Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN2316-9664
v. 22, n. 1, jul. 2022

Rogério César dos Santos
FUP/UnB
Universidade de Brasília
rogerc@unb.br

Wescley Well Vicente Bezerra
FUP/UnB
Universidade de Brasília
wescley@unb.br

Segmentos cônicos e suas propriedades

Conic segments and their properties

Resumo

Este artigo tem por objetivo definir segmento elíptico e segmento hiperbólico, e apresentar suas interessantes propriedades, em cada uma das respectivas cônicas. Foi utilizada, para a prova, a mesma estratégia de demonstração adotada no caso da parábola que se tornou conhecido por meio de um recente trabalho. A conclusão a que chegamos no presente artigo é que a razão entre os comprimentos de dois segmentos cônicos, tanto na elipse quanto na hipérbole, depende unicamente das distâncias de cada segmento ao(s) vértice(s) da cônica respectiva, assim como ocorre na parábola. Precisamente, na hipérbole, o quadrado da razão entre os comprimentos de dois segmentos hiperbólicos é igual ao produto das distâncias do primeiro segmento aos vértices da hipérbole, dividido pelo produto das distâncias do segundo segmento aos vértices dessa cônica. No caso da elipse, o resultado é precisamente o mesmo, porém considerando os vértices inferior e superior da curva.

Palavras-chave: Cônicas. Segmentos cônicos. Hipérbole. Elipse.

Abstract

The objective of this paper is to define elliptic segment and hyperbolic segment, and present their interesting properties, in each of their respective conics. The same demonstration strategy adopted in the parabola case that became known through a recent work was used for proof. The conclusion reached in this paper is that the ratio between the length of two conic segments, both in ellipse and hyperbola, depends solely on the distances from each segment to the vertex/vertices of the respective conic, as occurs in the parabola. Precisely, in hyperbola, the square of the ratio between the lengths of two hyperbolic segments is equal to the product of the distances from the first segment to the vertices of the hyperbola, divided by the product of the distances from the second segment to the vertices of this conic. In the ellipse case, the result is precisely the same, but considering the lower and upper vertices of the curve.

Keywords: Conics. Conic segments. Hyperbola. Ellipse.

Artigo recebido em fev. 2022 e aceito em abr. 2022

1 Introdução – as cônicas

As cônicas são gráficos cujas figuras planas são obtidas por interseção de um plano com um cone de folha dupla. A cada possível ângulo entre o plano e o eixo central do cone, a interseção gera uma figura distinta. As possibilidades são: circunferência, parábola, elipse e hipérbole.

Dado $r > 0$ e um ponto P do plano, a circunferência é o conjunto dos pontos do plano cujas distâncias ao ponto P (o centro da circunferência) são iguais a r (o raio da circunferência). Dados um ponto P do plano e uma reta d, a parábola é o conjunto dos pontos do plano que possuem distâncias da reta d (a reta diretriz) iguais às do ponto P (o foco da parábola). Dados dois pontos do plano P_1 e P_2, a elipse é o conjunto dos pontos do plano tais que a soma das distâncias aos pontos P_1 e P_2 (focos da elipse) é uma constante. Dados dois pontos do plano P_1 e P_2, a hipérbole é o conjunto dos pontos do plano tais que o módulo da diferença das distâncias aos pontos P_1 e P_2 (focos da hipérbole) é uma constante.

O artigo de Costa (2021) traz a demonstração da caracterização das cônicas, de acordo com o tipo de corte plano sobre o cone.

As cônicas podem também ser caracterizadas por suas equações, que pode ser deduzidas segundo suas definições:

Circunferência de centro na origem e raio r: $x^2 + y^2 = r^2$.

Parábola: $y = ax^2 + bx + c$ ou $x = ay^2 + by + c,\ a \neq 0$.

Elipse de centro na origem: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Hipérbole de centro na origem: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ou $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

Aplicações interessantes das cônicas, em estudos sobre antenas parabólicas, espelhos ou telescópios, por exemplo, podem ser encontradas nos trabalhos de Wagner (1997) e Ávila (1997).

2 Segmentos parabólicos

Vimos no artigo de Silva e Lula (2021) que, dada uma parábola, o quadrado da razão entre os comprimentos de dois de seus segmentos parabólicos é igual à razão entre suas distâncias até o vértice V da parábola, isto é, na figura 1,

$$\left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \frac{h_1}{h_2},$$

entendendo segmento parabólico como aquele que liga dois pontos da parábola que são simétricos com relação ao seu eixo de simetria:

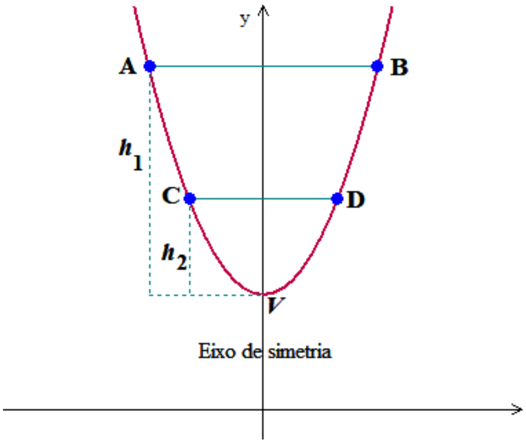

Figura 1 – Segmentos parabólicos.

Nossa proposta, no presente artigo, é obter conclusões semelhantes para a hipérbole e para a elipse, as outras cônicas. Comecemos com a hipérbole.

3 Segmentos hiperbólicos

Seja a hipérbole de equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a > 0$ e $b > 0$, centrada na origem, sem perda de generalidade, pois a translação da mesma não interferirá na propriedade que iremos obter. Os vértices da hipérbole são $V_1 = (a, 0)$ e $V_2 = (-a, 0)$.

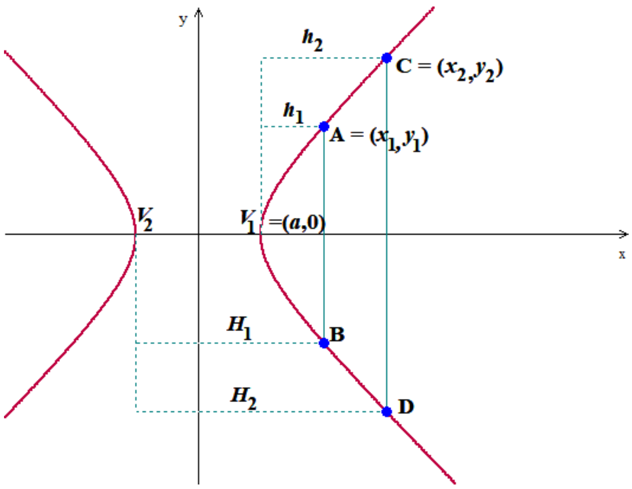

Figura 2 – Segmentos hiperbólicos no ramo direito.

Incentivados pelo resultado da parábola, vamos verificar agora se o quadrado da razão entre os segmentos hiperbólicos, $\left(\frac{AB}{CD}\right)^2$, também possui alguma relação peculiar com suas distâncias ao(s) vértice(s) da hipérbole, onde estamos entendendo por segmento hiperbólico aquele que liga dois pontos da curva que são simétricos com relação ao eixo de simetria x.

Sejam, portanto, $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_1, -y_1)$, com $x_1 > a > 0$ e $y_1 > 0$:

Então, sabendo que

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

e que $a > 0$ e $b > 0$, temos então:

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1$$

e

$$y = \pm b \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}.$$

Logo, substituindo x por x_1 e y por y_1, temos que:

$$AB = 2y_1 = 2b \cdot \sqrt{\frac{{x_1}^2}{a^2} - 1}.$$

Agora, denotemos $C = (x_2, y_2)$ e $D = (x_2, -y_2)$, com $x_2 > x_1 > a > 0$, e $y_2 > y_1 > 0$. Substituindo x por x_2 e y por y_2, temos que:

$$CD = 2y_2 = 2b \cdot \sqrt{\frac{{x_2}^2}{a^2} - 1}.$$

Logo, a razão $\frac{AB}{CD}$ será igual a:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{\sqrt{\frac{{x_1}^2}{a^2} - 1}}{\sqrt{\frac{{x_2}^2}{a^2} - 1}} =$$

$$\frac{\sqrt{x_1^2 - a^2}}{\sqrt{x_2^2 - a^2}} = \sqrt{\frac{(x_1 - a)(x_1 + a)}{(x_2 - a)(x_2 + a)}}.$$

Denotando, de acordo com a figura 2, $h_1 = x_1 - a$ e $h_2 = x_2 - a$ as distâncias dos segmentos hiperbólicos ao vértice direito $V_1 = (a, 0)$ da hipérbole, temos, de $x_1 = h_1 + a$ e $x_2 = h_2 + a$:

$$\frac{AB}{CD} = \sqrt{\frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{h_1 + 2a}{h_2 + 2a}}.$$

Elevando ao quadrado,

$$\left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{h_1 + 2a}{h_2 + 2a}.$$

Enfim, a grata e agradável surpresa:

$$\left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \frac{h_1 H_1}{h_2 H_2},$$

onde H_1 e H_2 são as distâncias dos segmentos AB e CD ao vértice esquerdo $V_2 = (-a, 0)$ da hipérbole, respectivamente. Tal propriedade apresenta semelhança notável com a propriedade da parábola.

Ou seja, a propriedade é: dada a hipérbole da figura 2 de vértices V_1 e V_2, o quadrado da razão entre os comprimentos dos dois segmentos hiperbólicos AB e CD de um mesmo ramo é igual ao produto da distância de AB até V_1 pela sua distância até V_2, dividido pelo produto da distância de CD até V_1 pela sua distância até V_2.

Podemos concluir também que, fixados os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $C = (x_2, y_2)$ sobre a curva, a razão $\frac{AB}{CD}$ referente à figura 2 depende apenas da coordenada a do vértice da hipérbole, não depende do parâmetro b da mesma.

4 Segmentos elípticos

Agora, vejamos o que nos reserva a elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a>0, b>0$, da figura 3, centrada na origem, sem perda de generalidade:

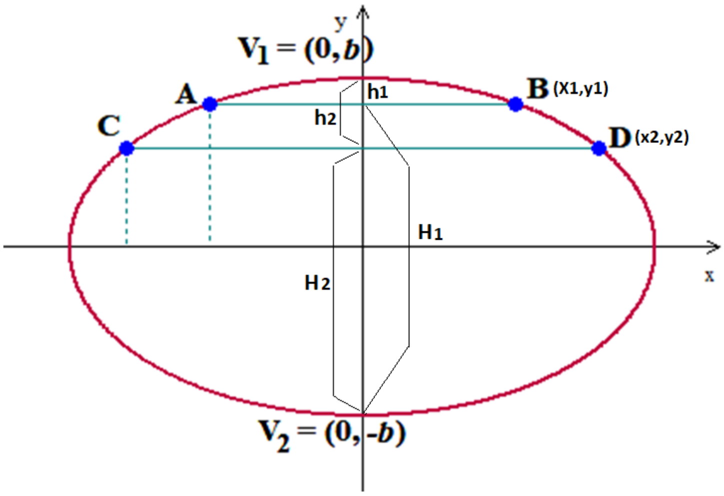

Figura 3. Segmentos elípticos.

Chame $A=(-x_1,y_1)$ e $B=(x_1,y_1)$, com $x_1>0$ e $y_1>0$.
Chame $C=(-x_2,y_2)$ e $D=(x_2,y_2)$, com $x_2>x_1>0$ e $y_1>y_2>0$.
De

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a>0 \text{ e } b>0,$$

temos:

$$\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y^2}{b^2},$$

$$x=\pm a\cdot\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Considere $V_1=(0,b)$ e $V_2=(0,-b)$ os vértices superior e inferior da elipse, localizados no eixo y. Então:

$$\left(\frac{AB}{CD}\right)^2=$$

$$\frac{(2x_1)^2}{(2x_2)^2}=\frac{x_1^2}{x_2^2}=$$

$$\frac{a^2\left(1-\frac{y_1^2}{b^2}\right)}{a^2\left(1-\frac{y_2^2}{b^2}\right)}=\frac{b^2-y_1^2}{b^2-y_2^2}=\frac{(b-y_1)(b+y_1)}{(b-y_2)(b+y_2)}=$$

$$\frac{h_1H_1}{h_2H_2},$$

onde $h_1=b-y_1$ e $h_2=b-y_2$ são as distâncias dos segmentos AB e CD ao vértice superior $V_1=(0,b)$, respectivamente, enquanto que $H_1=b+y_1$ e $H_2=b+y_2$ são as distâncias dos segmentos AB e CD ao vértice inferior $V_2=(0,-b)$, respectivamente.

A propriedade da elipse, portanto, é a análoga a da hipérbole: o quadrado da razão entre os comprimentos de dois segmentos elípticos (segmento elíptico será aquele segmento que liga dois pontos da elipse que são simétricos em relação ao eixo y) é igual ao produto das distâncias de AB até V_1 e de AB até V_2, dividido pelo produto das distâncias de CD até V_1 e de CD até V_2.

Além disso, fixados $B = (x_1, y_1)$ e $D = (x_2, y_2)$ pontos sobre a curva, como na figura 3, concluímos também que a razão $\frac{AB}{CD}$ depende unicamente da coordenada b dos vértices inferior e superior da elipse, não dependendo do parâmetro a dos vértices esquerdo e direito da mesma.

Observamos ainda que, pela simetria da equação da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ com relação às variáveis x e y, é fácil perceber que, se os segmentos elípticos forem verticais (paralelos ao eixo y), então o quadrado da razão entre os seus comprimentos será independente de b, e será dependente de a.

5 A razão independe de um dos parâmetros da hipérbole

Nesta seção, iremos visualizar os resultados obtidos, por meio de Geometria Dinâmica, no caso da hipérbole. Para a elipse, a construção é análoga. No GeoGebra (GEOGEBRA, 2022), podemos fazer variar o parâmetro b da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, b > 0$ e mostrar que a razão encontrada $\frac{AB}{CD} = \sqrt{\frac{(x_1-a)(x_1+a)}{(x_2-a)(x_2+a)}}$ não se modifica, se fixados x_1 e x_2.

Tomemos $a = 1$. Assim, $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, e, portanto, $y = \pm b\sqrt{x^2 - 1}$. Fixemos $x_1 = 3$, e $x_2 = 4$ e construamos os pontos $A = \left(3, b\sqrt{8}\right)$, $B = \left(3, -b\sqrt{8}\right)$, $C = (4, b\sqrt{15})$ e $D = (4, -b\sqrt{15})$, visíveis na figura 4, onde $b = 0{,}5$.

Construamos também a razão $r = \frac{AB}{CD}$, que sabemos vai fornecer $\sqrt{\frac{(x_1-a)(x_1+a)}{(x_2-a)(x_2+a)}} = \sqrt{\frac{(3-1)(3+1)}{(4-1)(4+1)}} = \sqrt{\frac{8}{3 \cdot 5}} \cong 0{,}7303$. A fórmula está visível na figura 5, onde $b = 1{,}3$.

Fazendo b variar, temos que a razão $r = \frac{AB}{CD} = 0{,}73$ não se altera, como se pode ver nas figuras 4 e 5:

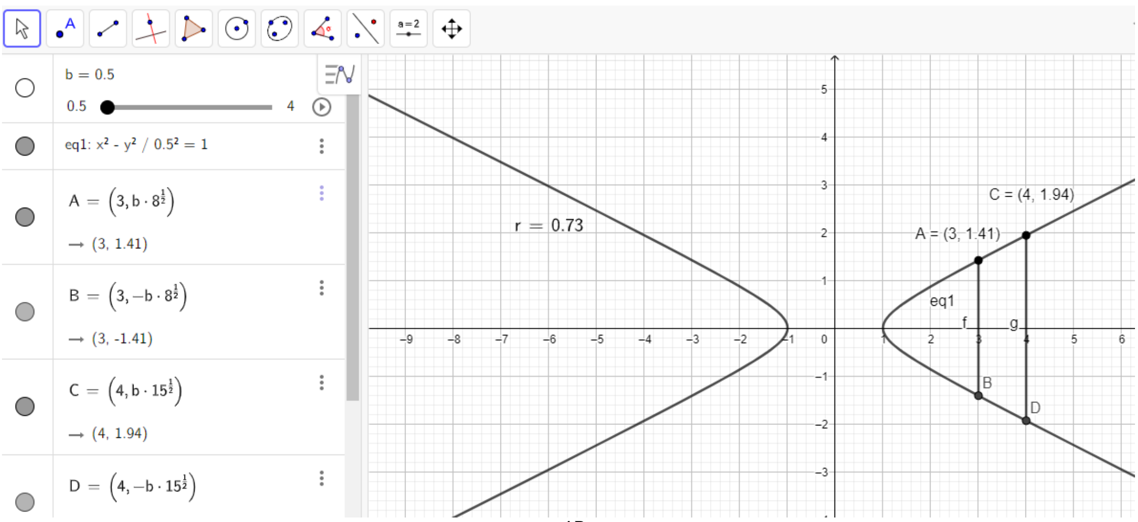

Figura 4 – A razão $r = \frac{AB}{CD} = 0{,}73$, com $b = 0{,}5$.

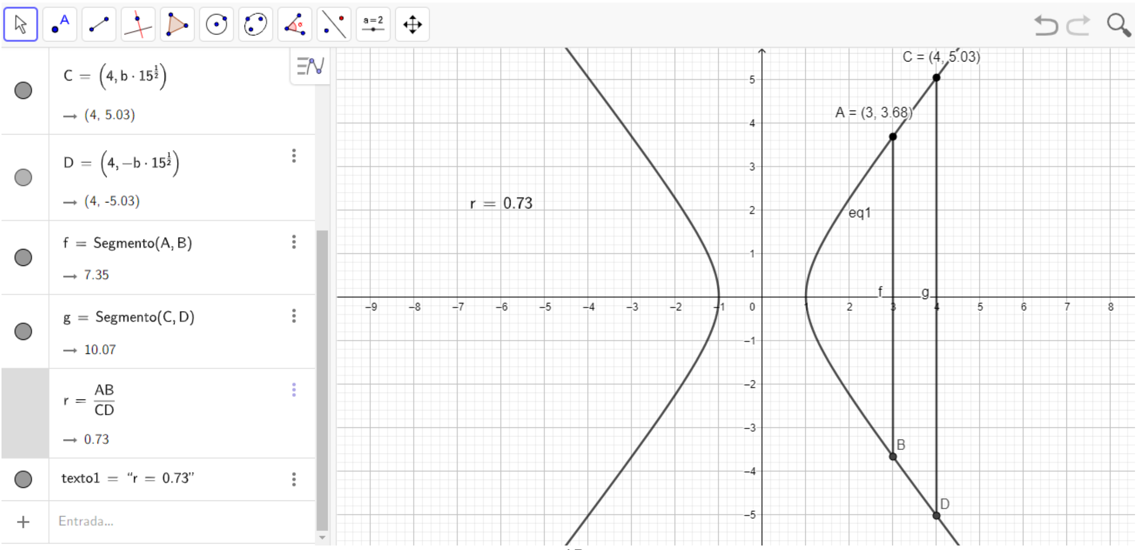

Figura 5 – A razão $r = \frac{AB}{CD} = 0{,}73$, com $b = 1{,}3$.

Visualização dinâmica semelhante se pode fazer com a elipse.

6 Mais sobre a hipérbole

Uma última observação sobre a hipérbole. Com cálculos inteiramente análogos, se mostra que, pegando segmentos hiperbólicos AB e CD que sejam paralelos ao eixo x ao invés de paralelos ao eixo y, a razão $\frac{AB}{CD}$ também independe de um dos parâmetros da hipérbole, mas agora, independe de a.

Ou seja, fixados $A = (x_1, y_1)$ e $C = (x_2, y_2)$, na figura 6, sobre a hipérbole, a razão $\frac{AB}{CD}$ depende apenas de b. Porém, nessa situação, a fórmula não fica padronizada como nos casos anteriores.

Vejamos, portanto, o que ocorre com a razão $\frac{AB}{CD}$, dada a hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ da figura 6.

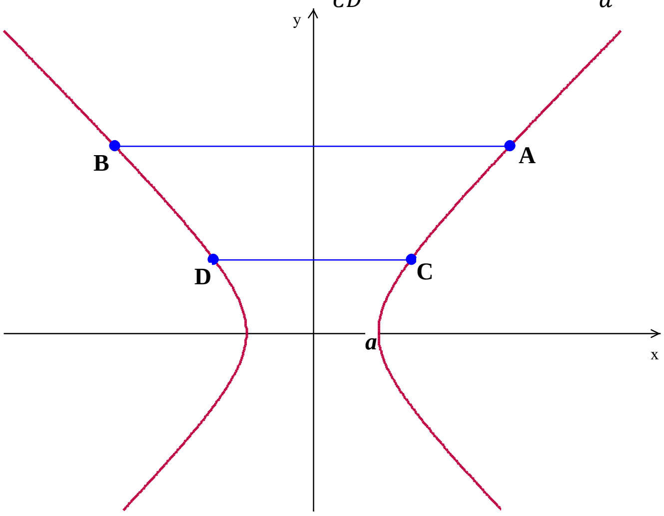

Figura 6 – O outro caso de segmentos hiperbólicos.

Seja $A = (x_1, y_1)$ e tome $B = (-x_1, y_1)$, com $x_1 > a > 0$ e $y_1 > 0$. Então, sabendo que

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

e, que $a > 0, b > 0$, temos:

$$x = \pm a \cdot \sqrt{\frac{y^2}{b^2} + 1}.$$

Logo,

$$AB = 2x_1 = 2a \cdot \sqrt{\frac{{y_1}^2}{b^2} + 1}.$$

Agora, seja $C = (x_2, y_2)$ e tome $D = (-x_2, y_2)$, com $x_1 > x_2 > a > 0$ e $y_1 > y_2 > 0$.

Então,

$$CD = 2x_2 = 2a \cdot \sqrt{\frac{y_2^2}{b^2} + 1}.$$

Logo, a razão $\frac{AB}{CD}$ será igual a

$$\frac{\sqrt{\frac{{y_1}^2}{b^2} + 1}}{\sqrt{\frac{{y_2}^2}{b^2} + 1}}.$$

Assim, elevando ao quadrado,

$$\left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \frac{y_1^2 + b^2}{y_2^2 + b^2}.$$

Chamando y_1 de h_1 e y_2 de h_2, que são as distâncias dos segmentos AB e CD ao centro $(0,0)$ da hipérbole, respectivamente, temos:

$$\left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \frac{h_1^2 + b^2}{h_2^2 + b^2}.$$

O que mostra que, fixados (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sobre a curva (com $y_1 = h_1$ e $y_2 = h_2$), a razão $\frac{AB}{CD}$ não depende da coordenada a do vértice da hipérbole, mas depende do parâmetro b. Observe que a expressão não ficou com a mesma estrutura das anteriores. Construção no GeoGebra semelhante à anterior pode ser feita para mostrar dinamicamente essa independência da razão com relação ao parâmetro a.

7 Considerações finais

Vimos que as cônicas possuem propriedades semelhantes entre si, com relação ao valor do quociente entre os comprimentos de dois de seus segmentos cônicos. Isto é, esse quociente possui estreita relação com as distâncias dos segmentos aos vértices da respectiva curva.

Agora, resta saber se existem propriedades análogas para superfícies no espaço tridimensional, assunto que poderá ser abordado em um próximo trabalho.

8 Referências

ÁVILA, G. A hipérbole e os telescópios. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 34, [1997]. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/34/5.htm. Acesso em: 13 maio 2022.

COSTA, A. As cônicas. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 104, p. 18-24, 2021.

GEOGEBRA. **GeoGebra**. [*S.l.*]: GeoGebra, c2022. Disponível em: https://www.geogebra.org/classic. Acesso em: 8 fev. 2022.

SILVA, N. F.; LULA, K. P. Segmentos parabólicos. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 104, p. 42-43, 2021.

WAGNER, E. Por que as antenas são parabólicas? **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 33, [1997]. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/33/3.htm. Acesso em: 13 maio 2022.