

**Revista Eletrônica  
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664  
v. 22, n. 1, jul. 2022

**Juan López Linares**

Faculdade de Zootecnia e Engenharia  
de Alimentos  
Universidade de São Paulo  
jlopez@usp.br

## **Transformação de Inversão: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática**

Inversion Transformation: solving five problems proposed for  
the International Mathematical Olympiad

### **Resumo**

Cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) são discutidos em detalhe. As demonstrações envolvidas nas soluções são complementadas pela disponibilização dos respectivos links das figuras interativas utilizando o GeoGebra. É esperado que o artigo possa ser apreciado tanto por estudantes que preparam-se para as fases finais de competições nacionais ou internacionais quanto por professores que atuam no ensino e interessam-se em desafios olímpicos. Além da Transformação de Inversão, a fundamentação teórica é baseada em uma combinação de conceitos como: Teoremas de Desargues, da Bissetriz e Pitágoras, Incentro e Circuncentro, Colinearidade, Triângulo Pedal, Lei dos Senos e elementos de Topologia.

**Palavras-chave:** Olimpíadas internacionais de Matemática. Teoremas de Desargues. Teoremas da Bissetriz. Transformação de Inversão. Ensino médio e universitário. Geometria.

### **Abstract**

Five problems proposed for the International Mathematical Olympiad (IMO) are discussed in detail. The demonstrations involved in the solutions are complemented by the availability of the respective links of the interactive figures using GeoGebra. It is hoped that the article can be appreciated both by students preparing for the final stages of national or international competitions and by teachers interested in olympic challenges. In addition to the Inversion Transformation, the theoretical foundation is based on a combination of concepts such as: Desargues, Bisectrix and Pythagoras Theorems, Incenter and Circumcenter, Collinearity, Pedal Triangle, Sine Law and Topology elements.

**Keywords:** International Mathematics Olympics. Desargues' theorem. Bisector theorem. Inversion transformation. High school and university. Geometry.



# 1 Introdução

A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, International Mathematical Olympiad) é uma competição para estudantes do Ensino Médio. Os objetivos são descobrir, estimular e desafiar estudantes talentosos em Matemática. Fortalecer relações de amizade internacional entre matemáticos, criar oportunidades para o intercâmbio de informação sobre programas e conteúdos de estudo e promover a Matemática em geral.

Na preparação para uma Olimpíada Internacional de Matemática cada delegação (menos o país sede) pode enviar problemas para formar a base de dados inicial, chamada lista longa (LongList, LL). Os mesmos não podem ter sido usados em competições anteriores, nem publicados e devem abranger vários tópicos de Matemática pré-universitária. O país sede da competição cria um Comitê de Seleção que escolhe os melhores problemas da LL para formar a lista curta (ShortList, SL). Os professores Líderes, um por equipe, recebem a SL no primeiro dia da reunião e escolhem, por maioria simples, os seis problemas da SL que serão usados na IMO. As duas listas são mantidas em segredo até a IMO do próximo ano.

As resoluções neste artigo complementam algumas poucas disponíveis nos fóruns em língua inglesa e nas publicações das competições. Utilizando argumentos menos rebuscados, focou-se na apresentação mais detalhada das transições, possibilitando que alunos e professores conseguissem acompanhar o desenvolvimento do problema. Como complemento, uma versão interativa de cada uma das figuras do texto está disponibilizada no site do GeoGebra.

O presente texto foi elaborado a partir de materiais didáticos utilizados durante uma aula do curso “Geometria Olímpica com GeoGebra” para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil. Outros conjuntos de problemas resolvidos de olimpíadas internacionais de Matemática sobre Serie Harmônica (LÓPEZ LINARES; BRUNO-ALFONSO; BARBOSA, 2020), Potência de um ponto e Eixo Radical (LÓPEZ LINARES; SANTOS; JESUS, 2021a) e Extremos com desigualdades na Geometria (LÓPEZ LINARES; SANTOS; JESUS, 2021b) foram publicados.

Inicia-se na seção 2 com uma introdução dos conceitos básicos sobre a Transformação de Inversão. Na seção 3 são resolvidos cinco desafios propostos para as IMOs. Nos Problemas 3 e 4 apresentam-se duas soluções para cada um, sem utilizar a inversão e usando a Transformação de Inversão.

## 2 Conceitos básicos

**Definição 1.** *Dados um plano  $l$ , uma circunferência  $i \in l$ , com centro  $O$  e raio  $r$ , e um ponto  $P \in l$ , o ponto  $P'$  que pertence a semirreta  $OP$  e satisfaz*

$$OP' \cdot OP = r^2$$

*é chamado inverso de  $P$  em relação a  $i$  (Figura 1). O ponto  $O$  é chamado “centro de inversão” e  $i$  é chamada de “circunferência de inversão”. Também utiliza-se a notação*

$$P' = \text{Inv}(P, i).$$

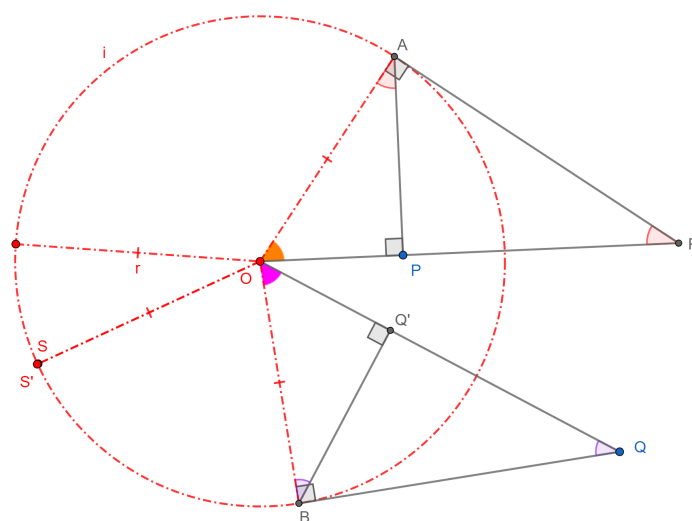


Figura 1: Ilustração da Definição 1 e da construção dos pontos inversos  $P'$  e  $Q'$ . Quando  $S \in i \Rightarrow S' = S$ . Versão interativa aqui.

Os pontos no interior de  $i$  são transformados em pontos no exterior de  $i$  e vice-versa. Também convencionou-se que “o infinito”, denotado pelo símbolo  $\infty$ , e o centro de inversão  $O$  formam um par inversivo.

Segue diretamente da Definição 1 que os pontos sobre a circunferência de inversão são invariantes. Isto é, quando o ponto  $S \in i \Rightarrow S' = S$ . Adicionalmente,  $P = \text{Inv}(\text{Inv}(P, i), i)$ . Ou seja,  $P' = \text{Inv}(P, i)$  se, e somente se,  $P = \text{Inv}(P', i)$ .

A seguir descreve-se um procedimento de construção do inverso  $P'$ , com régua e compasso, quando o ponto  $P$  está no **interior** da circunferência de inversão (Figura 1):

1. Traçar a semirreta  $OP$ .
2. Traçar uma perpendicular a  $OP$  passando por  $P$  e marcar o ponto  $A$  na interseção desta com  $i$ .
3. Construir o segmento  $OA$ . Traçar uma tangente a  $i$  passando por  $A$  e marcar o ponto  $P'$  na interseção desta com a reta  $OP$ .

Como  $\angle AOP = \angle AOP'$  (comum) e  $\angle OPA = \angle OAP' = 90^\circ$  tem-se  $\triangle OPA \sim \triangle OAP'$ . Segue que

$$\frac{AP}{P'A} = \frac{AO}{P'O} = \frac{PO}{AO} \Rightarrow OP \cdot OP' = OA^2 = r^2.$$

Segue o procedimento de construção do inverso  $Q'$ , quando o ponto  $Q$  está no **exterior** da circunferência de inversão (Figura 1):

1. Traçar a semirreta  $OQ$ .
2. Traçar uma tangente a  $i$  partindo de  $Q$  e marcar o ponto de tangência  $B$ . Construir o segmento  $OB$ .
3. Marcar  $Q'$  como a projeção ortogonal de  $B$  sobre  $OQ$ .

Analogamente ao caso anterior vale  $\triangle OQB \sim \triangle OBQ'$  e

$$OQ \cdot OQ' = OB^2 = r^2.$$

**Proposição 2** (Propriedade dos inversos de dois pontos). *Considera-se uma circunferência de inversão  $i$  de centro  $O$  e raio  $r$  (Figura 2). Sejam os pontos  $P, Q$ , (não colineares com  $O$  e diferentes deste) e  $P' = \text{Inv}(P, i)$  e  $Q' = \text{Inv}(Q, i)$ . Então  $\triangle OPQ \sim \triangle OQ'P'$  e*

$$Q'P' = \frac{r^2}{OP \cdot OQ} PQ.$$

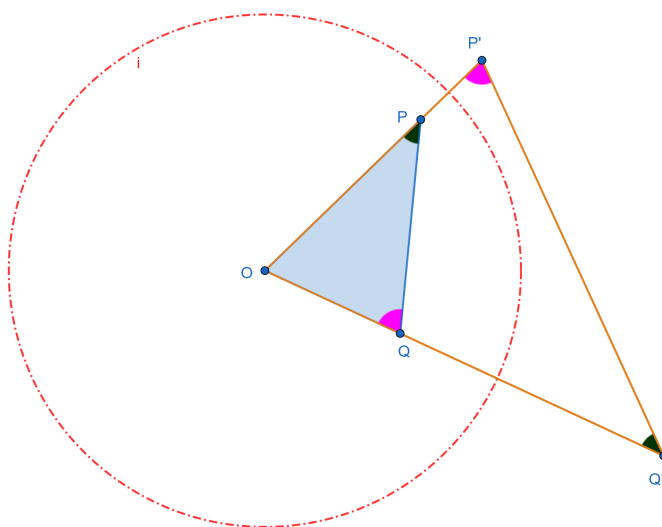


Figura 2: Guia para a demonstração da Proposição 2. Versão interativa aqui.

*Demonstração.* Tem-se,

$$OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ' = r^2. \quad (1)$$

Isto é,

$$\frac{OP}{OQ} = \frac{OQ'}{OP'}.$$

Como  $\angle POQ = \angle Q'OP'$  (comum), pelo critério de semelhança lado-ângulo-lado, segue que:  $\triangle OPQ \sim \triangle OQ'P'$ . Com isto:

$$\angle OPQ = \angle OQ'P',$$

$$\angle OQP = \angle OP'Q'.$$

Também vale que:

$$\frac{OQ}{OP'} = \frac{PQ}{Q'P'}.$$

Na equação anterior coloca-se em evidência  $Q'P'$  e de (1) utiliza-se  $OP' = \frac{r^2}{OP}$  para concluir que:

$$Q'P' = \frac{r^2}{OP \cdot OQ} PQ.$$

□

Até aqui apresentou-se a inversão de pontos isoladamente. A seguir estudam-se os inversos dos lugares geométricos (LG) reta e circunferência. Isto é, conjuntos de pontos.

**Definição 3.** Dados um plano  $l$  e um lugar geométrico  $f \in l$ , o LG  $f' \in l$ , é chamado inverso de  $f$  quando o ponto  $P \in f$  se, e somente se, o ponto  $P' \in f'$ .

Embora  $P' \neq P$  em geral, existem casos em que o LG não muda após a inversão.

**Proposição 4** (Inversão de reta que passa por  $O$ ). A inversa  $h'$  de uma reta  $h$  que passa por  $O$  é ela mesma. Ou seja,  $h' = \text{Inv}(h, i) = h$  (Figura 3).

*Demonstração.* Segue diretamente da Definição 1. Os pontos no interior de  $i$  e sobre a semirreta  $OC$  transformam-se nos pontos no exterior de  $i$  e vice-versa. Convenciona-se que “o infinito”, denotado pelo símbolo  $\infty$ , pertence a toda reta  $h$ . Logo,  $O = \text{Inv}(\infty, i)$  e  $\infty = \text{Inv}(O, i)$  pertencem tanto a  $h$  quanto a  $h'$ .  $\square$

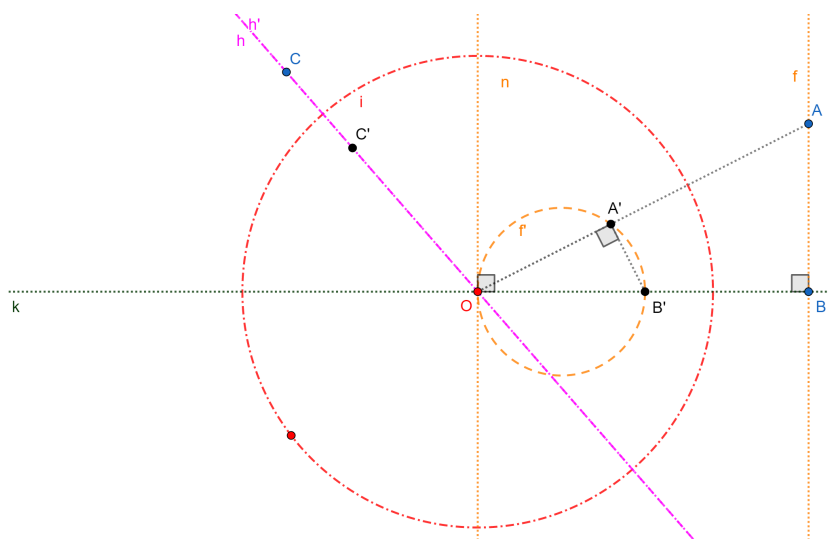


Figura 3: Guia para a demonstração das Proposições 4, 5 e 6. Versão interativa aqui. Podem movimentar-se os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  e mudar o raio da circunferência de inversão  $i$ .

**Proposição 5** (Inversão de reta que **não** passa por  $O$ ). A inversa  $f'$  de uma reta  $f$  que não passa por  $O$  é uma circunferência que passa por  $O$  (Figura 3). Adicionalmente, a reta  $n$ , tangente a  $f'$  em  $O$ , é paralela com  $f$ .

*Demonstração.* Construir uma reta  $k$  perpendicular a  $f$  passando pelo centro de inversão  $O$ . Marcar o ponto  $B = k \cap f$  e escolher um ponto arbitrário  $A \in f$  ( $A \neq B$ ). Sejam  $A' = \text{Inv}(A, i)$  e  $B' = \text{Inv}(B, i)$ .

Como viu-se na Proposição 2 tem-se  $\triangle OAB \sim \triangle OB'A'$ . Segue que  $\angle OA'B' = \angle OBA = 90^\circ$ . Do fato de  $\angle OA'B' = 90^\circ$ , para todo  $A \in f$  ( $A \neq B$ ), o ponto  $A'$  pertence a circunferência  $f'$  de diâmetro  $OB'$ . Convenciona-se que “o infinito” pertence a reta  $f$  e  $O = \text{Inv}(\infty, i) \in f'$ .

Reciprocamente, dado um ponto  $A' \in f'$  ( $A' \neq B'$  e  $A' \neq O$ ) tem-se  $\angle OA'B' = 90^\circ$  (pois  $OB'$  é diâmetro de  $f'$ ). Pela Proposição 2 segue que  $\triangle OB'A' \sim \triangle OAB$ . Portanto,  $\angle OBA = \angle OA'B' = 90^\circ$ . Como  $\angle OBA = 90^\circ$ , para todo  $A' \in f'$  ( $A' \neq B'$  e  $A' \neq O$ ), todo ponto  $A$  está contido numa reta

perpendicular ao segmento  $OB$ . Como  $O \in f'$ , por convenção,  $\infty = \text{Inv}(O, i)$  e “o infinito” pertence a reta  $f$ .

Para a segunda parte, suponha-se, por absurdo, que as retas  $f$  e  $n$  não sejam paralelas. Logo, existe o ponto  $P = (f \cap n) \neq \infty$ . Então,  $P' \in f' \cap n'$ . Como a reta  $n$  passa por  $O$ , pela Proposição 4, segue que  $n = n'$  e  $P' \in f' \cap n$  ( $P' \neq O$ , pois  $P \neq \infty$ ). Ou seja, tanto  $P'$  quanto  $O$  são pontos diferentes que pertencem a interseção de  $f'$  e  $n$ . Contradição,  $n$  não seria tangente a  $f'$ .  $\square$

**Proposição 6** (Inversão de circunferência que passa por  $O$ ). *A inversa de uma circunferência  $f'$  que passa pelo centro de inversão  $O$  é uma reta  $f = \text{Inv}(f', i)$  (Figura 3). Adicionalmente, a reta  $n$ , tangente a  $f'$  em  $O$ , é paralela com  $f$ .*

*Demonstração.* Segue diretamente da Proposição 5 e da propriedade:

$$\text{Inv}(\text{Inv}(P, i), i) = \text{Inv}(P', i) = P.$$

$\square$

**Proposição 7** (Inversão de circunferência que **não** passa por  $O$ ). *A inversa de uma circunferência  $d$  que não passa pelo centro de inversão  $O$  é outra circunferência  $d'$  (Figura 4). Adicionalmente, as retas tangentes externas comuns de  $d$  e  $d'$  passam por  $O$ . Isto é, o ponto  $O$  é o centro de homotetia externo de  $d$  e  $d'$ .*

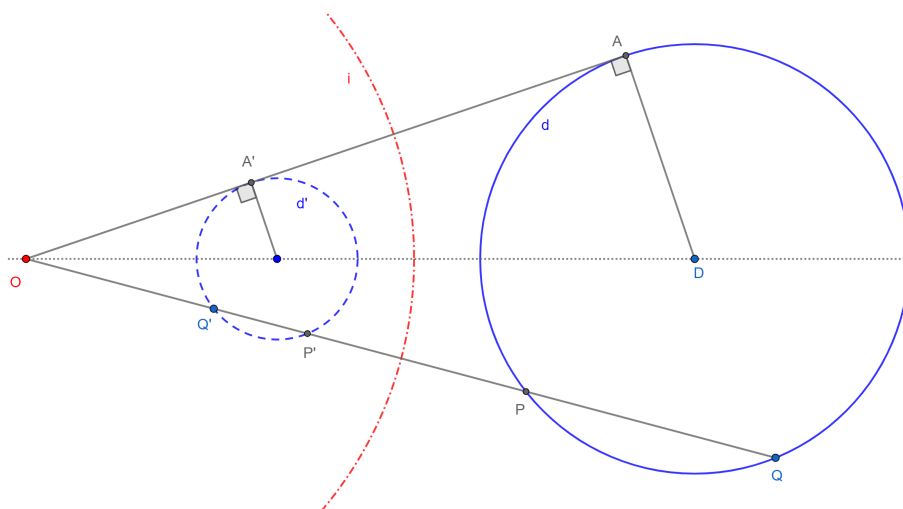


Figura 4: Guia para a demonstração da Proposição 7. Versão interativa aqui.

*Demonstração.* Seja uma circunferência de inversão  $i$  de centro  $O$  e raio  $r$ . Seja um ponto  $Q \in d$ ,  $P$  a segunda interseção da reta  $OQ$  com  $d$ ,  $P' = \text{Inv}(P, i)$ ,  $Q' = \text{Inv}(Q, i)$  e  $OA$  um segmento tangente a  $d$ . A potência do ponto  $O$  relativa a  $d$  não depende da posição específica de  $Q$  e pode ser escrita como:

$$OQ \cdot OP = \text{Pot}_d(O) = OA^2.$$

Por outro lado, como  $P$  e  $P'$  são um par de inversão vale:

$$OP' \cdot OP = r^2.$$

Dividindo as duas últimas equações encontra-se:

$$\frac{OQ}{OP'} = \frac{Pot_d(O)}{r^2} = \frac{OA^2}{r^2} = cte.$$

Em palavras, independentemente da posição do ponto  $Q$  sobre a circunferência  $d$  a razão  $\frac{OQ}{OP'}$  não muda. Ou seja, os pontos  $Q$  e  $P'$  são homólogos. Com isto,  $d'$  é outra circunferência e uma tangente a  $d$  também o será a  $d'$ . O resultado continua sendo válido quando  $P = Q$ , pois neste caso  $OP = OQ = OA$ .  $\square$

**Definição 8** (Ângulo entre duas circunferências que intersectam-se). *O ângulo entre duas circunferências que intersectam-se num ponto é definido como sendo igual ao ângulo formado pelas suas retas tangentes no mesmo ponto. Duas circunferências são chamadas ortogonais quando este ângulo é  $90^\circ$ .*

**Proposição 9** (Inversão preserva o ângulo entre retas). *Sejam  $f$  e  $g$  duas retas que não passam por  $O$  e intersectam-se no ponto  $P$  formando um ângulo  $\alpha$ . Considera-se uma inversão relativa a uma circunferência  $i$  centrada em  $O$ . Sejam  $f'$  e  $g'$  as inversas de  $f$  e  $g$ , respectivamente. Então o ângulo formado entre  $f'$  e  $g'$  em  $P' = Inv(P, i)$  é  $\alpha$  (Figura 5).*

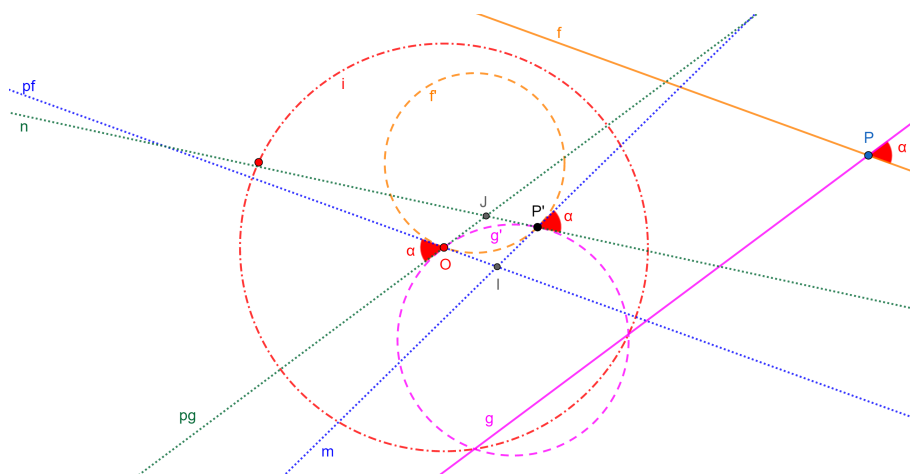


Figura 5: Guia para a demonstração da Proposição 9. Versão interativa aqui.

*Demonstração.* Como as retas  $f$  e  $g$  não passam por  $O$  transformam-se, pela inversão, nas circunferências  $f'$  e  $g'$  passando por  $O$ . Sejam  $pf$  e  $pg$  as retas tangentes a  $f'$  e  $g'$  em  $O$ . Viu-se na Proposição 5 que  $pg \parallel g$  e  $pf \parallel f$ . Logo, o ângulo entre  $pf$  e  $pg$  em  $O$  é  $\alpha$ . Consideram-se as retas  $m$  e  $n$ , tangentes em  $P' = Inv(P, i)$  a  $f'$  e  $g'$ , respectivamente. Sejam  $I = pf \cap m$  e  $J = pg \cap n$ . Como os triângulos  $IOP'$  e  $JOP'$  são isósceles de base  $OP'$  o ângulo entre  $m$  e  $n$  também é  $\alpha$ .  $\square$

Os ângulos entre duas retas quando alguma delas (ou as duas) passa(m) pelo centro de inversão também são preservados.

## 2.1 Transformação de reta e circunferência em circunferências concêntricas

**Exercício 10.** *Transformar por inversão a reta  $g$  e a circunferência  $c$  em circunferências concêntricas. Construir dinamicamente as circunferências tangentes simultaneamente a  $g$  e  $c$ .*

LÓPEZ LINARES, J. Transformação de Inversão: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 22, n. 1, p. 27–47, jul. 2022.

DOI: 10.21167/cqdv22n12022027047 Disponível em: [www.fc.unesp.br/departamentos/matematica/revista-cqd](http://www.fc.unesp.br/departamentos/matematica/revista-cqd)

### 2.1.1 Resolução do Exercício 10.

A Figura 6 mostra uma construção geométrica inicial.

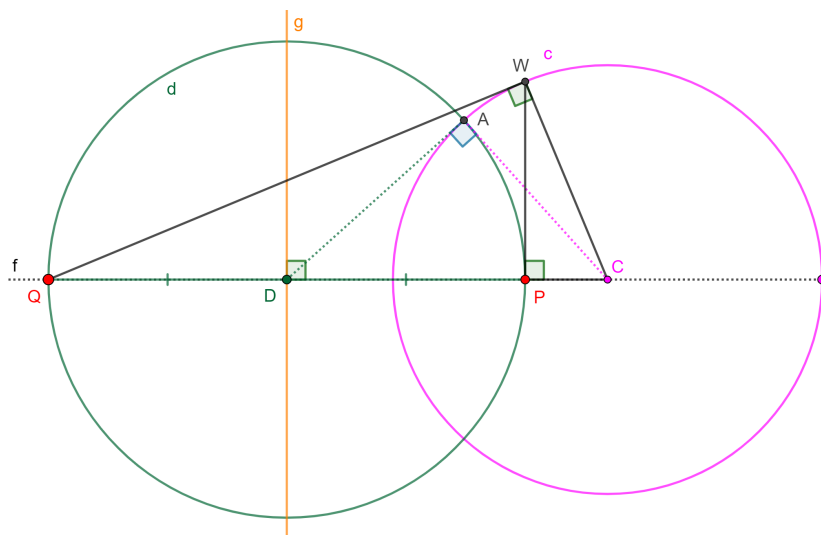


Figura 6: Construção geométrica inicial para o Exercício 10. Versão interativa [aqui](#).

1. Traçar a reta  $f$  perpendicular a  $g$  e passando pelo centro  $C$  de  $c$ . Marcar o ponto  $D = g \cap f$ .
2. Esboçar um ponto  $A \in c$  tal que  $\angle DAC = 90^\circ$ . Construir com centro em  $D$  a circunferência  $d$  de raio  $DA$  e marcar os pontos mágicos  $P$  e  $Q$  na interseção de  $d$  com  $f$ .  $d$  é perpendicular com  $c$  e  $g$  simultaneamente.
3. Os pontos  $P$  e  $Q$  são chamados mágicos porque são os únicos onde pode ser colocado o centro de uma circunferência de inversão que transforma  $c$  e  $g$  em circunferências concêntricas. Vale que:  $P = \text{Inv}(Q, c)$  e  $Q = \text{Inv}(P, c)$ . Entendendo a reflexão relativa a reta  $g$  como uma operação de inversão relativa a uma circunferência de raio infinito pode-se escrever também:  $P = \text{Inv}(Q, g)$  e  $Q = \text{Inv}(P, g)$ .
4. A circunferência  $i$ , com centro em  $Q$ , transforma por inversão  $c$  e  $g$  nas circunferências concêntricas  $c'$  e  $g'$ , respectivamente (Figura 7). O centro comum destas últimas é o ponto  $P' = \text{Inv}(P, i)$ .
5. Uma circunferência  $r$  que tangencie simultaneamente  $c'$  e  $g'$  (relativamente fácil de construir) é transformada pela inversão relativa a  $i$  na circunferência  $r'$  que tangencia tanto  $c$  como  $g$  (difícil de construir por outro caminho).

Figura 7: Construção geométrica final para o Exercício 10. Versão interativa [aqui](#).

### 3 Problemas resueltos.

### 3.1 Inversão. Circunferências concêntricas. Teorema de Pitágoras. P12 SL IMO 1982.

**Problema 1.** Quatro circunferências diferentes  $c$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  e uma reta  $l$  são dadas em um plano. A circunferência  $c$  e a reta  $l$  são disjuntas. As circunferências  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  são tangentes entre si e com  $c$  e  $l$ . Assumir que o raio de  $c$  seja  $R$ , determinar a distância do centro de  $c$  a  $l$ .

A IMO 1982 foi realizada na cidade de Budapeste, Hungria. Problema 12 da lista curta, proposto pela delegação da Finlândia (DJUKIC *et al*, 2011).

### 3.1.1 Resolução do Problema 1.

A chave para resolver o problema está em pensar na possibilidade de uma das circunferências  $c_i$ , por exemplo  $c_3$ , ser uma reta paralela com  $l$ . A tangência entre  $c_3$  e  $l$  acontece no infinito. A construção inicial é feita no espaço inverso e com uma simetria que a circunferência  $c'_3$  transforma-se na reta  $c_3$ . Isto facilita as contas.

Seja  $f$  uma reta perpendicular a  $l$  que passa pelo centro de  $c$ , marcar o ponto  $K = f \cap l$ . Existe um ponto mágico  $Y \in f$  tal que uma circunferência de inversão  $i$ , centrada em  $Y$ , mapeia  $c$  e  $l$  em duas circunferências concêntricas  $c'$  e  $l'$ , de centro comum  $Z$  e com  $c'$  no interior de  $l'$  (Exercício 10). A Figura 8 mostra uma construção geométrica inicial.

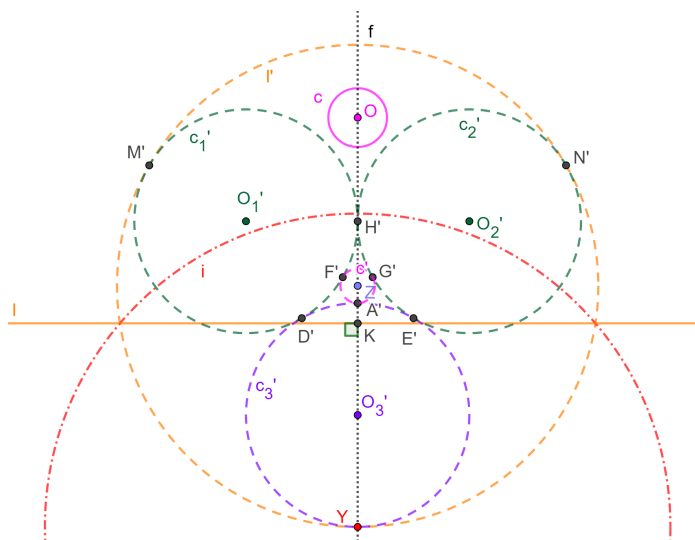


Figura 8: Construção geométrica inicial para o Problema 1. Elementos do espaço inverso em linhas tracejadas. Versão interativa [aqui](#).

Construir as circunferências  $c'_i$  tangentes externamente com  $c'$  e internamente com  $l'$ , todas com o mesmo raio. Construir  $c'_3$  de tal forma que  $c'_3 \cap l' = Y$ . Com isso  $Inv(c'_3, i) = c_3$  é uma reta paralela com  $l$ . Aplicando a inversão aos outros elementos obtêm-se a imagem da Figura 9.

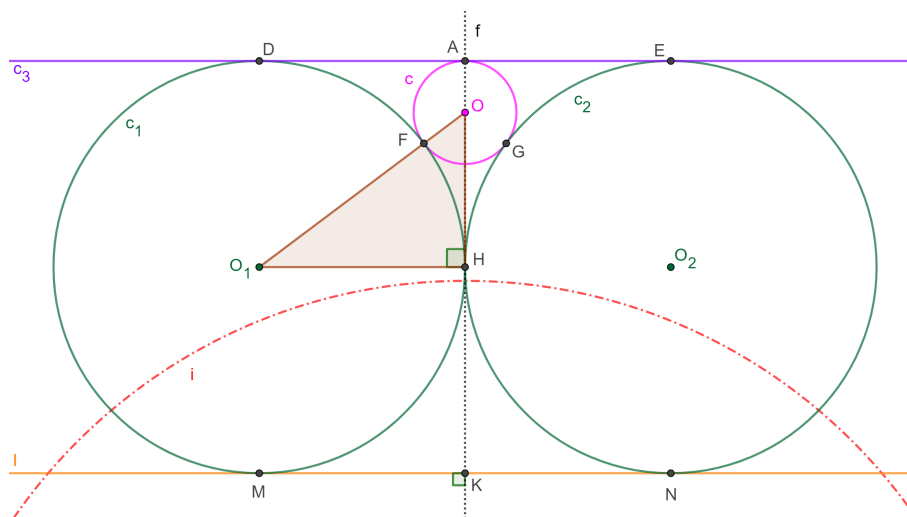


Figura 9: Segunda construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa [aqui](#).

Sejam  $O_1$ ,  $H$  e  $x = O_1H$  o centro da circunferência  $c_1$ , a interseção das circunferências  $c_1$  e  $c_2$  e a distância entre os dois pontos anteriores, respectivamente. Como o raio de  $c$  é  $R$ , no triângulo retângulo  $O_1HO$ , pelo Teorema de Pitágoras, vale:

$$x^2 + (x - R)^2 = (x + R)^2.$$

Segue que  $x = 4R$  e a distância de  $O$  até  $L$  é  $OK = 7R$ .

Na Figura 10 são mostrados simultaneamente todos os elementos das duas construções anteriores. Incluídos os pontos de tangência, dois a dois, entre as curvas. Quando permite-se que as circunferências  $c'_1$ ,  $c'_2$  e  $c'_3$  girem um ângulo  $\gamma$  em torno do ponto  $Z$  suas inversas  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  formam o padrão animado no *Passo* = 4.

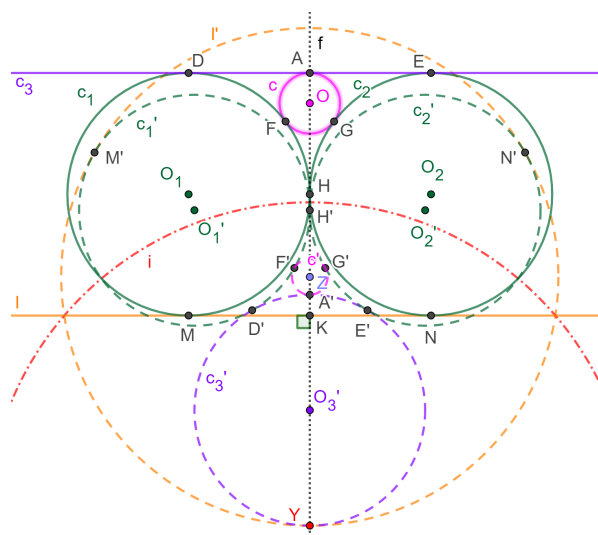


Figura 10: Terceira construção geométrica para o Problema 1. Todos os elementos das duas construções anteriores. Versão interativa aqui.

## 3.2 Inversão. Incírculo e circuncírculo. Colinearidade. P14 SL IMO 1986.

**Problema 2.** A circunferência inscrita no triângulo  $ABC$  é tangente aos lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$  em  $D$ ,  $E$  e  $F$ , respectivamente.  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são pontos médios de  $EF$ ,  $FD$  e  $DE$ , respectivamente. Provar que os centros do círculo inscrito e das circunferências circunscritas de  $XYZ$  e  $ABC$  são colineares.

A IMO 1986 foi realizada na cidade de Varsóvia, Polônia. Problema 14 da lista curta, proposto pela delegação da Irlanda (DJUKIC *et al*, 2011).

### 3.2.1 Resolução do Problema 2.

A Figura 11 mostra uma construção geométrica.

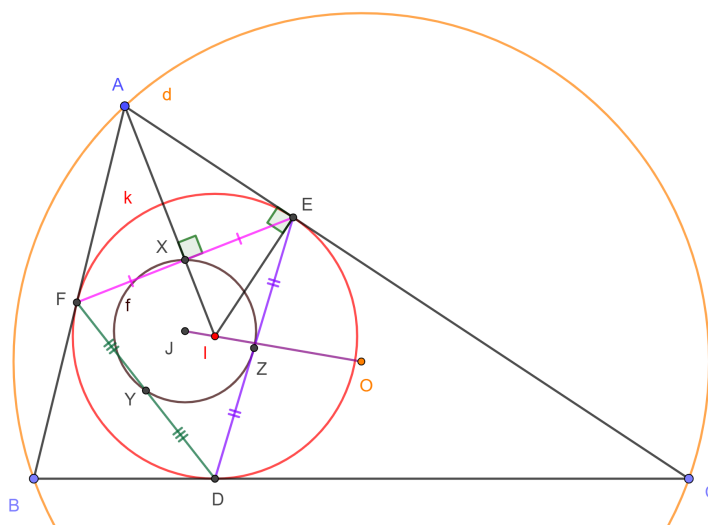


Figura 11: Construção geométrica para o Problema 2. Versão interativa [aqui](#).

Seja  $I$  o centro do incírculo  $k$  do triângulo  $ABC$ . Como  $AF = AE$  e  $FX = XE$  tem-se que  $XE$  é altura no  $\triangle AEI$ , retângulo em  $E$ . Utilizando uma das relações métricas segue:

$$IX \cdot IA = IE^2.$$

Da equação anterior uma inversão em relação à  $k$  leva o ponto  $A$  para a posição do ponto  $X$ . Analogamente,  $B$  para  $Y$  e  $C$  para  $Z$ . Isto é, sendo  $d$  e  $f$  os circuncírculos dos triângulos  $ABC$  e  $XYZ$ , chega-se a:

$$f = \text{Inv}(d, k).$$

Como o centro de uma circunferência é colinear com o centro da sua inversa e o centro de inversão conclui-se que  $O$  (centro de  $d$ ),  $J$  (centro de  $f$ ) e  $I$  são colineares.

### 3.3 Teorema da Bissetriz. Triângulo Pedal. Lei dos Senos. Inversão. P2 IMO 1996.

**Problema 3.** *Seja  $P$  um ponto no interior do  $\triangle ABC$  tal que:*

$$\angle APB - \angle C = \angle APC - \angle B. \quad (2)$$

*Sejam  $D$  e  $E$  os incentros dos  $\triangle APB$  e  $\triangle APC$ , respectivamente. Mostrar que  $AP$ ,  $BD$  e  $CE$  são concorrentes.*

A IMO 1996 foi realizada na cidade de Mumbai, Índia. Problema 11 da lista curta e escolhido como P2 da competição, proposto pela delegação do Canadá (DJUKIC *et al*, 2011).

#### 3.3.1 Primeira resolução do Problema 3.

A Figura 12 mostra uma construção geométrica inicial.

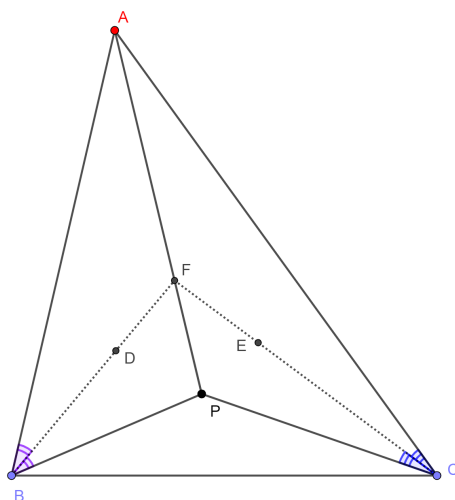


Figura 12: Construção geométrica inicial para o Problema 3. Versão interativa aqui.

Seja  $F = BD \cap CE$ . Quer-se mostrar que  $F \in AP$ . Como  $BD$  e  $CE$  são bissetrizes, pois  $D$  e  $E$  são incentros, pela forma recíproca do Teorema da Bissetriz, bastará provar que:

$$\frac{AB}{BP} = \frac{AF}{FP} = \frac{AC}{CP}. \quad (3)$$

Sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  os pés das projeções ortogonais do ponto  $P$  nos lados  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente (Figura 13). Os quadriláteros  $AZPY$ ,  $BZPX$  e  $CXPY$  são cíclicos, pois a soma de um par de ângulos opostos é  $180^\circ$ .

No quadrilátero  $CXPY$  tem-se que:

$$\angle XPY = 180^\circ - \angle C. \quad (4)$$

Pelo ângulo raso em  $Z$  vale que:

$$\angle XZY = 180^\circ - \angle XZB - \angle YZA. \quad (5)$$

Utilizando agora que  $BZPX$  e  $AZPY$  são inscritíveis e (5) segue:

$$\angle XZY = 180^\circ - \angle XPB - \angle YPA. \quad (6)$$

De (4) e considerando a soma dos ângulos em torno ao ponto  $P$  tem-se:

$$\angle APB = 180^\circ - \angle XPB - \angle YPA + \angle C. \quad (7)$$

Da comparação entre (6) e (7) chega-se a:

$$\angle XZY = \angle APB - \angle C. \quad (8)$$

Analogamente demonstra-se que:

$$\angle XYZ = \angle APC - \angle B. \quad (9)$$

De (2), (8) e (9) obtêm-se  $\angle XZY = \angle XYZ$ , o  $\triangle XYZ$  é isósceles e

$$XY = XZ. \quad (10)$$

Adicionalmente,  $BP$  e  $CP$  são diâmetros das circunferências circunscritas a  $BZPX$  e  $CXPY$ , respectivamente. Pela Lei dos Senos aplicada aos  $\triangle XBZ$  e  $\triangle XCY$  obtêm-se:

$$XZ = BP \sin(\angle B),$$

$$XY = CP \sin(\angle C).$$

De (10) e as duas equações anteriores segue:

$$\frac{BP}{CP} = \frac{\sin(\angle C)}{\sin(\angle B)}. \quad (11)$$

Utilizando mais uma vez a Lei dos Senos, agora no  $\triangle ABC$ , encontra-se:

$$\frac{\sin(\angle C)}{\sin(\angle B)} = \frac{AB}{AC}. \quad (12)$$

Logo, juntando (11) e (12) conclui-se:

$$\frac{BP}{CP} = \frac{AB}{AC}.$$

A equação anterior é a parte de (3) que queria-se demonstrar. A Figura 13 mostra uma construção geométrica.

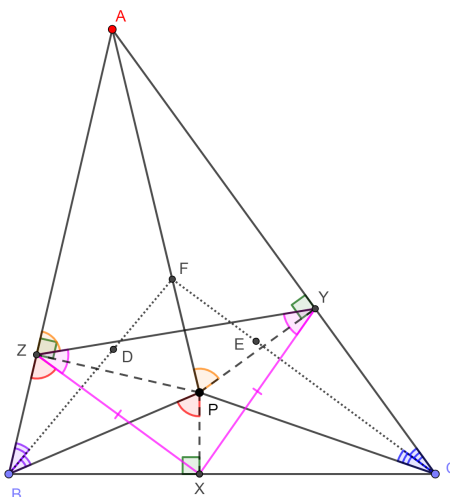


Figura 13: Construção geométrica para o Problema 3. Versão interativa aqui.

### 3.3.2 Construção e resolução do Problema 3 por inversão.

A localização do ponto  $P$  foi feita partindo de uma construção mais simples no espaço inverso. Seja  $i$  uma circunferência de inversão de centro em  $A$  e raio arbitrário  $r$ . Sejam  $B' = \text{Inv}(B, i)$ ,  $C' = \text{Inv}(C, i)$  e  $P = \text{Inv}(P', i)$ .

Constrói-se a reta mediatriz  $m$  dos pontos  $B'$  e  $C'$  e posiciona-se  $P' \in m$ , de tal forma que  $P$  esteja no interior do  $\triangle ABC$ . Ter-se-á que  $B'P' = C'P'$ .

Na inversão de dois pontos, Proposição 2, obtêm-se que:

$$B'P' = \frac{r^2}{AB \cdot AP} PB,$$

$$C'P' = \frac{r^2}{AC \cdot AP} PC.$$

Logo, dividindo as duas equações anteriores, encontra-se:

$$\frac{BP}{AB} = \frac{CP}{AC}.$$

Pela forma recíproca do Teorema da Bissetriz o resultado segue. A Figura 14 mostra uma construção geométrica utilizando inversão.

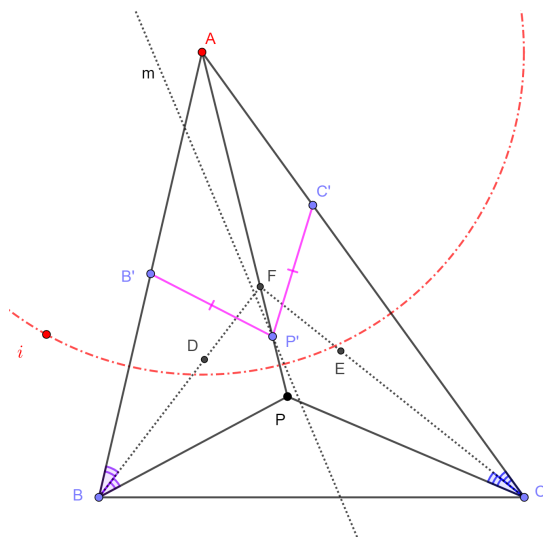


Figura 14: Construção geométrica utilizando inversão para o Problema 3. Versão interativa aqui.

### 3.4 Teorema de Desargues. Incentro e Circuncentro. Inversão. P9 SL IMO 1997.

**Problema 4.** *Seja  $A_1A_2A_3$  um triângulo não isósceles com incentro  $I$ . Seja  $c_i$ , com  $i = 1, 2, 3$ , a menor circunferência que passa por  $I$  e é tangente a  $A_iA_{i+1}$  e  $A_iA_{i+2}$  (considera-se a soma dos índices módulo 3). Seja  $B_i$ , com  $i = 1, 2, 3$ , o segundo ponto de interseção de  $c_{i+1}$  e  $c_{i+2}$ . Provar que os circuncentros dos triângulos  $A_1B_1I$ ,  $A_2B_2I$  e  $A_3B_3I$  são colineares.*

A IMO 1997 foi realizada na cidade de Mar del Plata, Argentina. Problema 9 da lista curta, proposto pela delegação dos Estados Unidos (DJUKIC *et al*, 2011).

### 3.4.1 Resolução do Problema 4.

A Figura 15 mostra uma construção geométrica inicial.

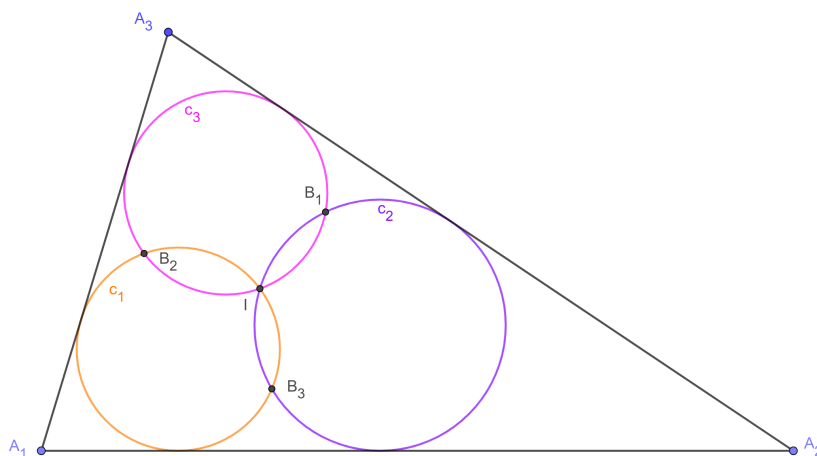


Figura 15: Construção geométrica inicial para o Problema 4. Versão interativa aqui.

Nesta resolução, considera-se  $i = 1, 2, 3$  e a soma de todos os índices módulo 3. Para construir  $c_i$ , primeiro esboça-se uma perpendicular, passando por  $I$ , à bissetriz interna  $b_i$  (no vértice  $A_i$ ). A interseção dessa perpendicular com os dois lados mais próximos determina um triângulo, do qual  $c_i$  é o incírculo.

Seja  $c$  a circunferência circunscrita ao  $\triangle A_1A_2A_3$  (Figura 16). Denotam-se por  $O_i$  os centros das circunferências  $c_i$  e por  $M_i$  o ponto médio do arco  $A_{i+1}A_{i+2}$  de  $c$  que não contém  $A_i$ .

Primeiro, nota-se que a reta  $O_{i+1}O_{i+2}$  é a mediatriz  $o_i$  do segmento  $IB_i$ , e consequentemente o circuncentro  $R_i$  do  $\triangle A_iB_iI$  está contido em  $o_i$ . Segundo, sejam  $M_{i+1}M_{i+2}$  as retas  $m_i$ . Da igualdade das medidas dos segmentos  $M_{i+1}A_i = M_{i+1}I$ , pela Proposição 2.3 em (LÓPEZ LINARES; SANTOS; JESUS, 2021c), tem-se que  $m_i$  é mediatriz dos pontos  $A_i$  e  $I$ . Isto implica que  $R_i$  está contido na reta  $m_i$ . Ou seja,  $R_i = O_{i+1}O_{i+2} \cap M_{i+1}M_{i+2}$ .

No que segue consideram-se os  $\triangle M_1M_2M_3$  e  $\triangle O_1O_2O_3$ . Como as retas  $M_1O_1$ ,  $M_2O_2$  e  $M_3O_3$  são concorrentes em  $I$ , pelo Teorema de Desargues, as interseções dos prolongamentos dos lados correspondentes  $R_i$ , com  $i = 1, 2, 3$ , são colineares. A Figura 16 mostra uma construção geométrica.

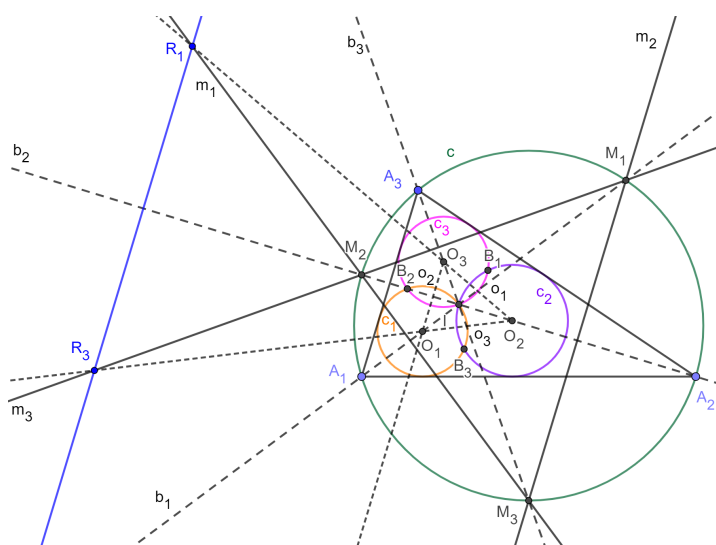


Figura 16: Construção geométrica para o Problema 4. O ponto  $R_2 \in R_1R_3$ , não aparece pela escala. Versão interativa [aqui](#).

### 3.4.2 Resolução do Problema 4 por inversão.

As circunferências circunscritas aos  $\triangle A_iB_iI$ , com  $i = 1, 2, 3$ , serão denotadas por  $d_i$ . Sabe-se que, se  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  são os circuncentros dos triângulos  $A_1B_1I$ ,  $A_2B_2I$  e  $A_3B_3I$ , respectivamente, então eles são os centros de  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$ , que tem o ponto  $I$  em comum. Para mostrar que os  $R_i$  são colineares bastará provar que as circunferências  $d_i$  tem um segundo ponto  $J \neq I$  em comum. A Figura 17 mostra uma construção geométrica inicial utilizando inversão.

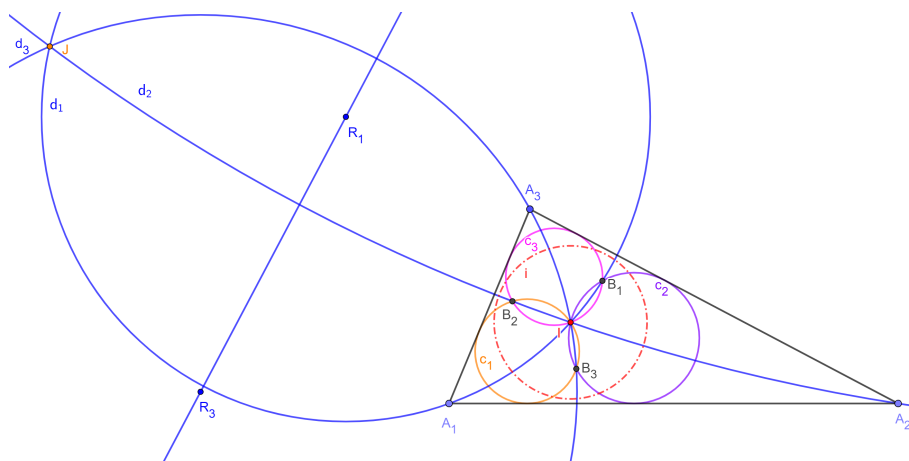


Figura 17: Construção geométrica inicial utilizando inversão para o Problema 4. Versão interativa [aqui](#).

Constrói-se uma circunferência de inversão  $i$  de raio arbitrário, diferente de zero, e centro em  $I$ . Denota-se por  $X'$  o inverso de  $X$ . Como as circunferências  $c_i$  passam pelo centro de inversão  $I$ , suas inversas são as retas  $c'_i$ . Tem-se que  $B'_i = c'_{i+1} \cap c'_{i+2}$  ou  $c'_i = B'_{i+1}B'_{i+2}$ . As inversas das retas  $A_iA_{i+1}$ ,

são as circunferências  $A'_i A'_{i+1} I$ , de mesmo raio, pois equidistam de  $I$ . A relação de tangência entre retas e circunferências é preservada após a inversão.

Seja  $P_i$  o centro da circunferência  $A'_i A'_{i+1} I$ . Devido a igualdade dos raios, nota-se que  $P_i P_{i+1} \parallel B'_i B'_{i+1}$ . Logo, o  $\triangle P_1 P_2 P_3$  é homotético com o  $\triangle B'_1 B'_2 B'_3$ . A Figura 18 mostra uma construção geométrica somente dos elementos após inversão.

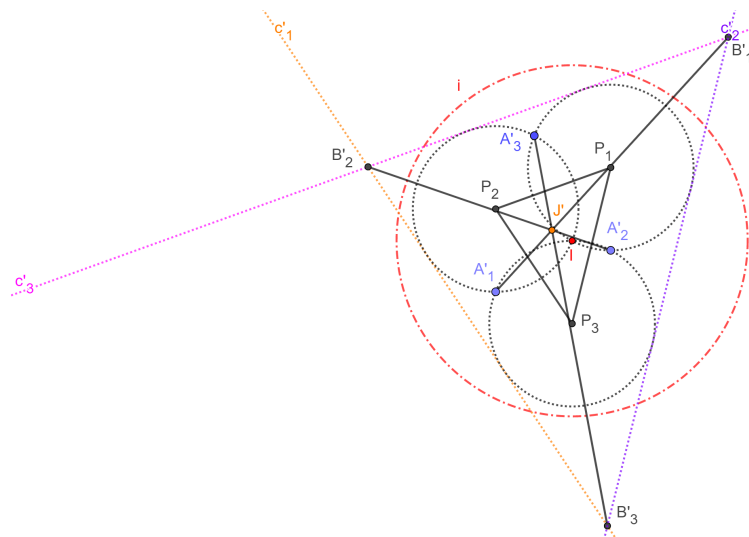


Figura 18: Construção geométrica somente dos elementos após inversão para o Problema 4. Versão interativa aqui.

Como  $A'_i$  e  $I$  são as interseções das circunferências  $A'_i A'_{i+1} I$  e  $A'_i A'_{i+2} I$ , tem-se que  $A'_i$  e  $I$  são simétricos em relação ao segmento  $P_{i+1} P_{i+2}$ . Com isto, o  $\triangle A'_1 A'_2 A'_3$  também é homotético com o  $\triangle B'_1 B'_2 B'_3$ . Consequentemente,  $A'_1 B'_1$ ,  $A'_2 B'_2$  e  $A'_3 B'_3$  são concorrentes no centro de homotetia  $J'$ . Ou seja, as circunferências  $A_i B_i I$ , com  $i = 1, 2, 3$ , passam pelo ponto  $J = \text{Inv}(J', i) \neq I$ . A Figura 19 mostra uma construção geométrica com todos os elementos apresentados.

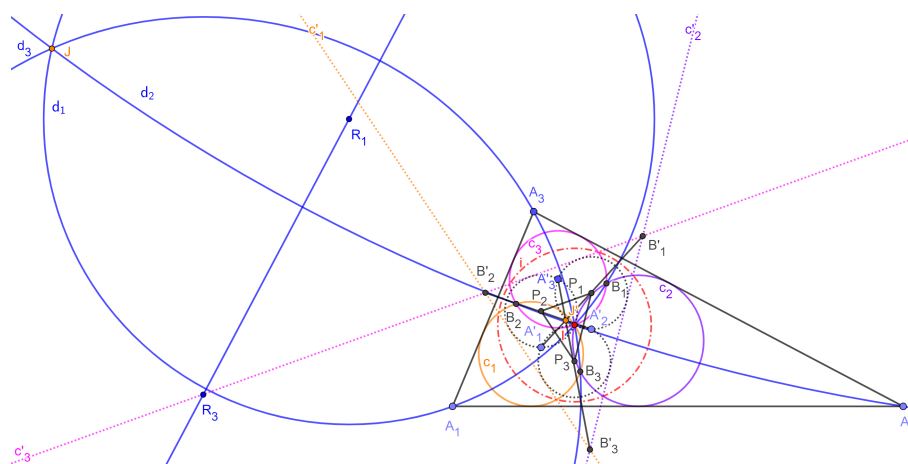


Figura 19: Construção geométrica utilizando inversão para o Problema 4. Versão interativa aqui.

### 3.5 Topologia. Inversão. P8 SL IMO 1999.

**Problema 5.** Uma circunferência é chamada “Separadora” para um conjunto de cinco pontos num plano se passa por três deles, um quarto ponto está no seu interior e o quinto no exterior. Provar que todo conjunto de cinco pontos, que não tenha três colineares nem quatro concíclicos, tem exatamente quatro Separadoras.

A IMO 1999 foi realizada na cidade de Bucareste, Romênia. Problema 8 da lista curta, proposto pela delegação do Japão (DJUKIC *et al*, 2011).

#### 3.5.1 Resolução do Problema 5.

Sejam  $A, B, C, D$  e  $E$  os pontos e uma circunferência de inversão  $i$  com centro em  $E$ . Sejam  $A', B', C'$  e  $D'$  os inversos respeito a  $i$ . Uma circunferência Separadora que passa por  $E$  transforma-se numa reta, passando por dois pontos dentre  $A', B', C'$  e  $D'$ , e de forma que separa os outros dois inversos, um em cada lado da reta. Uma Separadora que não passa por  $E$  transforma-se em outra circunferência, passando por três pontos inversos e com o quarto ponto inverso no seu interior.

Seja  $M'$  a envoltória convexa de  $A', B', C'$  e  $D'$ . Há dois casos: i)  $M'$  é um quadrilátero ou ii)  $M'$  é um triângulo com o quarto ponto no interior.

i)  $M'$  é um quadrilátero, por exemplo  $A'B'C'D'$ . Neste caso duas das circunferências Separadoras ( $p$  e  $q$ ) são inversas das diagonais  $A'C'$  e  $B'D'$ . Se  $\angle A' + \angle C' < 180^\circ$  as outras duas Separadoras ( $k$  e  $r$ ) são as inversas das circunferências  $A'B'C'$  e  $A'D'C'$ . Caso contrário, de  $B'A'D'$  e  $B'C'D'$ . As inversas das outras 6 circunferências e retas utilizando  $A', B', C', D'$  e  $E$  não são Separadoras. A Figura 20 mostra uma construção geométrica neste caso.

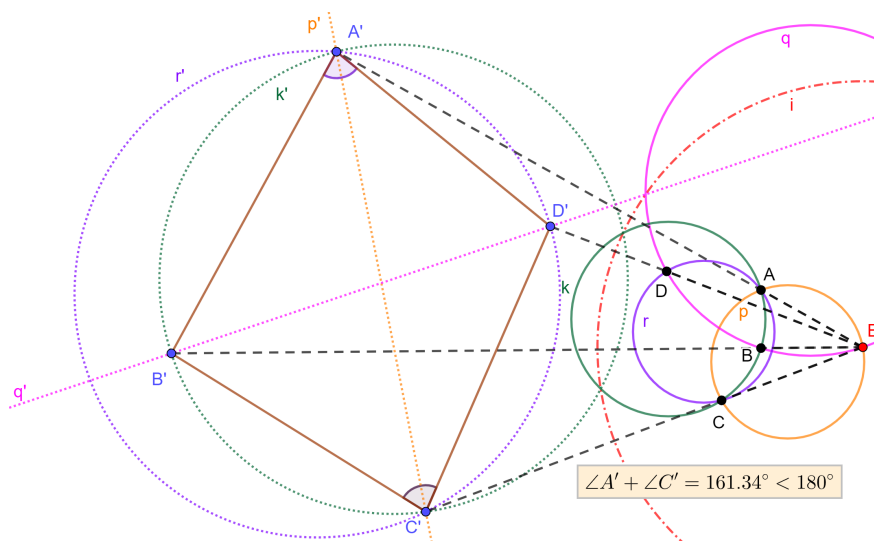


Figura 20: Construção geométrica do Problema 5. Caso i)  $M'$  é um quadrilátero e  $\angle A' + \angle C' < 180^\circ$ . Versão interativa aqui.

ii)  $M'$  é um triângulo, por exemplo,  $A'B'C'$  com  $D'$  no interior. Neste caso as circunferências Separadoras são as inversas  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  das retas  $D'A', D'B', D'C'$  e da circunferência  $A'B'C'$ . Nenhuma outra reta ou circunferência satisfaz as condições do problema. A Figura 21 mostra uma construção geométrica neste caso.

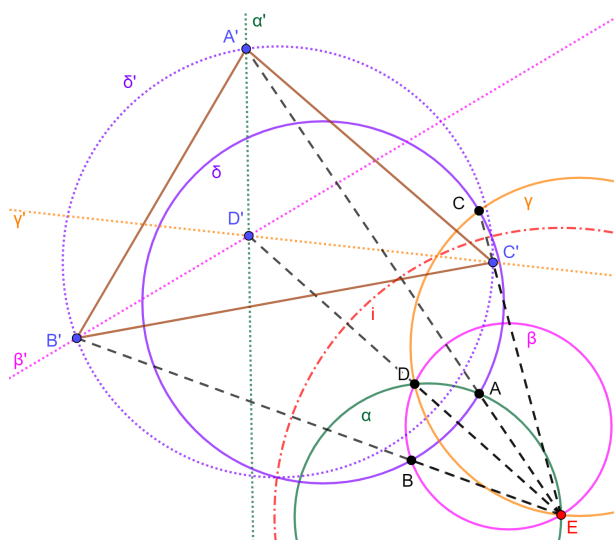


Figura 21: Construção geométrica para o Problema 5. Caso ii)  $M'$  é o triângulo  $A'B'C'$  com  $D'$  no interior. Versão interativa aqui.

## 4 Comentários finais

Foram discutidos em detalhe cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. As demonstrações envolvidas nas soluções foram complementadas pela disponibilização dos respectivos links das figuras interativas no GeoGebra. Adicionalmente, foram utilizados os conceitos básicos relativos aos Teoremas de Desargues, da Bissetriz e Pitágoras, Incentro e Circuncentro, Colinearidade, Triângulo Pedal, Lei dos Senos e elementos de Topologia.

## 5 Referências Bibliográficas

DJUKIC, D. *et al.* **The IMO compendium**: a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2009. New York: Springer, 2011.

LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 17, p. 127-138, fev. 2020. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdv17ermac202023169664jllabagfb127138. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 3 maio 2022.

LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Cinco problemas sobre potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em Olimpíadas Internacionais de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 20, p. 22–40, jul. 2021a. DOI: 10.21167/cqdv20202123169664jlljpmsafj2240. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 3 maio 2022.

LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J.P.M.; JESUS, A. F. Extremos com desigualdades na Geometria: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. –**

---

**Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 21, p. 36–51, dez. 2021b. DOI: 10.21167/cqdvol21202123169664jlljpmsafj3651. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 3 maio 2022.

LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Incírculos e ex-incírculos: cinco problemas resolvidos que foram propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v. 2, p. 117-139, nov. 2021c. Disponível em: <https://periodicos.ufop.br/rmat/article/view/5189/3868>. Acesso em: 3 maio 2022.