Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 19, dez. 2020
Edição Iniciação Científica

Aplicação da Programação Linear e do Problema do Transporte para otimização da produção agrícola

Linear Programming and Transport Problem Application to optimize agricultural production

Glaucia Maria Bressan
Câmpus Cornélio Procópio
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
glauciabressan@utfpr.edu.br

Thallia Aline Ramos
Câmpus Cornélio Procópio
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
thallia.aline@outlook.com

Resumo

Os recentes avanços tecnológicos nas atividades de produção agrícola tem em vista um conjunto de operações que buscam aumentar a produtividade, diminuir custos e otimizar processos de produção. Assim, o objetivo deste trabalho é otimizar a produção agrícola, maximizando o lucro da produção e minimizando os custos de transporte dos produtos, por meio de Programação Linear. Com a finalidade de resolver estes problemas de Programação Linear, existem algoritmos que podem ser utilizados computacionalmente para obtenção das soluções, como o Método Simplex. Desta forma, este trabalho apresenta um estudo de caso em uma propriedade rural localizada no município de Sertaneja, PR, por meio do estudo de dois problemas de Programação Linear: otimizar a produção agrícola e minimizar o custo de transporte dos produtos, proporcionando melhores soluções quando comparadas com as praticadas no local.

Palavras-chave: Minimização de custos. Maximização de lucros. Método Simplex. Propriedade agrícola.

Abstract

Recent technological advances in agricultural production activities aim at a set of operations that seek to increase productivity, to reduce costs and to optimize production processes. Thus, the objective of this work is to optimize agricultural production, maximizing production profit and minimizing product transport costs, using linear programming. In order to solve these liner programming problems, there are computational algorithms that can be used to obtain solutions, such as the Simplex Method. In this context, this work presents a case study in a rural property located in the Sertaneja city, in the state of Paraná, by studying two Linear Programming problems: to optimize agricultural production and to minimize the cost of transporting the products, providing the best solution for distribution in the desired locations and the profit of vegetable production, increasing productivity, growing healthier products and reducing environmental impacts.

Keywords: Minimization of costs. Profit maximization. Simplex method. Agricultural property.

Artigo recebido em ago. 2020 e aceito em nov. 2020

1 Introdução

O setor agrícola do Brasil tem produzido a maior parte do Produto Nacional Bruto (PNB) e, por meio deste setor, é gerada uma grande parte das oportunidades de emprego, além de constituir na principal fonte de divisas a partir da exportação (NAVARRO, 2010). O agronegócio brasileiro representa uma parcela relevante do PIB nacional, em média, 24% de 1996 a 2018 (CASTRO, 2019). Estudos feitos na Confederação da Agricultura e Pecuária do Brasil, juntamente com o Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada da Universidade de São Paulo (Cepea/USP), revelam que a média de economia do setor rural cresce mais rápido que a média da economia brasileira. Por esta razão, o estudo de problemas relacionados à agricultura tem despertado o interesse de muitos pesquisadores, nas mais diversas áreas do conhecimento (CAIXETA FILHO, 2009).

O Brasil é um dos maiores produtores agrícolas mundiais, principalmente por sua extensão territorial, recurso hídrico, clima e topologia, além de outros fatores. A agricultura orgânica tem adaptado antigas práticas às mais atuais tecnologias de produção com o objetivo de aumentar a produtividade, cultivando produtos mais saudáveis e reduzindo impactos ambientais (ORMOND *et al*, 2002). O mercado brasileiro de hortaliças é altamente diversificado e segmentado, com o volume de produção concentrado em seis espécies: batata, tomate, melancia, alface, cebola e cenoura, sendo a agricultura familiar responsável por mais da metade da produção. Outras tecnologias possibilitam ao produtor viabilizar economicamente a produção mesmo em condições adversas de clima (EMBRAPA, 2020).

O estado do Paraná tem uma grande concentração de propriedades rurais pequenas e médias, que se mostram menos favorecidas no mercado em termos de gestão. Muitas dessas propriedades se deparam com a dúvida de quais culturas devem produzir naquele ano agrícola e, dessa forma, buscam por soluções que otimizem os processos produtivos, reduzam os custos e evitem o desperdício (RIBEIRO; FORTES, 2015). A região sul do Paraná, por sua vez, é uma das pioneiras no cultivo de hortaliças orgânicas no Brasil. A Rio de Una, empresa da região metropolitana de Curitiba, produz 300 toneladas de alimentos orgânicos por mês. São verduras, legumes e frutas. Tudo cultivado sem usar agrotóxicos nem adubos químicos industrializados. [1]

Para Armando *et al* (2002), a agricultura familiar no Brasil exerce um importante papel como principal fonte de abastecimento de alimentos do mercado interno. Apesar de representar uma significativa parcela na produção nacional, os agricultores familiares ainda carecem de sistemas de produção apropriados a sua capacidade de investimento, ao tamanho de suas propriedades rurais e ao tipo de mão-de-obra empregada.

De acordo com Goldbarg e Luna (2005) e Arenales *et al* (2015), alguns problemas de produção agrícola podem ser formulados matematicamente como um Problema de Programação Linear (PPL), como por exemplo, a otimização da produção e do transporte de produtos. Por sua vez, a Programação Linear é um ramo da Pesquisa Operacional que utiliza, em sua formulação matemática, equações lineares com o objetivo de maximizar ou minimizar uma função objetivo sujeita a um conjunto de restrições, expressas por equações lineares (GOLDBARG; LUNA, 2005). Assim, a Programação Linear pode ser definida como uma ciência que aplica métodos científicos em problemas envolvendo o controle e a otimização de problemas, como por exemplo, o controle de sistemas agrícolas, fornecendo soluções mais eficientes que maximizam lucros e minimizam custos, respeitando as restrições do local em estudo. Caixeta Filho (2009) também ressalta a utilização de técnicas de Programação Matemática, em especial a Programação Linear em problemas, aplicações e modelos a serem desenvolvidos em contextos agroindustriais.

[1] http://g1.globo.com/economia/agronegocios/noticia/2012/07/empresa-do-parana-investe-na-expansao-da-agricultura-organica.html

Desta forma, a Programação Linear(PL) se apresenta como uma valiosa ferramenta para analisar problemas de planejamento da produção agrícola (HANEVELD; STEGEMAN, 2005). Segundo estes autores, tradicionalmente, a rotação de culturas tem sido otimizada por meio de modelos matemáticos de Programação Linear. Em Fey *et al* (2000) os autores obtiveram um incremento de 8,8% na renda líquida anual em uma área total de 43 hectares, utilizando PL, considerando as culturas: soja, milho, feijão, aveia, mandioca e trigo. Estes e outros estudos demonstram a capacidade que métodos de otimização numérica possuem para melhorar a renda de pequenos e grandes agricultores, considerando diferentes períodos de cultivo e diversas culturas agrícolas.

No trabalho de Bressan; Reghim e Stiegelmeier (2019), as autoras utilizaram Programação Linear para a formulação matemática de problemas de produção agrícola. Os estudos de caso apresentados envolvem a maximização de lucros de uma produção agrícola e de uma propriedade de reflorestamento. Os problemas foram resolvidos com apoio computacional por meio do método Simplex, buscando a eficiência no planejamento da rotação de culturas em uma propriedade agrícola.

O trabalho de Gameiro, Rocco e Caixeta Filho (2011) também aplicou Programação Linear para maximizar a soma do lucro mensal de uma unidade produtora de leite, considerando custos logísticos como transporte de insumos. A estrutura matemática proposta permite a adaptação do modelo a outros tipos de propriedades rurais.

Um dos principais tipos de problemas da Programação Linear é chamado de Problema do Transporte (ARENALES *et al*, 2015). Esse problema é modelado de forma a satisfazer a demanda e um conjunto de limitações determinadas. Desse modo é necessário saber a quantidade que precisa ser produzida e como deve ser transportada para cada localização de forma satisfatória e minimizando o custo total do transporte (MOREIRA, 2010).

No contexto do estudo de problemas de Programação Linear e sua aplicação em problemas de otimização da produção agrícola, o objetivo deste trabalho é apresentar um estudo de caso sobre a otimização da produção agrícola, utilizando dois modelos de PL: maximizar o lucro da produção e minimizar os custos de transporte de produtos para os centros consumidores, levando em conta as limitações do local em estudo. O Método Simplex é utilizado como o algoritmo de resolução do problema para a obtenção da solução ótima dos problemas citados. Um estudo de caso dos problemas propostos é desenvolvido em uma propriedade rural localizada no município de Sertaneja, no estado do Paraná (PR), onde é feita a produção de hortaliças e seu transporte para centros consumidores. A principal contribuição deste estudo é oferecer a maximização do lucro na produção de hortaliças da propriedade de pequeno porte e a minimização dos custos de transporte de produtos para seus destinos.

A aplicação da Programação Linear auxilia na maximização de lucros na área de agricultura orgânica e na minimização de custos dos transportes, sugerindo para o fabricante a solução ótima, ou seja, a quantidade que pode ser produzida com lucro máximo e redução de impactos ambientais, e com custo de transporte mínimo, atendendo demanda e às limitações do solo em estudo. Desta forma, os resultados alcançados auxiliam na tomada de decisão do produtor, no sentido de obter uma produção otimizada.

Este artigo está organizado da seguinte forma: a Seção 2 apresenta a formulação matemática geral de problemas de Programação Linear, enquanto que a Seção 3 apresenta a formulação matemática do Problema do Transporte. O Método Simplex, executado para obter as soluções desses problemas, é fundamentado na Seção 4. Em seguida, a descrição do local em estudo é feita na Seção 5 e o desenvolvimento do estudo de caso é apresentado na Seção 6. Por fim, a Seção 7 traz a conclusão deste estudo e a comparação com as práticas do local em estudo.

2 Formulação matemática de problemas de Programação Linear

De acordo com Prado (2016), os estudos sobre a Programação Linear tiveram início no ano de 1936 por Wassily Leontieff, que criou um modelo constituído por um conjunto de equações lineares, considerado como o primeiro passo para os estudos das técnicas de Programação Linear. No ano de 1939, o matemático russo L.V. Kantorovich então desenvolveu um trabalho sobre planejamento de produção que apresenta, dentre as diversas abordagens, o uso de equações lineares. E no ano de 1947 a técnica de planejamento se consolidou com George Dantzig, que desenvolveu o Método Simplex, capaz de resolver qualquer problema de Programação Linear. No entanto, no ano de 1960 que esta pesquisa veio a ser conhecida, pois os governos britânico e norte-americano solicitaram a cientistas e matemáticos da época que fizessem pesquisas sobre as operações militares e como otimizar essas operações (ARENALES *et al*, 2015). Desta forma, buscaram, através da ciência, uma solução assim chamada de solução ótima, pelo método de modelagem matemática no auxílio de tomada de decisões.

Pesquisa Operacional é então uma ciência que pode ser aplicada para conduzir e coordenar as operações nas organizações. Inicialmente, é utilizado o método científico para investigar o problema ou possíveis melhorias, para ser construído um modelo científico (tipicamente matemático), que capture a essência do problema real, e seja validado (HILLIER; LIEBERMAN, 2012).

A formulação matemática de um PPL requer 3 elementos fundamentais: o objetivo da otimização, expresso por uma função linear chamada de *função objetivo*, que deve ser maximizada ou minimizada; um *conjunto de restrições*, expressas por equações lineares que representam as condições e limitações do problema que devem ser respeitadas e, por fim, as *condições de não-negatividade* do problema, que consideram que as variáveis de decisão, ou seja, as variáveis para as quais buscamos um valor, são maiores ou iguais a zero.

Para que o problema possa ser modelado como um PPL, algumas características devem ocorrer (LACHTERMACHER, 2016).

• Proporcionalidade: o valor da função objetivo é diretamente proporcional ao nível de atividade de cada variável de decisão.

• Aditividade: considera as variáveis de decisão do modelo como entidades totalmente independentes, não permitindo que haja interdependência entre as mesmas, isto é, não permitindo a existência de termos cruzados, tanto na função-objetivo como nas restrições.

• Divisibilidade: assume que todas as unidades de atividade possam ser divididas em qualquer nível fracional, isto é, qualquer variável de decisão pode assumir valor fracionário.

• Certeza: assume que todos os parâmetros do modelo são constantes conhecidas. Em problemas reais, a certeza quase nunca é satisfeita, provocando a necessidade de análise de sensibilidade dos resultados.

Deste modo, para a caracterização matemática de um PPL, é necessário apresentar a função objetivo (FO), o conjunto de restrições e as condições de não negatividade (GOLDBARG; LUNA, 2005):

$$\text{min ou max } c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n \tag{1}$$

sujeito a

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \quad & [sinal] \quad b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \quad & [sinal] \quad b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n \quad & [sinal] \quad b_3 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \quad & [sinal] \quad b_m
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$
x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \geq 0, \tag{3}
$$

em que,

- $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as variáveis de decisão;
- $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ são os coeficientes (números reais) da função objetivo;
- $b_1, b_2, \ldots, b_m$ são as constantes (números reais) de cada uma das m restrições;
- a_{ij} são os coeficientes (números reais) das restrições, para $i = 1, 2, \ldots, n$; e $j = 1, 2, \ldots, m$;
- O símbolo [sinal] indica que a restrições pode ser uma equação ou uma inequação.

Na formulação matemática geral, a equação (1) representa a função objetivo(FO), que deve ser minimizada ou maximizada. As equações (2) representam o conjunto das restrições do problema e, por fim, a equação (3) representa as condições de não-negatividade: $(x_n \geq 0)$.

3 Formulação matemática do Problema do Transporte

O Problema do Transporte pode ser representado como um PPL e interpretado como a tarefa de transportar o que foi produzido pelo local, para seus locais de distribuição. Esse problema tem como objetivo encontrar a melhor solução, com o menor o custo, para percorrer os caminhos e realizar o transporte de produtos. Desse modo, o problema deve apresentar como resposta a quantidade que deve ser enviada e para onde deve prosseguir, de maneira que satisfaça as demandas com o menor custo possível. As quantidades produzidas ou ofertadas em cada centro e as quantidades demandadas em cada mercado consumidor são conhecidas. O transporte deve ser efetuado de modo que respeite as limitações de oferta e atenda à demanda (ARENALES *et al*, 2015).

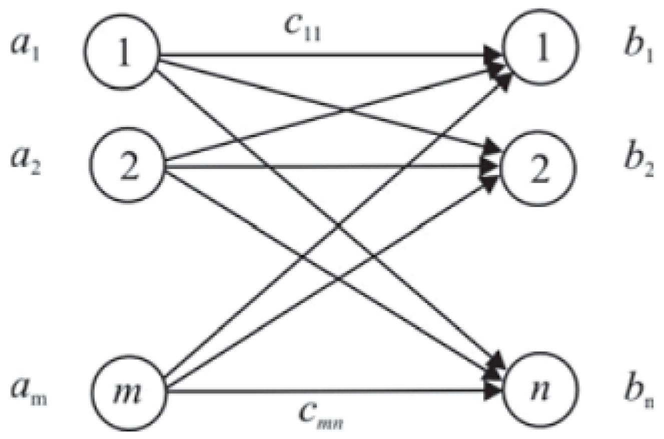
A formulação matemática do Problema do Transporte apresentada nesta seção é baseada em Arenales *et al* (2015). Denomina-se os centros de produção, de origens, e os mercados consumidores, de destinos.

Suponha que existam m origens e n destinos para um produto e que o custo de transportar uma unidade desse produto da origem i para o destino j é c_{ij}. Além disso, a oferta do produto na origem i é a_i e a demanda do produto no destino j é b_j, Um esquema gráfico para representar as origens, os destinos, as disponibilidades do produto e as demandas é apresentado na Figura 1.

As variáveis do problema são as quantidades transportadas das origens aos destinos:

x_{ij} quantidade transportada do produto da origem i para o destino j.

Figura 1: Rede de transporte (ARENALES *et al*, 2015)



Essas quantidades não podem ser negativas, portanto, as restrições $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$ fazem parte do modelo matemático. Se x_{ij} é a quantidade transportada do produto da origem i para o destino j, então $c_{ij}\, x_{ij}$ é o custo incorrido para se realizar esse transporte. O custo total de transporte é a soma dos custos de transporte de todas as quantidades transportadas de todas as origens i a todos os destinos j, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

.

Esse custo deve ser minimizado. Sabemos que o que é transportado de cada origem i a todos os destinos j, $j = 1,\ 2, \ldots,\ n$, não pode ultrapassar a quantidade disponível de produto na origem i, ou seja,

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i.$$

Além disso, as quantidades transportadas das diversas origens ao destino j satisfazer a demanda requerida neste destino, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j.$$

O modelo completo do problema de transporte é definido por:

$$Minimizar f(x_{11}\, x_{12}, \ldots, x_{mn}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad\qquad i = 1, \ldots, \ m \ e \ j = 1, \ldots, \ n$$

Problemas de Programação Linear como o Problema do Transporte podem ser resolvidos por meio de métodos computacionais, como o Método Simplex, descrito na seção a seguir (ARENALES *et al*, 2015; LACHTERMACHER, 2016).

4 O Método Simplex

O Método Simplex foi desenvolvido em 1947 por George Dantzig, sendo o primeiro método geral para solucionar PPL. Desse modo, este método é aplicado para obter a solução dos problemas de produção agrícola e de transporte propostos neste trabalho. É um algoritmo fundamental para obtenção da solução ótima do PPL e utiliza como base a Álgebra Linear. De fato, o algoritmo parte de uma solução viável do sistemas de equações que representam as restrições do PPL, solução essa normalmente extrema (vértice), e a partir dessa solução inicial identifica novas soluções viáveis. Logo, o algoritmo permite encontrar novos e melhores vértices da envoltória convexa do problema e além disso, determinar se o vértice escolhido é uma solução ótima (GOLDBARG; LUNA, 2005).

O Método Simplex é capaz de indicar em sua execução, caso exista solução, se o problema tem solução única, solução ilimitada, se possui infinitas soluções ou se não possui nenhuma solução. Os casos especiais são descritos a seguir. Em seguida, são apresentados os fundamentos teóricos para o desenvolvimento do Método Simplex, de acordo com Goldbarg e Luna (2005).

Definição 1 *O conjunto* $C = \{x/Ax = b, \ x \geq 0\}$ *denomina-se conjunto de soluções viáveis. Um ponto extremo corresponde a um vértice da região que representa o conjunto de soluções viáveis.*

A definição de alguns conceitos são fundamentais para o desenvolvimento dos teoremas seguintes.

Definição 2 *(a) A base de uma matriz* $A(m \times n)$ *é uma matriz quadrada de m vetores coluna linearmente independentes em* $\mathbb{R}^m$*. As variáveis associadas a essas colunas são chamadas de variáveis básicas.*

(b) Seja B uma base associada à matriz A. O vetor composto de $x_B = B^{-1}b$ *e* $x_R = 0$ *é chamado de solução básica, em que* x_R *é o vetor das restantes* $n - m$ *varáveis não básicas.*

(c) Uma solução básica sem componentes negativas é denominada solução básica viável.

Definição 3 *Um conjunto C é um conjunto convexo se para qualquer conjunto composto por dois pontos distintos* x_1 *e* x_2*, pertencentes a C, a combinação linear convexa desses pontos também pertence a C.*

Teorema 1 *O conjunto C das soluções viáveis de um modelo de Programação Linear é um conjunto convexo.*

Demonstração 1 *Seja C o conjunto formado pelos pontos x tais que:*

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Se C é um conjunto convexo, equivale a dizer que:

$$x_1, x_2 \in C \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in C \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Sejam duas soluções viáveis de C, x_1, x_2 tais que $x_1 \neq x_1$, então:

$$Ax_1 = b \qquad Ax_2 = b$$

$$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0$$

e seja:

$$x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

Então:

$$Ax = A[\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] =$$

$$= \alpha x_1 + (1-\alpha)Ax_2 =$$

$$= \alpha b + (1-\alpha)b = b$$

e $x \geq 0$, uma vez que:

$$x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \geq 0$$

e

$$x_1 \geq 0, x_1 \geq 0 \text{ e } 0 \leq \alpha \leq 1$$

Teorema 2 *Um ponto x é extremo em um conjunto de soluções viáveis C de um problema de programação linear se e somente se $x \geq 0$ for uma solução básica do sistema de equações lineares $Ax = b$.*

Demonstração 2 *A demonstração da primeira parte do Teorema (⇒) é feita de acordo com Menezes (2006).*

⇒ Será demonstrado que se x é um ponto extremo então x é uma solução básica viável (sbv). Suponha, então, que x é um ponto extremo de x. Se x é o vetor nulo, então como a matriz A tem posto completo, segue-se que x é uma sbv para alguma matriz base de A. Sem perda de generalidade, suponha que as primeiras q componentes de x são positivas. Pela viabilidade de x, para $j = 1, \ldots, q, x_j > 0$ e $a_1x_1 + \cdots + a_qx_q = b$, onde a_j é a j-ésima coluna da matriz A. Para demonstrar que x é uma sbv, devemos mostrar que os vetores $a_1, \ldots, a_q$, associados às componentes positivas de x, são linearmente independentes. Suponha, por contradição, que estes vetores são linearmente dependentes, isto é, existem números λ_j, $j = 1, ..., q$, não todos nulos, tais que:

$$\sum_{j=1}^{q} \lambda_j a_j = 0 \tag{4}$$

Selecionando

$$\sigma = min\left\{\frac{x_j}{\left|\lambda_j\right|}; \lambda_j \neq 0, j = 1, ..., q\right\}$$

pode-se escolher ϵ, *com*$0 < \epsilon < \sigma$, *tal que* $x_j + \epsilon\lambda_j > 0$ *e* $x_j - \epsilon\lambda_j > 0$ *para* $j = 1, \ldots, q$. *Assim, define-se* x^1 *e* x^2 *por:*

$x^1 = x + \epsilon\lambda \geq 0$ *e* $x^2 = x - \epsilon\lambda \geq 0$,

onde $\lambda = [\lambda_1 \ldots, \lambda_q, 0 \ldots, 0]^T$. *Segue-se pela definição de* λ *e por (4) que* $A\lambda = 0$. *Logo, pela linearidade de A,* $Ax^1 = b$ *e* $Ax^2 = b$, *de tal maneira que, usando* $x = (x^1 + x^2)/2$ *, isto é, x é uma combinação convexa de dois outros pontos distintos, contradizendo o fato de que x é um ponto extremo. Logo,* $a_1 \ldots a_q$ *são vetores linearmente independentes e portanto, se x é um ponto extremo de C, x é uma sbv de C. Isto finaliza a primeira parte da demonstração.*

A demonstração da segunda parte do Teorema ($\Leftarrow$) *é realizada de acordo com Goldbarg e Luna (2005).*

$\Leftarrow$ *Será demonstrado que se x é uma sbv então x é um ponto extremo.*

Seja C o conjunto formado pelos pontos x tais que:

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

Seja, ainda, uma solução viável qualquer x, de dimensão n, na qual, sem perda de generalidade, as variáveis básicas são as m primeiras:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

com todos os componentes $x_i \geq 0$

Suponha, por absurdo, que x não seja um ponto extremo do conjunto convexo C, definido anteriormente. Então x pode ser obtido por uma combinação convexa de outros dois pontos distintos desse mesmo conjunto. Chamando de y e z esses dois pontos, têm-se:

$$x = \alpha y + (1 - \alpha)z$$

$$0 < \alpha < 1$$

Como y e z pertencem ao conjunto C, as seguintes relações de pertinência são válidas:

$$Ay = Az = b$$

e

$$y \geq 0 \qquad z \geq 0$$

A relação $x = \alpha y + (1-\alpha)z$*, colocada em termos das coordenadas de cada um dos três vetores, fornece as seguintes relações:*

$$x_1 = \alpha y_1 + (1-\alpha)z_1$$

$$x_2 = \alpha y_2 + (1-\alpha)z_2$$

$$\vdots$$

$$x_m = \alpha y_m + (1-\alpha)z_m$$

$$0 = \alpha y_{m+1} + 1 + (1-\alpha)z_{m+1}$$

$$\vdots$$

$$0 = \alpha y_n + (1-\alpha)z_n$$

Devido às relações $0 \leq \alpha \leq 1$*,* $y \geq 0$ *e* $z \geq 0$ *as últimas* $(n-m)$ *relações do conjunto acima descrito só podem ser satisfeitas se* $y_{m+i} = z_{m+i} = 0$*, para* $i = 1, ..., n - m$*. Portanto, tem-se* $x = y = z$*, pois tanto* y *quanto* z *são soluções básicas do sistema em análise, calculados com as mesmas variáveis básicas.*

Desta forma, demonstra-se que não existem soluções viáveis y *e* z*, distintas da solução básica* x *que satisfaçam a relação* $x = \alpha y + (1-\alpha)z$*. Por contradição com a hipótese inicial, demonstra-se, então, que* x *é um ponto extremo do conjunto convexo* C*. Isto finaliza a demonstração.*

Teorema 3

1. *Se uma função objetivo possui um máximo ou um mínimo finito, então pelo menos uma solução ótima é um ponto extremo do conjunto convexo C do Teorema 1*
2. *Se a função objetivo assume o máximo ou o mínimo em mais de um ponto extremo, então a função assume o mesmo valor para qualquer combinação convexa desses pontos.*

A demonstração encontra-se em Hillier e Lieberman (2012).

Lema 1 *Seja* $f : \omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função definida por* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b,\ a_{ij}, b \in R$*. Se dentre os valores que* f *assumir num segmento* AB *do* $\mathbb{R}^n$*, o valor máximo (mínimo) for assumido num ponto* P *interior deste segmento, então* f *será constante em* AB*.*

Teorema 4 *Teorema Fundamental da Programação Linear*

Seja $f : \omega \subset R^n \to R$ *uma função definida na região poliedral convexa* V *do* $\mathbb{R}^n$ *por* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + b, a_{ij}, b \in \mathbb{R}$*. Suponha que* f *assuma valor máximo (mínimo) nesta região. Então, se* V *possui vértice(s), este valor máximo (mínimo) será assumido num vértice.*

A demonstração encontra-se em Luenberger (1973).

De forma geral, o Método Simplex é descrito matematicamente a seguir. Considere o problema primal de otimização linear escrito na forma padrão conforme segue (GOLDBARG; LUNA, 2005):

$$min f(x) = c^T x$$

$$s.a : Ax = b$$

$$x \geq 0$$

em que $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e, sem perda de generalidade, assuma que posto $(A) = m$.

A solução geral do sistema em $Ax = b$ pode ser descrita considerando uma partição nas colunas de A:

$$A = (B, N)$$

tal que $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, formada por m colunas da matriz A, seja não singular. A partição equivalente é feita no vetor das variáveis:

$$x = (x_B, x_N)$$

em que x_B é chamado vetor de variáveis básicas e x_N vetor de variáveis não básicas. Assim,

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b \Leftrightarrow$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.$$

Dada uma escolha qualquer para x_N, tem x_B bem determinado, de modo que o sistema está verificado.

Definição 4 *O vetor y dado por $y^T = c_B^T B^{-1}$ é chamado de vetor multiplicador simplex (ou vetor de variáveis duais)*

Definição 5 *Denomina-se estratégia simplex a seguinte perturbação da solução básica: escolha $k \in N$, onde N é o conjunto de índices de variáveis não básicas, tal que $c_k - y^T a_k < 0$; faça $x_k = \epsilon \geq 0,\ x_j = 0, \forall j \in N - \{k\}$.*

A estratégia simplex produz uma nova solução dada por

$$\begin{cases} x_B = x_B^0 + \epsilon d_B \\ x_N = \epsilon e_k \end{cases}$$

e o valor da função objetivo é dado por:

$$f(x) = f(x^0) + (c_k - y^T a_k)\epsilon$$

onde $d_B = -B^{-1}a_k$ e $e_k = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^{m-n}$ com 1 na k-ésima componente.

A direção $d \in \mathbb{R}^n$, dada por $d = (d_B, d_N)^T = (d_B, e_k)^T$, define uma perturbação da solução básica e chamada direção simplex. Se a solução básica for não-degenerada, isto é, $x_B^0 > 0$, então d é uma direção factível. Note ainda que o produto escalar entre d e o gradiente da função objetivo é $c^T d = c_k - y^T a_k < 0$. Portanto d é uma direção de descida.

Da estratégia simplex, pode-se determinar o maior valor de $\in$, impondo $x_B \geq 0$:

$$\epsilon^0 = min \left\{ \frac{-x^0_{Bi}}{d_{Bi}} | d_{Bi} < 0,\ i = 1, ..., m \right\}$$

onde x^0_{Bi} é a i-ésima componente de x^0_B, que sai da base.

Em suma, o Método Simplex basicamente experimenta uma sequência de soluções básicas viáveis, na busca do valor ótimo para a função objetivo.

O algoritmo do Método Primal Simplex é descrito a seguir considerando um problema de minimização escrito na forma padrão (ARENALES *et al*, 2015; GOLDBARG e LUNA, 2005). É chamada de Fase I o procedimento para determinar uma solução inicial e, Fase II o Método Simplex.

Fase I

Encontre uma partição básica primal-factível: $A = (BN)$

Faça PARE = FALSO, $IT = 0$

(Será FALSO até que a condição de otimalidade seja verificada. IT indica o número da iteração.)

Fase II

Enquanto NÃO PARE faça:

- Determine a solução básica primal factível:

$$x_B = B^{-1}b$$

- Teste de otimalidade:

  Determine a solução básica dual: $y^T = c^T_B B^{-1}$;

  Encontre x_k com custo relativo: $c_k - y^T a_k < 0$.

  Se $c_k - y^T a_k \geq 0, \forall k = 1, \ldots, n - m$, então a solução na iteração IT é ótima

  PARE=VERDADE.

  Senão:

- Determine a direção simplex: $dB = -B^{-1}a_k$, de mudança nos valores das variáveis básicas

- Determine o passo: $\epsilon^0 = min \left\{ \frac{-x^0_{Bi}}{d_{Bi}} | d_{Bi} < 0,\ i = 1, ..., m \right\}$

  Se $d_B \geq 0$, o problema não tem solução ótima finita.

  PARE=VERDADE.

  Senão:

- Atualize a partição básica: $a_{Bi} \leftrightarrow a_k, IT \leftarrow IT + 1$.

  Fim enquanto.

Por meio da execução do algoritmo, o Método Simplex alcança a solução ótima do PPL, se este possuir solução (ARENALES *et al*, 2015).

5 Descrição do local em estudo

A propriedade rural em que foi desenvolvido o estudo de caso descrito neste trabalho pertence a uma família de japoneses tradicionais da agricultura de hortaliças no Brasil. Essa família reside no município de Sertaneja/PR, onde também é localizada a propriedade em estudo, ilustrada na Figura 2. Nesta cidade, a família de Kuriki adquiriu 4 alqueires de mata fechada. A propriedade tem como atividade principal o cultivo de Hortaliças em geral. A produção principal da propriedade é o cultivo de alface e tomate, sendo um dos principais encarregados pela distribuição de hortaliças em feiras e escolas na cidade de Sertaneja/PR e Cornélio Procópio/PR.

Figura 2: Propriedade rural em estudo

Os serviços prestados de transporte na propriedade estão especialmente em volta do Norte Pioneiro do Paraná, assim sendo dois pontos de distribuição, e seus principais centros são: Sertaneja/PR e Cornélio Procópio/PR. Contudo, o local também transporta os alimentos para diversos lugares, como feiras, supermercados, escolas, mercearias, entre outros pela cidade e região, onde fica localizada.

O tipo de mercadoria que a propriedade transporta está relacionado nas seguintes categorias: Alface; Tomate; Tomatinho e Pimentão. Para realizar o transporte dos alimentos, a propriedade possui três caminhonetes e duas kombes próprias para a entrega. O tipo de veículo varia de acordo com a carga e a distância que será percorrida, para uma melhor qualidade de entrega dos produtos, sem perda e transtornos.

6 Estudo de caso: aplicação dos problemas do transporte e problema de produção agrícola

Este estudo tem como objetivo aplicar a Programação Linear para maximizar o lucro da produção de hortaliças da propriedade rural em estudo e minimizar o custo total de transporte de produtos de hortaliças para os destinos, satisfazendo as demandas (Problema do Transporte).

Para a modelagem matemática do Problema do Transporte, os seguintes dados do local são necessários: a propriedade rural produz um total de 5400 kg/mês, os quais são distribuídos para quatro destinos diferentes, sendo que 45% da produção de hortaliças são destinados para as feiras e escolas localizado em Cornélio Procópio - PR. Outros 20% da produção são destinados para locais da cidade de Sertaneja - PR, 20% para as cidades vizinhas onde é localizada a propriedade rural, 15% para os outros lugares restantes. Em média, 10 canteiros de tamanho 12m de largura por 100m de comprimento são produzidos por mês.

Os custos para transporte dos produtos da origem a cada destino são obtidos com base nas distâncias percorridas para realizar o transporte. A formulação matemática do Problema do Transporte é descrita a seguir. As variáveis de decisão do problema são denotadas por x_{ij} e representam a quantidade (em quilogramas) de produto transportada da fonte de produção com índice $i(i = 1, \ldots, 10)$ para o destino $j(j = 1, \ldots, 4)$. A função objetivo é expressa como:

$$\min 0,05x_{11}+0,2x_{12}+0,25x_{13}+0,4x_{14}+0,05x_{21}+0,2x_{22}+0,25x_{23}+0,4x_{24}+0,05x_{31}+0,2x_{32}+0,25x_{33}+0,4x_{34}+0,05x_{41}+0,2x_{42}+0,25x_{43}+0,4x_{44}+0,05x_{51}+0,2x_{52}+0,25x_{53}+0,4x_{54}+0,05x_{61}+0,2x_{62}+0,25x_{63}+0,4x_{64}+0,05x_{71}+0,2x_{72}+0,25x_{73}+0,4x_{74}+0,05x_{81}+0,2x_{82}+0,25x_{83}+0,4x_{84}+0,05x_{91}+0,2x_{92}+0,25x_{93}+0,4x_{94}+0,05x_{10\ 1}+0,2x_{10\ 2}+0,25x_{10\ 3}+0,4x_{10\ 4}$$

Restrições relativas à produção das fontes:

Fonte 1: $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} \leq 540$
Fonte 2: $x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} \leq 540$
Fonte 3: $x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} \leq 540$
Fonte 4: $x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44} \leq 540$
Fonte 5: $x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54} \leq 540$
Fonte 6: $x_{61}+x_{62}+x_{63}+x_{64} \leq 540$
Fonte 7: $x_{71}+x_{72}+x_{73}+x_{74} \leq 540$
Fonte 8: $x_{81}+x_{82}+x_{83}+x_{84} \leq 540$
Fonte 9: $x_{91}+x_{92}+x_{93}+x_{94} \leq 540$
Fonte 10: $x_{10\ 1}+x_{10\ 2}+x_{10\ 3}+x_{10\ 4} \leq 540$

Restrições relativas às demandas dos destinos:

Destino 1: $x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}+x_{61}+x_{71}+x_{81}+x_{91}+x_{10\ 1} = 2500$
Destino 2: $x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}+x_{62}+x_{72}+x_{82}+x_{92}+x_{10\ 2} = 1000$
Destino 3: $x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}+x_{63}+x_{73}+x_{83}+x_{93}+x_{10\ 3} = 1000$
Destino 4: $x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}+x_{64}+x_{74}+x_{84}+x_{94}+x_{10\ 4} = 900$

Formulado o problema como um PPL, o método Simplex é aplicado para a obtenção da solução ótima, com apoio computacional do software LINDO (*Linear Interactive and Discrete Optimizer*).

A solução ótima obtida, após 14 iterações, é: o custo mínimo para o transporte da produção é de $R\$935,00$. A solução ótima apresenta os seguintes valores para as variáveis de decisão, em quilogramas: $x_{11} = 340, x_{13} = 200, x_{23} = 540, x_{32} = 540, x_{42} = 460, x_{43} = 80, x_{51} = 540, x_{61} = 540, x_{71} = 540, x_{81} = 540, x_{94} = 540, x_{10\ 3} = 180, x_{10\ 4} = 360$.

Estes valores das variáveis de decisão, que representam a solução ótima, são dadas em quilogramas, pois representam a quantidade de produtos que deve ser transportada da fonte de produção

$i(i = 1, \ldots, 10)$ para o destino $j(j = 1, \ldots, 4)$.

A seguir, o objetivo é formular um problema de produção agrícola para as hortaliças como um PPL e aplicar formas de otimização que maximizem o lucro da produção, respeitando as limitações do solo e do local em estudo.

A Tabela 1 exibe a produtividade em quilogramas por m^2 dos principais produtos do local e o lucro por quilogramas de produção, representado em reais. Esses dados foram obtidos no local em estudo. Por falta de um local de armazenamento próprio, a produção máxima está limitada a $5.400kg$ por mês. A área cultivável da propriedade rural é de 12.000 m^2. Portanto, para atender às demandas da propriedade, é imperativo que se plante 10 canteiros de 12m de largura por $100m$ de comprimento.

Tabela 1: Produtividade do Local em Estudo

Cultura	**Produtividade (kg/m^2)**	**Lucro por kg de produção**
Alface	0,15	1,10 reais
Tomate	0,10	0,95 reais
Tomatinho	0,28	0,85 reais
Pimentão	0,11	0,75 reais

De acordo com o modelo de Goldbarg e Luna (2005), o problema em estudo foi modelado como um PPL, conforme as equações a seguir. A equação 5 representa a função objetivo(maximizar os lucros), cujos coeficientes são obtidos multiplicando-se os valores da Tabela 1, das colunas 2 e 3. As restrições do problema são representadas pelas equações 6, 7, 8 e as equações 9 são as condições as condições não-negatividade. As variáveis de decisão representam a área em m^2 a ser plantada da cultura, em que x_1 = alface; x_2 = tomate; x_3 = tomatinho e x_4 = pimentão.

$$max\ 0,165x_1 + 0,095x_2 + 0,238x_3 + 0,0825x_4 \tag{5}$$

Sujeito à:

Restrições associadas à demanda da propriedade rural m^2:

$$x_1 \geq 2600,\ x_2 \geq 1600,\ x_3 \geq 500,\ x_4 \geq 700 \tag{6}$$

Restrição de área total (área cultivável):

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 12.000m^2 \tag{7}$$

Restrição associada ao armazenamento (kg):

$$0,15x_1 + 0,10x_2 + 0,28x_3 + 0,11x_4 \leq 5400 \tag{8}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \tag{9}$$

Portanto, de acordo com Goldbarg e Luna (2005), este tipo de PPL é capaz de ser resolvido aplicando o Método Simplex para a obtenção da solução ótima, ou seja, a solução que maximiza a função 5 sujeito às restrições 6 a 9. Com suporte computacional do software LINDO (www.lindo.com), a solução ótima obtida, após 4 iterações, apresenta um lucro máximo de $R\$2.328,55$ e as variáveis de decisão (área em m^2 a ser plantada de cada produto) apresentam os seguintes valores: $x_1 = 2600\ m^2$, $x_2 = 1600\ m^2$, $x_3 = 7100\ m^2\ e\ x_4 = 700\ m^2$.

Esta solução ótima sugerida pelo Método Simplex é factível de ser implementada na prática, pois não há qualquer limitação na venda desta quantidade ou na rotatividade da cultura. Desta forma, não é necessário incluir limitantes ou outras restrições na formulação matemática do problema.

7 Conclusão

O objetivo geral deste trabalho é apresentar uma proposta para maximização dos lucros na área de produção agrícola de hortaliça e minimização dos custos de transporte, promovendo aprendizagem através da Programação Linear e do Método Simplex, na otimização dos problemas abordados.

Esta proposta considera a maximização do lucro do produtor, respeitando as características e as limitações do solo e da propriedade agrícola em estudo, e a minimização dos custos de transporte para os locais consumidores. Os resultados então contribuem para a tomada de decisão do produtor quanto à área que deve ser plantada e quanto ao transporte que deve ser realizado de forma otimizada.

Comparando os resultados obtidos pelos métodos de otimização apresentados neste trabalho com os resultados reais das práticas do local em estudo, tem-se que os métodos de otimização apresentam vantagens. É importante ressaltar que as práticas da propriedade agrícola em estudo não utilizam nenhum recurso científico para definição e otimização das rotas de transporte e nem para o lucro da produção. Segundo informações do local, os produtores atendem conforme uma média de demandas mensais e transportam conforme o chamado. Desta forma, o custo de transporte mensal do local é de R$1.100,00 e o lucro máximo da produção dos 4 tipos de hortaliças é de R$2.100,75, pois os produtores sub-utilizam a produção principalmente da variável x_3. Desta forma, a solução otimizada oferece uma diminuição de 15% no valor total do custo de transporte e um aumento de 10,8% sobre o lucro total de produção das hortaliças.

Como perspectivas de continuidade deste trabalho, propõe-se estudar um modelo diferenciado para que a restrição do armazenamento tenha mais influência da solução ótima. Além disso, propõe-se também implementar um aplicativo que seja de fácil utilização pelo produtor agrícola, para que possa inserir os dados numéricos referentes às demandas e obter as soluções ótimas de sua produção com lucro máximo e custo de transporte mínimo.

8 Referências Bibliográficas

ARENALES, M. N. *et al.* **Pesquisa operacional:** para cursos de engenharia. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015.

ARMANDO, M. S. *et al.* Agrofloresta para agricultura familiar. **Circular Técnica**, v. 16, p. 1−11, 2002.

BRESSAN, G. M.; REGHIM, D. C. L.; STIEGELMEIER. E. W. Modelagem matemática de problemas agrícolas utilizando programação linear. **C.Q.D.- Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 15, p. 12−23, 2019. Edição Iniciação Científica.

CAIXETA FILHO, J. V. **Pesquisa operacional:** técnicas de otimização aplicadas a sistemas agroindustriais. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2009.

CASTRO, N. R. **Produtividade do trabalho cresce mais no agronegócio que no brasil e impulsiona PIB do setor**. [São Paulo]: Cepea, 2019. Disponível em:

https://www.cepea.esalq.usp.br/br/opiniao-cepea/produtividade-do-trabalho-cresce-mais-no-agronegocio-que-no-brasil-e-impulsiona-pib-do-setor.aspx. Acesso em: 22 ago. 2020.

EMBRAPA. **Ciência que transforma:** resultados e impactos positivos da pesquisa agropecuária na economia, no meio ambiente e na mesa do brasileiro. Brasília, DF: Embrapa, 2020. Disponível em: https://www.embrapa.br/grandes-contribuicoes-para-a-agricultura-brasileira/frutas-e-hortalicas. Acesso em: 05 ago. 2020.

FEY, E. *et al*. Planejamento de um sistema agrícola utilizando programação linear. *In:* CONGRESSO E MOSTRA DE AGROINFORMÁTICA, 2000, Ponta Grossa. **Anais [...].** Ponta Grossa: Fundação ABC, 2000. p. 1−7.

GAMEIRO, A. H.; ROCCO, C. D.; CAIXETA FILHO, J. V. Modelo matemático para otimização e avaliação de unidade produtora de leite caracterizada pela integração lavoura-pecuária: consideração de parâmetros econômicos, logísticos e ambientais. *In:* CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE ECONOMIA ADMINISTRAÇÃO E SOCIOLOGIA RURAL, 49., 2011, Belo Horizonte. **Anais [...].** Belo Horizonte: Sociedade Brasileira de Economia, Administração e Sociologia Rural, 2011. p. 1−19.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização combinatória e programação linear:** modelos e algoritmos. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.

HANEVELD, W. K. K; STEGEMAN, A. W. Crop succession requirements in agricultural production planning. **European Journal of Operational Research**, v. 166, n. 2, p. 406−429, 2005.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à pesquisa operacional.** 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2012.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa operacional na tomada de decisões.** 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

LUENBERGER, D. **Introduction to linear and nonlinear programming.** 2nd. ed. Cambridge: Addison Wesley, 1973.

MACHADO, M. D.; SILVA, A. L. da. Distribuição de produtos provenientes da agricultura familiar: um estudo exploratório da produção de hortaliças. **Organizações Rurais & Agroindustriais**, v. 6, n. 1, p. 67−80, 2004.

MENEZES, M. A. F. **Programação linear**. Goiânia: Universidade Católica de Goiás, 2006. Disponível em: http://beneweb.com.br/resources/Livro%20Programação%20Linear.pdf. Acesso em: 21 ago. 2020.

MOREIRA, D. A. **Pesquisa operacional:** curso introdutório. 2. ed. rev. e atual. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

NAVARRO, Z. Uma nova agricultura pra todos brasileiros. **Revista Agrícola**, ano XIX, 2010. Edição Especial.

ORMOND, J. G. P. *et al*. Agricultura orgânica: quando o passado é futuro. **BNDES Setorial**, n. 15, p. 3−34, 2002. Disponível em: http://web.bndes.gov.br/bib/jspui/handle/1408/2479. Acesso em: 21 ago. 2020.

PRADO, D. **Programação linear.** 7. ed. Nova Lima: Falconi, 2016.

RIBEIRO, R. P.; FORTES, B. J. Programação linear: uma contribuição à gestão de uma propriedade rural. *In:* ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 35., 2015, Fortaleza, CE. **Anais [...].** Fortaleza: UFC, 2015. p. 1−14.