

**Revista Eletrônica  
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664  
Volume 19, dez. 2020  
Edição Iniciação Científica

**Matheus dos Santos Alves**

Departamento de Ciências Atuariais  
Universidade Federal de São Paulo  
msalves@unifesp.br

**Raphael de Oliveira Garcia**

Departamento de Ciências Atuariais  
Universidade Federal de São Paulo  
gr.gubim@gmail.com

## **Modelos de crescimento discreto, contínuo e estocástico: um comparativo entre as dinâmicas populacionais do Brasil**

Discrete, continuous and stochastic growth models: a comparison of the population dynamics within Brazil's

### **Resumo**

No Brasil, as últimas décadas foram de transformações para o país na área demográfica. Estudos sobre a dinâmica da população brasileira fazem-se importante para apoiar tomadas de decisões em diversas áreas do conhecimento. Os dados levantados acerca de uma população também estão ligados a planejamentos e ações sociais principalmente nas áreas de previdência e saúde. Nesta conjuntura, o foco deste trabalho foi utilizar dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) referentes à população do Brasil para produzir projeções demográficas por meio de modelos matemáticos de dinâmica populacional (discretos, contínuo e estocástico). Após a implementação computacional, comparações entre os resultados dos modelos e os dados oficiais do IBGE foram realizadas. Por fim, as simulações apresentaram-se satisfatórias quando comparadas às previsões do IBGE e adequadas para se obter algumas características futuras da população estudada.

**Palavras-chave:** Modelagem matemática. Equações de diferenças. Equações diferenciais. Projeções demográficas Brasileiras.

### **Abstract**

In Brazil, the last decades have been transformations in the country in the demographic area. Studies on the Brazilian population dynamics is important to support decision making in several areas of knowledge. The data obtained from the Brazilian population are also linked to social planning and actions, mainly in the areas of social security and health. In this context, the focus of this project was using data from the Brazilian Institute of Geography and Statistics (IBGE) about the population of Brazil to produce demographic projections through mathematical models of population dynamics (discrete, continuous and stochastic). After computational execution, comparisons were made between models and official IBGE data. Finally, the simulations presented satisfactory when the IBGE forecasts were compared and adequated to obtain some future characteristics of the studied population.

**Keywords:** Mathematical Modeling. Difference equations. Differential Equations. Brazilian demographic projections.

# 1 Introdução

A população brasileira com o passar das décadas vem apresentando transformações demográficas significativas em suas taxas de crescimento, fecundidade e mortalidade, e os impactos deste processo proporcionam desafios principalmente para as futuras gerações. Desse modo, os estudos de dinâmica de populações via projeções demográficas tornam-se essenciais para o auxílio em tomadas de decisões em diversas áreas do conhecimento tais como saúde, previdência, programas sociais e demografia, além de ajudar a embasar planejamentos e ações em diversos setores da sociedade.

A modelagem matemática aliada a recursos computacionais, com seus avanços teóricos e numéricos, vem tornando-se cada vez mais robusta em representar e extrair informações importantes de fenômenos reais.

Durante os estudos de iniciação científica do primeiro autor deste artigo, sobre equações de diferenças e equações diferenciais ordinárias, ao aprofundar na investigação do modelo logístico de Verhust surgiu o interesse em aplicá-lo na dinâmica da população brasileira. Neste momento, surgiram indagações sobre como adicionar características inerentes à imprevisibilidade de fenômenos de dinâmica populacional, como as ocorrências de epidemias e imigrações que vêm afetando o crescimento populacional; tais questões nortearam os avanços das pesquisas. No caso brasileiro, flutuações atreladas às epidemias de *Zika* em 2015 – 2016, *COVID-19* em 2020 e a atual imigração venezuelana são fatores que, de certo modo, podem ser tratados como fenômenos estocásticos que surgiram na dinâmica da população.

Neste sentido, os estudos voltaram-se para adicionar um parâmetro estocástico chamado de ruído branco na taxa de crescimento da população, o que levou o primeiro autor a estudar o assunto equações diferenciais estocásticas, conteúdo este que normalmente não é visto ou aprofundado em cursos de graduação, aplicar os conhecimentos adquiridos para a população brasileira e comparar a evolução temporal com outros modelos propostos.

Dessa forma, o presente trabalho teve por objetivo realizar projeções da população brasileira, utilizando dados disponíveis do IBGE (2018a). Para isto, considerou-se quatro modelos matemáticos, dois discretos via equações de diferenças, o modelo logístico contínuo determinístico de Verhust, modelado por equações diferenciais ordinárias e um modelo logístico de Verhust com parâmetro estocástico. E por fim, comparações entre os modelos apresentados e os dados oficiais de projeção do IBGE foram realizadas. A implementação computacional foi efetuada em softwares livres e desenvolvidas pelos autores.

O trabalho foi distribuído da seguinte forma: na Seção 2 foram descritos os modelos matemáticos de projeção utilizados; na Seção 3 têm-se os dados utilizados e as projeções obtidas de cada modelo, juntamente com as interpretações dos gráficos e a quarta seção foi destinada para a apresentação das conclusões.

## 2 Modelos de projeção

Nesta seção apresenta-se os modelos matemáticos escolhidos para descrever as projeções da população brasileira, baseando-se nos modelos discretos e contínuos de dinâmica populacional descritos em Bassanezi (2011), além do modelo logístico estocástico detalhado em Maia (2003). Dessa forma, neste estudo considerou-se as quatro modelagens descritas nas subseções seguintes.

## 2.1 Modelos discretos

### 2.1.1 Modelo logístico discreto

No primeiro modelo abordado neste trabalho considerou-se  $P_t$  o número de indivíduos de uma população em um determinado tempo discreto  $t$ . A sequência  $\{P_0, P_1, \dots, P_t, \dots\}$  representa a dinâmica de uma população em estudo em que os termos da sequência são obtidos por uma fórmula de recorrência e que  $P_0$  é a quantidade inicial de indivíduos.

Assumindo que as taxas de fertilidade  $n$ , mortalidade  $m$  e o número de reprodutores permanecem fixos e que não existem inibidores como predadores ou escassez de alimentos, a variação da população relativa a própria população (taxa de crescimento específica da população) é constante e definida da seguinte forma

$$\frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} = n - m = \delta, \quad (1)$$

em que a constante  $\delta$  é a taxa de crescimento intraespecífica da população. A partir da Equação (1) tem-se o modelo discreto malthusiano

$$P_{t+1} = (1 + \delta)P_t = rP_t, \quad (2)$$

em que  $r = 1 + \delta$ . Resolvendo a equação de diferenças (2), obtém-se

$$P_t = P_0 r^n, \quad (3)$$

em que se  $r > 0$  o crescimento da população é exponencial, se  $r = 0$  a quantidade de indivíduos permanece constante e se  $r < 0$  a população decresce exponencialmente. A sequência definida pelo termo geral, Eq. (3), resulta em uma progressão geométrica e está em concordância com o descrito por Malthus em 1798 (BASSANEZI, 2011).

Sabendo que uma população é influenciada por competição entre os indivíduos da própria população e que tal competição pode gerar a diminuição desta, adiciona-se um termo extra no modelo malthusiano para representar a diminuição da redução da população via o encontro entre os indivíduos. Desse modo, tem-se

$$P_{t+1} = (1 + \delta)P_t - bP_t^2, \quad (4)$$

em que  $P_t^2$  representa o encontro entre os indivíduos, obtido da **lei de ação de massas** e  $b$ , segundo Bassanezi (2011), é uma constante que descreve o quanto desses encontros resulta em mortes.

Neste trabalho, os valores de  $a = 1 + \delta$  e  $b$  para representar a população brasileira foram obtidos respectivamente dos dados de taxas de fecundidade e óbitos do IBGE (2018a).

### 2.1.2 Modelo discreto - ajuste

Neste segundo modelo discreto considerou-se a seguinte relação de recorrência

$$P_t = P_{t-1} + \Delta\hat{P}_t, \quad (5)$$

em que  $\Delta\hat{P}_t$  é obtido da extrapolação dos dados de natalidade e mortalidade do IBGE via regressão linear.

Considerando  $\{y_0, y_1, \dots, y_{17}\}$  o conjunto de dados de nascimento e  $\{z_0, z_1, \dots, z_{17}\}$  o conjunto de dados de mortalidade registrados nos anos 2000 à 2017, a regressão linear desses dados

fornece uma reta para cada conjunto de dados. Desse modo, supondo que as retas obtidas foram  $y(t) = at + b = \hat{y}_t$  e  $z(t) = ct + d = \hat{z}_t$  (RUGGIERO; LOPES, 1996), uma estimativa de  $\Delta P_t$  para anos futuros pode ser dada por  $\Delta \hat{P}_t = \hat{y}_t - \hat{z}_t$  e, conseqüentemente, tem-se a projeção da população via Equação (5).

## 2.2 Modelo logístico contínuo

Em 1837, o matemático Pierre F. Verhulst propôs um modelo em que uma população só poderia crescer até um limite máximo sustentável e então se estabilizaria. Conseqüentemente, existe uma condição de que a taxa de crescimento efetiva varia ao longo do tempo (GONTIJO, 2009). O modelo logístico contínuo de Verhulst é formulado pela seguinte equação diferencial,

$$\frac{d}{dt}P(t) = f(P)P, \quad (6)$$

em que  $P = P(t)$  é uma função que representa a quantidade de indivíduos de uma população e  $f(P) = r \left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)$  é o termo que representa as características do modelo de Verhulst, onde  $r$  é a taxa intraespecífica da população estudada e  $P_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$  é a capacidade de suporte do meio.

Um ponto importante de se destacar é que  $f(P)$  tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Isso mostra que no modelo de Verhulst, a população tende a se estabilizar e não mais varia para um tempo suficientemente grande.

A dinâmica de uma população com as premissas de um crescimento logístico de Verhulst é descrita pelo seguinte problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}P(t) = r \left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)P, & t > 0 \\ P(0) = P_0 \end{cases}, \quad (7)$$

em que  $r > 0$  é a taxa de crescimento intraespecífica e  $P_0$  é a população inicial.

O PVI possui solução única (BOYCE; DIPRIMA, 2017) e uma das formas de se resolver a equação diferencial associada é aplicando a técnica de separação de variáveis. Logo,

$$\frac{dP}{\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)P} = r dt. \quad (8)$$

Integrando a Equação (8) e aplicando a técnica de frações parciais no lado direito da equação, obtém-se

$$\ln \left| \frac{P}{\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} \right| = rt + C. \quad (9)$$

Aplicando a condição inicial  $P(0) = P_0$  na Equação (9), tem-se

$$C = \ln \left| \frac{P_0}{\left(1 - \frac{P_0}{P_\infty}\right)} \right| = \ln \left| \frac{P_0 P_\infty}{(P_\infty - P_0)} \right|,$$

e conseqüentemente a solução do PVI

$$P(t) = \frac{P_0}{\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right) e^{-rt} + 1} = \frac{P_0 P_\infty}{(P_\infty - P_0) e^{-rt} + P_0}. \quad (10)$$

Para a curva logística obtida na Equação (10), Bassanezi (2011) infere que:

- (i) Se  $P_0 < P_\infty$ , então  $P_0 < P(t) < P_\infty$  é crescente;
- (ii) Se  $P_0 > P_\infty$ , então  $P(t)$  é decrescente;
- (iii)  $P'(t)$  é uma função de  $P$  e tal função é uma parábola com concavidade para baixo com raízes  $P = 0$  e  $P = P_\infty$  (pontos de equilíbrio);
- (iv) Neste problema tem-se que  $r > 0$ , logo se  $0 < P(t) < \frac{P_\infty}{2}$ , então  $P'(t)$  é crescente e se  $\frac{P_\infty}{2} < P(t) < P_\infty$ ,  $P'(t)$  é decrescente;
- (v) A máxima variação obtem-se em  $P(t_m) = \frac{P_\infty}{2}$  e então  $t_m = \frac{1}{r} \ln\left(\frac{P_\infty - P_0}{P_0}\right)$
- (vi) Quando  $t = t_m$ , tem-se o ponto de inflexão de  $P(t)$ . Dessa forma,
  - (a) Se  $P_0 = \frac{P_\infty}{2}$ , então  $t_m = 0$ ;
  - (b) Se  $\frac{P_\infty}{2} < P_0 < P_\infty$ , então  $P(t)$  não tem ponto de inflexão.

### 2.3 Modelo logístico com parâmetro estocástico

De acordo com o abordado na Seção 2.2, as limitações ambientais regulam o crescimento de uma população impedindo que a mesma assuma grandes proporções. No entanto, flutuações aleatórias como surgimentos de epidemias no ambiente, o aumento de natalidade após períodos de guerras ou epidemias, processos migratórios/imigratórios, entre outros, podem afetar a evolução temporal de uma determinada população, sem perder o perfil de um crescimento logístico.

Uma forma de adicionar características aleatórias no modelo logístico contínuo é a substituição da taxa de crescimento  $r$  por um parâmetro estocástico  $\alpha + \beta\varepsilon(t)$  (MAIA, 2003), em que

- (i)  $\alpha$  é a taxa de crescimento intraespecífica da população, obtida do modelo logístico contínuo;
- (ii)  $\beta$  é uma constante que amplifica ou reduz os efeitos da flutuação aleatória;
- (iii) O valor esperado  $E(\alpha + \beta\varepsilon(t))$  é  $\alpha$ ;
- (iv)  $\varepsilon(t)$  é um ruído branco, isto é, uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero de variância constante e finita.

A substituição de  $r = \alpha + \beta\varepsilon(t)$  na Equação (8) resulta na seguinte equação diferencial com parâmetro estocástico

$$\frac{dP}{\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)P} = \alpha dt + \beta \varepsilon(t) dt = \alpha dt + \beta dW_t, \quad (11)$$

em que  $dW_t = \varepsilon(t)dt$  é a representação infinitesimal de um processo de Wiener, também comumente chamado de movimento Browniano, pois a integral de um ruído branco resulta em um processo de Wiener  $W = \{W_t\}_{t \geq 0}$ ,  $W_t = W(t)$ , com  $W_0 = W(0) = 0$  (CURSI; SAMPAIO, 2012).

Se  $\beta = 0$ , a Equação (11) reduz-se à Equação (8) e então recupera-se a equação diferencial do modelo logístico contínuo determinístico da Seção 2.2. Com  $\beta > 0$ , o segundo termo do lado direito da Equação (11) representa o caráter estocástico que modela flutuações aleatórias adicionadas ao modelo logístico.

Integrando a Equação (11) e seguindo com operações similares às efetuadas na Seção 2.2, obtemos

$$\ln \left| \frac{P}{\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right)} \right| = \alpha t + \beta W_t + C. \quad (12)$$

Assumindo as condições iniciais  $P(0) = P_0$  e  $W_0 = 0$ , a constante de integração  $C$  é determinada e, portanto, encontra-se a seguinte solução

$$P(t) = \frac{P_0}{\left(1 - \frac{P}{P_\infty}\right) e^{-(\alpha t + \beta W_t)} + 1} = \frac{P_0 P_\infty}{(P_\infty - P_0) e^{-(\alpha t + \beta W_t)} + P_0}. \quad (13)$$

A solução obtida pelo modelo estocástico, Equação (13), é similar à solução do modelo logístico determinístico, Equação (11), com a diferença do termo adicional  $\beta W_t$ . A sequência de números aleatórios gerada pelo processo de Wiener adicionará desvios aleatórios na evolução temporal da população  $P(t)$ . Quando  $\beta$  assume valores mais próximos de zero, tais desvios são cada vez menores e a solução da Equação (13) se aproxima cada vez mais da solução da Equação (11). Ao realizar a evolução temporal da população, considerando o valor esperado de  $\alpha + \beta \varepsilon(t)$ , o crescimento da população é idêntico ao modelo determinístico.

A Seção 3 foi destinada para a aplicação dos modelos propostos na população brasileira, utilizando-se dos dados oficiais do IBGE (2018a).

### 3 Dados e resultados

Após a apresentação dos modelos de projeção de dinâmica populacional na Seção 2, este trabalho voltou-se para a construção de cenários que descrevem a evolução temporal da população brasileira a partir do ano de 2017. Para isso, foram considerados os dados oficiais do IBGE dentre o período de 2000 à 2017 (IBGE, 2018a).

No ano de 2017, o Brasil possuía 207.660.929 habitantes e então nos modelos estudados a condição inicial adotada foi  $P_0 = P(0) = 2,07661 \times 10^8$ , onde  $t = 0$  refere-se ao ano de 2017. Além disso, em todos os modelos os dados foram escalados para que as projeções da população brasileira fossem obtidas por cem milhões de habitantes ( $10^8$ ).

As implementações computacionais dos modelos foram efetuadas e executadas em ferramentas *open source*, mais especificamente no *Libreoffice* e no *Octave* (GNU OCTAVE, 2019). Valores para os coeficientes de cada modelo foram estimados, os cenários foram gerados e os resultados comparados com dados oficiais do IBGE.

### 3.1 Dados oficiais do IBGE

Oficialmente, o IBGE divulga seus dados consolidados e suas projeções a cada ano e os disponibilizam em suas plataformas digitais (IBGE, 2018a). Das taxas de fecundidade são extraídas informações a respeito do tamanho da população brasileira e a velocidade com que a população está crescendo em cada unidade federativa. Na Figura 1 encontram-se tais dados e analisando-os percebe-se que a taxa de fecundidade está em declínio, mostrando que a população brasileira cresce desacelerando-se, isto é, com taxas em declínio conforme a evolução temporal.

Taxas de Fecundidade						
Unidades da Federação	Estimada	Projetadas				
	2015	2020	2030	2040	2050	2060
Brasil	1.80	1.76	1.72	1.69	1.67	1.66
Norte	2.11	2.00	1.88	1.83	1.81	1.80
Nordeste	1.78	1.73	1.69	1.67	1.67	1.66
Sudeste	1.73	1.70	1.68	1.66	1.63	1.61
Sul	1.77	1.74	1.72	1.71	1.69	1.68
Centro Oeste	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69	1.63

Figura 1: Taxas extraídas do modelo de projeção do IBGE.

Ainda sobre os dados das projeções, o IBGE estima que o ponto máximo ocorrerá aproximadamente no ano de 2047 com uma população por volta de  $2,33 \times 10^8$  (IBGE, 2018b). A partir desse momento a população entrará em declínio e estima-se que em 2060, o Brasil constituirá de aproximadamente 228,3 milhões de habitantes.

Na Seção 3.2, encontram-se as projeções da população brasileira via os quatro modelos propostos, utilizando as informações do IBGE (2018a).

### 3.2 Resultados e comparações

Iniciando as projeções com o primeiro modelo discreto descrito na Subseção 2.1.1, os coeficientes  $a$  e  $b$  foram determinados calculando as médias da taxa de natalidade (fecundidade)  $a = 0,031955763$  e de mortalidade (óbitos)  $b = 0,011850551$ , dentre os anos de 2000 e 2017. Substituindo no modelo e considerando a população inicial  $P_0$ , a projeção encontra-se na Figura 2.

Nota-se na Figura 2 que por volta do ano de 2090 a população praticamente não terá alterações significativas, sugerindo uma estabilização em  $2,62286 \times 10^8$  habitantes. O modelo logístico discreto não apresenta redução da população, o que é esperado por ser uma versão discreta do modelo logístico contínuo analisado na Seção 2.2. É possível verificar também que o modelo apresentou um crescimento inicial mais acelerado e a medida que o tempo passa, o crescimento da população fica cada vez menor, o que é o ponto em comum em relação aos dados oficiais do IBGE, no entanto o ponto de estabilização difere consideravelmente.

O segundo modelo discreto (Subseção 2.1.2) considera regressões lineares diretamente da quantidade de nascimentos e óbitos para projetar a variação da população. As retas obtidas foram

$$y(w) = aw + b \quad \text{e} \quad z(w) = cw + d,$$

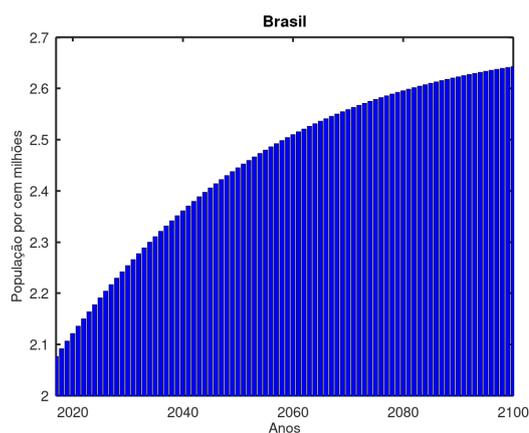


Figura 2: Projeção da população brasileira via modelo logístico discreto.

em que  $a = -39.402,04$ ,  $b = 82.292.415,50$ ,  $c = 14.665,32$ ,  $d = -28.305.655,93$ ,  $y = y(w)$  refere-se aos dados de nascimentos e  $z = z(w)$  aos dados de óbitos. Neste caso a variável  $w = t+2017$  corresponde diretamente aos anos, isto é, 2017, 2018, ... e assim sucessivamente. Após a construção das variações  $\Delta \hat{P}_t$  correspondentes, a partir de  $P_0$  obteve-se a Figura 3.

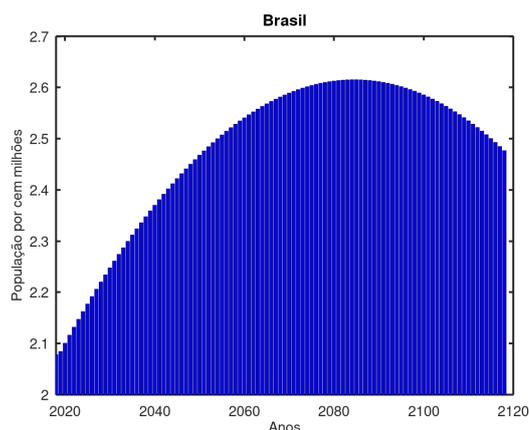


Figura 3: Projeção da população brasileira via modelo discreto - ajuste.

Com a aplicação desse modelo, a população brasileira atinge seu ponto de máximo aproximadamente no ano de 2084 em  $2,6151 \times 10^8$  e então passa a declinar. Ao comparar com o primeiro modelo, o fato da Equação (5) conter a variação obtida das regressões lineares  $\Delta \hat{P}_t$ , nos possibilita ter incrementos negativos na evolução da população e isso ocorre quando  $z(w) > y(w)$ . Assim, ao contrapor com as projeções oficiais do IBGE, o modelo discreto-ajuste estudado tem comportamento semelhante, isto é, a população inicia-se em crescimento desacelerado, atinge um ponto de máximo e posteriormente começa um declínio. No entanto, existem diferenças significativas nos números encontrados, pelo IBGE tem-se o ponto máximo em 2047 com  $2,33 \times 10^8$  habitantes. O declínio de populações pode ser associado a diversos fatores como processos migratórios, aumento no custo de vida, entre outros.

O modelo logístico contínuo (Seção 2.2) depende da constante  $r$  que representa a taxa de crescimento intraespecífica e de uma estimativa para  $P_\infty$ . Para determinar o parâmetro  $r$ , consideramos  $P_\infty = 2,6151 \times 10^8$  obtido do segundo modelo e construímos os dados  $\{(x_i, y_i)\}$ , em que  $x_i$  contém

os anos de 2000 à 2017,  $y_i = \ln \left| \frac{P_i P_\infty}{(P_\infty - P_i)} \right|$  e  $P_i$  representa os dados da população do Brasil.

Efetuada a regressão linear dos dados  $\{(x_i, y_i)\}$  e comparando com a Equação (9) conclui-se que o coeficiente angular da reta é uma estimativa para  $r$ . Neste caso obteve-se  $r = 0,0851$  e então o gráfico da Figura 4 foi construído substituindo os valores de  $r$  e  $P_0$  na Equação (10).

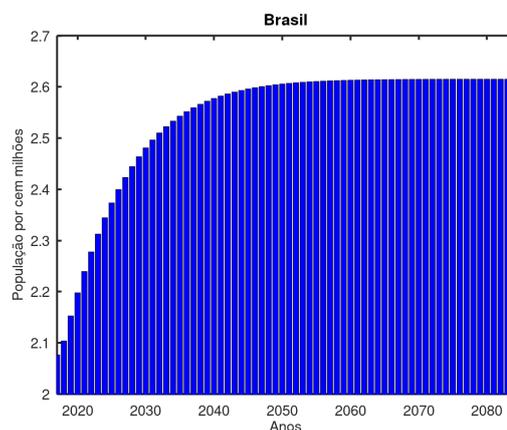


Figura 4: Projeção da população brasileira obtida do modelo logístico contínuo determinístico.

Ao analisar a Figura 4, a partir do ano de 2053, a variação da população passa a ser pequena. No ano de 2053 a população encontra-se em  $2,54 \times 10^8$  indivíduos e no limite  $t \rightarrow \infty$ , a população atingirá  $2,6151 \times 10^8$ , isto é, tem-se uma variação de apenas 3% da população no intervalo  $[2053, \infty)$ , caracterizando aproximadamente uma estabilidade. Assim, a estabilização do modelo logístico contínuo ocorre em 2053, há 6 anos dos dados do IBGE (2018b). Além disso, quando comparado com os modelos discretos sua estabilização ocorre consideravelmente antes.

Nota-se que, conforme exposto na Seção 2.2, a função logística da Figura 4 não possui ponto de inflexão, uma vez que os valores utilizados para  $P_0$  e  $P_\infty$  satisfazem  $\frac{P_\infty}{2} > P_0$ .

Considerando o modelo logístico com a taxa de crescimento intraespecífica sendo um parâmetro estocástico, contendo o coeficiente  $r$  do modelo logístico contínuo determinístico, acrescido de um ruído branco, a modelagem passa a incorporar características inerentes à imprevisibilidade de fenômenos de dinâmica populacional. A aplicabilidade na população brasileira é justificável por exemplo, pelos recentes fatos como surgimentos de epidemias de *Zika* em 2015 – 2016, *COVID-19* em 2020 e a atual imigração venezuelana.

Neste estudo foram considerados três valores para  $\beta$ , a saber  $\beta = 1$ ,  $\beta = 0,5$  e  $\beta = 0,1$ , com o propósito de avaliar os impactos das flutuações aleatórias na dinâmica da população, ver Figuras 5, 6 e 7. Para cada uma das situações,  $\alpha = r = 0,0851$  foram escolhidos e um processo de Wiener foi criado aplicando-se uma sequência de números aleatórios na inversa da distribuição cumulativa normal de média zero e desvio padrão um. No caso de planilhas eletrônicas, foi usado o comando `INV.NORM.N(ALEATÓRIO();0;1)`.

Na Figura 5 percebe-se uma grande oscilação no início da dinâmica populacional e à medida que o tempo evolui, as oscilações ficam menores e a população tende ao patamar similar ao apresentado no modelo determinístico, Figura 4. Quando se diminui o valor de  $\beta$ , as oscilações iniciais decrescem e a dinâmica fica cada vez mais próxima da Figura 4. Nota-se nos três casos, Figuras 5, 6 e 7, que as oscilações são maiores no início e se atenuam ao longo do tempo. Esse comportamento é característico da forma como o ruído branco foi adicionado na modelagem (CURSI; SAMPAIO, 2012).

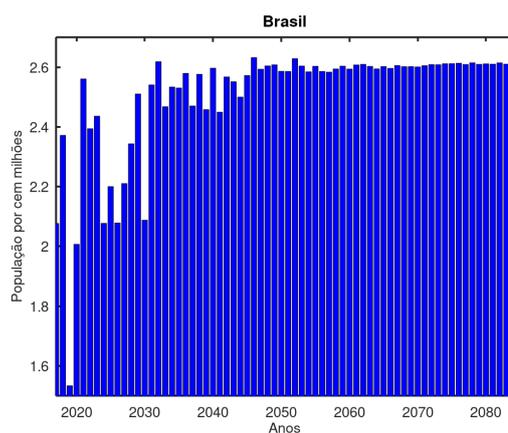


Figura 5: Projeção da população brasileira via modelo 4 para  $\beta = 1$ .

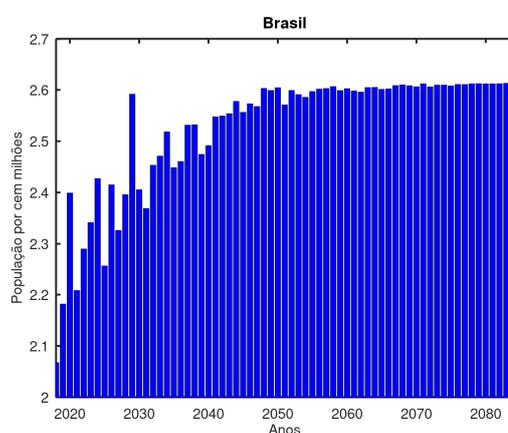


Figura 6: Projeção da população brasileira via modelo 4 para  $\beta = 0,5$ .

Embora hajam oscilações, conforme mostram as Figuras 5, 6 e 7, todas as simulações possuem em média o mesmo comportamento do modelo logístico determinístico, ver Figura 4. Visualmente, a simulação obtida com  $\beta = 0,1$  apresenta uma estabilização da população por volta do ano de 2050, aproximando-se da projeção divulgada pelo IBGE.

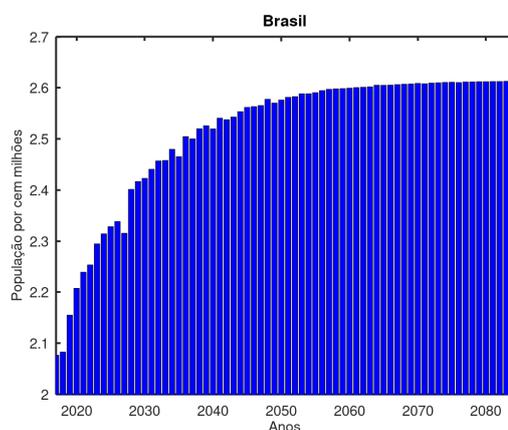


Figura 7: Projeção da população brasileira via modelo 4 para  $\beta = 0,1$ .



## 4 Conclusões

A modelagem de fenômenos populacionais constitui-se num exemplo apropriado para a aplicação de equações de diferenças, equações diferenciais determinísticas e estocásticas, permitindo estudos analíticos, práticos e computacionais acerca do assunto.

O objetivo deste trabalho foi estudar modelos matemáticos de dinâmica populacional discreto, contínuo e estocástico, implementá-los para a população brasileira via dados do IBGE, investigar o comportamento da evolução temporal da população em cada modelo e compará-los entre si. Além disso, comparar os resultados obtidos com a projeção oficial do IBGE.

Em geral, os modelos apresentaram um limite máximo para a população brasileira de aproximadamente 260 milhões. Nos resultados do modelo logístico contínuo foi identificada uma estabilização da população em aproximadamente 254 milhões de habitantes, a partir do ano de 2053. Ao comparar com a projeção do IBGE, de que a população do Brasil começará entrar em declínio em 2047, o modelo logístico de Verhulst não representa tal queda, mas aponta para possível máximo em tal ano e o modelo estocástico com  $\beta = 0, 1$ , aponta para possível máximo em 2050.

Do ponto de vista demográfico e de dinâmica populacional, com o desenvolvimento dos modelos foi possível observar o perfil da evolução de cada modelo e compará-los entre si e com a projeção do IBGE. Com relação ao modelo estocástico, foram atribuídos diferentes valores para  $\beta$  e uma possibilidade de trabalho futuro seria obter seu valor realizando um estudo mais aprofundado sobre os dados e características da população estudada. No entanto, foi possível concluir que é viável incorporar aspectos imprevisíveis na dinâmica de populações, adicionando um ruído branco na taxa de crescimento intraespecífica da equação diferencial do modelo logístico de Verhulst.

## 5 Referências Bibliográficas

BASSANEZI, R. C. **Equações diferenciais ordinárias: um curso introdutório**. Santo André: UFABC, 2011.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

CURSI, J. E. S.; SAMPAIO, R. **Modelagem estocástica e quantificação de incertezas**. São Carlos: SBMAC, 2012.

GNU OCTAVE. 2019. Disponível em: <https://www.gnu.org/software/octave/>. Acesso em: 10 jan. 2020.

GONTIJO, A. B. **Estudo e modelagem das dinâmicas estruturais de assembleias de formigas tropicais em diferentes escalas ecológicas**. 2009, 96 f. Dissertação (Mestrado em Ecologia de Biomas Tropicais) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2009.

IBGE. **Projeção da população brasileira e das unidades da federação**. [S.l.]: IBGE. 2018a. Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/>. Acesso em: 15 out. 2019.

IBGE. **Projeção da População 2018: número de habitantes do país deve parar de crescer em 2047**. [S.l.]: IBGE. 2018b. Disponível em: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-sala-de-imprensa/2013-agencia-de-noticias/releases/21837-projecao-da-populacao-2018-numero-de-habitantes-do-pais-deve-parar-de-crescer-em-2047>. Acesso em: 20 out. 2020.

MAIA, M. M. F. **Equações diferenciais estocásticas e dinâmica de populações**. 2003. 170 f. Dis-



---

sertação (Mestrado em Estatística Aplicada e Modelação) – Faculdade de Engenharia, Universidade de Porto, Porto, 2003.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico**: aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Pearson, 1996.