo unidimensional de transporte de massa por advecção e difusão, oferecendo rapidez e facilidade na obtenção de dados e resultados satisfatórios para um estudo prévio. O modelo pode fornecer a distribuição da lama ao longo do rio, indicar, com base em informações disponíveis nas primeiras 45 horas, o tempo transcorrido para ela atingir o oceano e mostrou-se útil para compreender o comportamento do poluente. Em situações semelhantes, comunidades ainda não atingidas podem ser auxiliadas na previsão do momento da chegada do poluente, podendo tomar providências de evacuação, interrupção da captação de água para proteção de máquinas como bombas d'água, adaptação de barragens, dentre outras medidas possíveis para contenção de danos ao rio e às comunidades situadas em suas

margens, quanto menos danos, mais fácil será a recuperação do rio. Também contribui para descrever e prever o comportamento de poluentes em outras diversas situações de transporte de massa em rios, exemplificando a contribuição da modelagem matemática como ferramenta para evitar, prever e modelar desastres ambientais.

O fato do estudo em questão prever uma homogeneidade da mistura água lama e considerar o rio como uma calha uniforme, o faz transportar toda a lama para fora do rio em um tempo muito menor do que ocorre na realidade, a homogeneidade da mistura está relacionada a uma forte atuação do fenômeno de difusão. Segundo Chapra (1997, p. 163), em situações de transporte, é possível mensurar o equilíbrio ou não entre os processos de advecção e difusão, utilizando o número adimensional de Peclet,

$$Pe = \frac{CV}{E} = \frac{(674400)(0,5039)}{580,91} = 584,99.$$

A taxa de transporte por advecção ou difusão varia de acordo com o número de Peclet, quando $P > 1$ o transporte por advecção é predominante, e quando $P < 1$ a predominância é do transporte por difusão. Considerando a constante Pe encontrada, sabe-se que o processo de advecção é predominante no Rio Doce e que este processo depende diretamente da vazão e da velocidade do fluxo do rio, as quais sofreram grandes alterações durante o desastre, uma vez que um grande volume de lama foi deslocado, interferindo significativamente na vazão e velocidade do rio.

Neste sentido, um modelo mais complexo, que permita estimar a quantidade de lama depositada no fundo do leito do rio, deve fornecer melhores resultados quanto ao tempo necessário para que a lama depositada no fundo seja lentamente transportada para fora do rio, ou mesmo, apontar a necessidade da remoção mecânica desta lama.

Para finalizar, serão apontadas possíveis melhorias no modelo da ETAD, que podem contribuir para uma nova versão, levando em conta a variação de diversos parâmetros. Isto pode ser feito ao serem consideradas funções velocidade e área de seção transversal variáveis no modelo, o que levaria a uma equação do transporte do tipo

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial [C(x,t)V(x,t)]}{\partial x} + E(x,t)\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ C(0,t) = F(t) & t > 0, \end{cases} \quad (17)$$

sendo $F(t)$ uma função que descreva o volume de lama derramado no rio com o passar do tempo.

Este sistema de equação e condição inicial, não faz parte dos modelos clássicos, consequentemente não possui solução analítica conhecida. Neste caso, são necessários métodos numéricos computacionais para exibir uma aproximação da solução, obtendo assim uma versão que acreditamos ser mais precisa na interpretação da situação ocorrida. A função $V(x,t)$ pode ser obtida com uma adaptação do método empregado no Apêndice B, já $E(x,t)$, depende de $V(x,t)$, da largura $L(x)$ e da profundidade $P(x)$ do rio, além da declividade e pode ser estimada com uma adaptação das medidas feitas no Apêndice A.

Ainda considerando o problema (17), é possível buscar a incorporação de funções modeladoras, baseadas na condição (12), que estimem o volume que transbordou pelas margens do rio, não retornando para seu curso. Uma versão melhorada da ETAD pode levar em conta a massa transbordada, excluindo-a da massa total, de forma que ela não componha o volume transportado após aquela posição.



7 Referências Bibliográficas

- ABRÃO, P. C.; OLIVEIRA, S. L. Mineração. In: OLIVEIRA, A. M. S.; BRITO, S. N. A. (ed.). **Geologia de engenharia**. São Paulo: ABGE, 1998.
- AGÊNCIA NACIONAL DE ÁGUAS. **Encarte especial sobre a Bacia do Rio Doce: rompimento da barragem em Mariana/MG**. 2016. Disponível em: http://arquivos.ana.gov.br/RioDoce/EncarteRioDoce_22_03_2016v2.pdf. Acesso em: 18 set. 2020.
- BELL, F. G. **Geological hazard: their assessment, avoidance and mitigation**. London: CRC Press, 1999.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- BRUNETTI, F. **Mecânica dos fluidos**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.
- BUTTON, G. **Disaster culture: knowledge and uncertainty in the wake of human and environmental catastrophe**. Walnut Creek: Routledge, 2014.
- CARNEIRO, E. M. M. Da água para a lama. **Jornal da Unicamp**, Campinas, 07 mar. 2018. Disponível em: <https://www.unicamp.br/unicamp/ju/noticias/2018/03/07/da-agua-para-lama>. Acesso em 18 set. 2020.
- COMITÊ DA BACIA HIDROGRÁFICA DO RIO DOCE. **A bacia**. 2016. Disponível em: <http://www.cbhdoce.org.br/institucional/a-bacia>. Acesso em: 18 set. 2020.
- CHAPRA, S. C. **Surface water- quality modeling**. New York: McGraw-Hill, 1997.
- CUTTER, S. L. (ed.). **American hazardscapes: the regionalization of hazards and disasters**. Washington: Joseph Henry Press, 2001.
- DROPPO, I. G.; KRISHNAPPAN, B. G. Modeling of hydrophobic cohesive sediment transport in the Eells River Alberta, Canada. **Journal Soils and Sediments**, v. 16, p. 2753-2765, jul. 2016.
- EVANS, L. C. **Partial differential equations**. Providence: American Mathematical Society, 1999. (Graduate Studies in Mathematics, v. 19).
- FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada - CNPq, 1977.
- FISCHER, H. B. *et al.* **Mixing in inland and coastal waters**. New York: Academic Press, 1979.
- FRAGOSO JÚNIOR, C. R.; FERREIRA, T. F.; MARQUES, D. M. **Modelagem ecológica em ecossistemas aquáticos**. São Paulo: Oficina de Textos, 2009.
- GONÇALVES, A. L. **Degradação ambiental causa seca da foz do Rio Doce pela primeira vez**. Hoje em dia. Atualizado em 26/06/2015 08h09. Disponível em: <https://www.hojeemdia.com.br/horizontes/degrada%C3%A7%C3%A3o-ambiental-causa-seca-da-foz-do-rio-doce-pela-1%C2%AA-vez-1.312412>. Acesso em: 18 set. 2020.
- GOOGLE. **Maps**. c2016. Mapa extraído do Google Maps. Disponível em: maps.google.com.br. Acesso em: 29 jun. 2016.
- HATJE, V. *et al.* The environmental impacts of one of the largest tailing dam failures worldwide. **Scientific Reports**, v. 7, Article number: 10706, 2017.



HUTTER, K.; JÖHNK, K. **Continuum methods of physical modeling: continuum mechanics, dimensional analysis, turbulence.** Berlin: Springer-Verlag, 2004.

IBAMA. **Laudo técnico preliminar: impactos ambientais decorrentes do desastre envolvendo o rompimento da barragem de Fundão, em Mariana, Minas Gerais.** 2015. Disponível em: http://www.ibama.gov.br/phocadownload/barragemdefundao/laudos/laudo_tecnico_preliminar_Ibama.pdf. Acesso em: 18 set. 2020.

Lama de barragens de Mariana chega ao Rio Doce, no Leste de Minas. G1 Vales de Minas Gerais. Atualizado em 07/11/2015 18h12. Disponível em <http://g1.globo.com/mg/vales-mg/noticia/2015/11/lama-de-barragens-de-mariana-chega-ao-rio-doce-no-leste-de-minas.html>. Acesso em: 18 set. 2020.

Lama de mineradora que se rompeu em Mariana deve atingir o Rio Doce. G1 Vales de Minas Gerais. Atualizado em 07/11/2015 08h22. Disponível em: <http://g1.globo.com/mg/vales-mg/noticia/2015/11/lama-de-mineradora-que-se-rompeu-em-mariana-deve-atingir-o-rio-doce.html>. Acesso em: 18 set. 2020.

MACHADO, V. **Lama no Rio Doce: linha do tempo mostra o desastre no Espírito Santo.** G1 Espírito Santo, Globo.com. Atualizado em 05/05/2016 10h37. Disponível em: <http://g1.globo.com/espírito-santo/desastre-ambiental-no-rio-doce/noticia/2016/05/lama-no-rio-doce-linha-do-tempo-mostra-o-desastre-no-espírito-santo.html>. Acesso em: 18 set. 2020.

MILANEZ, B.; LOSEKANN, C. (org.) **Desastre no Vale do Rio Doce: antecedentes, impactos e ações sobre a destruição.** Rio de Janeiro: Folio Digital, 2016.

POPLE, S. **Complete physics.** Oxford: Oxford University Press, 1999.

POTTER, M. C.; WIGGERT, D. C.; RAMADAN, B. H. **Mecânica dos fluidos.** São Paulo: Cengage Learning, 2015.

RIVORD, J. *et al.* Modeling contaminant spills in the Truckee River in the Western United States. **Journal of Water Resources Planning and Management**, v. 140. n. 3. p. 343-354, 2014.

ROMPIMENTO DA BARRAGEM EM MARIANA. *In:* WIKIPÉDIA: a inciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Rompimento_de_barragem_em_Mariana. Acesso em 18 set. 2020.

RUDENSTINE, S.; GALEA, S. **The causes and behavioral consequences of disasters: models informed by the global experience 1950-2005.** New York: Springer-Verlag, 2012.

SAMARCO. **Fazer o que deve ser feito. Esse é o nosso compromisso.** 15 de dezembro de 2015. Disponível em: https://www.samarco.com/wp-content/uploads/2015/11/DossieSamarco_15_12-2.pdf. Acesso em: 10 dez. 2017.

SCIPY. **scipy.optimize.curve-fit.** Disponível em: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.curve_fit.html. Acesso em: 18 set. 2020.

SILVA, G. P. *et al.* Caracterização química, física e mineralógica de estereis e rejeito da mineração de ferro da Mina de Alegria, Mariana-MG. **Pesquisa Agropecuária Tropical**, n.36, n. 1, p. 45-52, 2006. Disponível em: <https://www.revistas.ufg.br/pat/article/view/2171>. Acesso em: 18 set. 2020.

SOCOLOFSKY, S. A.; JIRKA, G. H. **Special topics in mixing and transport processes in the environment: engineering lectures.** 5th ed. College Station: Texas A&M University, 2005.



SOUZA, M. J.; SANTOS FILHO, N. G. Barragens de rejeito. **Revista Jurídica** v. 7. n. 1. 2015. Disponível em: http://www.atenas.edu.br/uniatenas/assets/files/magazines/BARRAGENS_DE_REJEITO.pdf. Acesso em: 18 set. 2020.

STRAVA. Disponível em: www.strava.com. Acesso em: 1 jul. 2016.

ZHENG, C.; BENNETT, G. D. **Applied contaminant transport modeling: theory and practice**. New York: Van Nostrand Reinhold, 1995.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais**. Tradução: Antonio Zumpano. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. v. 2.



A Largura média do curso dos rios afetados pela onda de lama

Local	Coordenadas	Largura (m)	Distância* (m)
Barragem Santarém ^A	20°13'09.8"S 43°27'29.2"W	129	2.200
Bento Rodrigues ^A	20°14'15.3"S 43°25'20.2"W	32,7	3.000
Paracatu de Baixo ^A	20°18'04.5"S 43°13'50.8"W	22,8	42.600
Pedras ^A	20°17'09.8"S 43°11'40.4"W	19,4	49.150
Gesteira ^A	20°15'29.9"S 43°07'25.5"W	18,3 m	64.400
Barra Longa ^B	20°16'59.6"S 43°02'45.3"W	58,4	79.130
São José de Entre Montes ^C	20°14'53.9"S 42°53'07.4"W	36	109.110
H.E. Risoleta Neves ^C	20°12'32.2"S 42°51'04.0"W	42,8	118.750
Revés do Belém ^C	19°34'45.7"S 42°29'29.5"W	199,2	243.450
Ipatinga, após afluente Piracicaba ^C	19°29'37.9"S 42°30'30.9"W	242,2	262.550
Naque, após afluente Sto Antonio ^C	19°14'16.2"S 42°18'39.8"W	243,8	310.100
Governador Valadares ^C	18°50'52.3"S 41°54'10.7"W	365	373.830
Conselheiro Pena ^C	19°09'53.8"S 41°27'43.6"W	379,7	451.080
Resplendor ^C	19°19'58.9"S 41°15'08.0"W	431,3	484.890
Barragem próxima a Aimorés ^C	19°27'25.4"S 41°05'48.4"W	394,7	510.690
H.E. Mascarenhas ^C	19°30'01.3"S 40°55'05.3"W	348,5	532.690
Colatina ^C	19°32'00.3"S 40°37'44.0"W	647	567.160
Linhares ^C	19°24'46.8"S 40°03'55.7"W	534	632.800
Foz do Rio Doce ^C	19°36'31.0"S 39°48'39.5"W	950	674.400

Tabela 2: Medidas obtidas via imagens de satélite, fontes: maps.google.com.br (Ferramenta medir distâncias), consultado em 29/06/2016. A: Rio Gualaxo do Norte, B: Rio do Carmo, C: Rio Doce, *: Distância desde o local do rompimento.

B Estimativa da velocidade média da onda de lama

A velocidade da onda de lama foi estimada com base em informações colhidas nas primeiras 45 horas após o rompimento da barragem.

Posição	Local	Data e horário	Velocidade média
0 km	Barragem do Fundão	05/11 às 16:20	-
3 km	Bento Rodrigues	06/11 às 16:35	3.33 m/s
119 km	Usina Risoleta Neves	06/11 às 06:30	2.35 m/s
200 km	Cachoeira dos Óculos	06/11 às 22:00	1.88 m/s
262 km	Santana do Paraíso	07/11 às 13:00	1.64 m/s

Tabela 3: Dados iniciais da onda de lama*.

*Informações coletadas em Wikipedia (2019), Milanez e Loseann (2016, p. 126), Carneiro (2018), Lama de barragens de Mariana chega ao Rio Doce, no Leste de Minas. Lama de mineradora que se rompeu em Mariana deve atingir o Rio Doce, G1 Vales de Minas (2015).

Com as informações da tabela anterior, foi feita uma aproximação exponencial da velocidade média, utilizando programação em Python (SCIPY, 2019). Uma função $m(x)$ foi utilizada para aproximar a velocidade média entre o local do rompimento e a posição x , a função exponencial que melhor aproximou as informações da velocidade nas primeiras 45 horas foi $m(x) = (3.33)e^{-(0.0028)x}$, x em quilômetros.

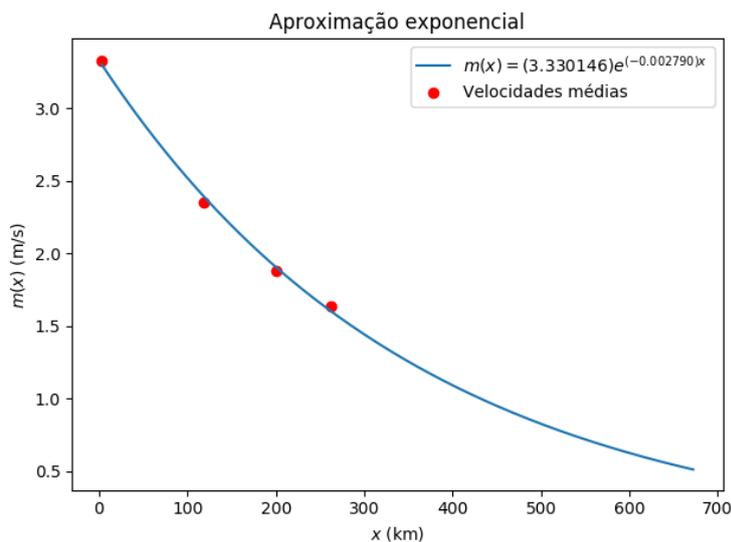


Figura 9: Velocidades médias e aproximação exponencial.

Assim, fazendo $x = 674.4$, foi obtida a estimativa para a velocidade média no trajeto percorrido pela lama desde a Barragem do Fundão até a foz do Rio Doce, $m(674.4) = 0.5039$.