Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
v. 22, n.1, jul. 2022

Estudo numérico da transferência de massa para a equação de convecção-difusão em escoamentos em tubos permeáveis

Numerical study of mass transfer for the convection-diffusion equation in permeable tubes flows

Enayle Maryane Teixeira Paes
Universidade Federal de Alfenas
enaylepaes@gmail.com

Juliana Maria da Silva
Universidade Federal de Alfenas
juliana.silva@unifal-mg.edu.br

Resumo

O presente trabalho analisou numericamente o desempenho da equação de convecção-difusão no problema de escoamentos em tubos permeáveis, o qual está relacionado ao processo de filtração tangencial. Para isso, o número adimensional de Sherwood e a espessura da camada de concentração foram analisados para investigar a transferência de massa na superfície permeável. A equação de convecção-difusão foi discretizada pela técnica de diferenças finitas. Os resultados numéricos mostraram-se qualitativamente e quantitativamente com boa concordância com os dados da literatura.

Palavras-chave: Simulação numérica. Diferenças finitas. Transferência de massa. Filtração tangencial.

Abstract

The present work numerically analyzed the performance of the convection-diffusion equation in the flow problem in permeable tubes, which is related to the crossflow filtration process. For that, the dimensionless Sherwood number and the concentration layer thickness were analyzed to investigate the mass transfer in the permeable surface. The convection-diffusion equation was discretized using the finite difference technique. The numerical results were qualitatively and quantitatively in good agreement with literature data.

Keywords: Numerical simulation. Finite differences. Mass transference. Crossflow filtration.

Artigo recebido em jan. 2022 e aceito em maio 2022

1 Introdução

A filtração tangencial consiste em uma operação unitária de separação sólido-líquido e líquido-líquido, tendo alta aplicabilidade em industrias alimentícias, farmacêuticas, de cosméticos e químicas. Este mecanismo de filtração é um processo eficaz, tendo como vantagem a não alteração de fase do filtrado e não alteração de sua composição química (KASTER, 2009), ocorrendo de forma espontânea e independente da temperatura ou densidade do produto.

O processo de separação é realizado em tubos permeáveis ou membranas e ocorre devido a diferença de pressão, a qual impele parte do produto através das membranas (ou tubo permeável), enquanto que o fluido restante flui tangencialmente à superfície permeável.

O acúmulo de partículas próximo à superfície permeável, denominado camada de polarização, provoca aumento na resistência hidráulica para o fluxo de permeado e, consequentemente, o declínio do fluxo com o tempo, tendo, então, uma perda de eficiência (VENEZUELA, 2008; VENEZUELA; PÉREZ-GUERRERO; FONTES, 2009). Por isso, um melhor conhecimento da formação da camada e a deposição de partículas na membrana poderia resultar em um uso econômico da filtração tangencial em muitas aplicações técnicas. Assim, uma investigação minuciosa dos fenômenos de transporte é necessária para o melhor entendimento dos mecanismos de transferência de massa presentes no processo. Um estudo intenso no desenvolvimento de ferramentas numéricas, que são capazes de auxiliar no entendimento do fenômeno, vem sendo trabalhado por diversos pesquisadores (ASADI TASHVIGH; FOULADITAJAR; ZOKAEE ASHTIANI, 2015; DAMAK *et al*, 2005; DZHONOVA-ATANASOVA; TSIBRANSKA; PANIOVSKA, 2018; LEE; CLARK, 1997; MIGNARD; GLASS, 2001; PARASYRIS; DISCACCIATI; DAS, 2020; PARIS; GUICHARDON; CHARBIT, 2002; RICHARDSON; NASSEHI, 2003; SILVA; FERREIRA; FONTES, 2011; VENEZUELA; PÉREZ-GUERRERO; FONTES, 2009).

Portanto, o propósito do presente trabalho é investigar a equação de convecção-difusão na transferência de massa na superfície permeável em escoamentos em tubos permeáveis. Para isso, o número adimensional de Sherwood e a espessura da camada de concentração foram comparados com correlações da literatura.

2 Descrição matemática do modelo de filtração

Nesta investigação é considerado um escoamento incompressível, isotérmico e completamente desenvolvido em tubo cilíndrico com paredes permeáveis.

2.1 Formulação matemática

A formulação matemática adimensional analisada é a equação de conservação das espécies químicas, representada pela equação diferencial de convecção-difusão (ZEMAN; ZYDNEY, 1996)

$$u\frac{\partial c}{\partial z} + v\frac{\partial (rc)}{\partial r} = \frac{1}{Pe}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial c}{\partial r}\right), \tag{1}$$

em que u é a velocidade axial, v é a velocidade radial, c é a concentração de soluto, $Pe\left(\dfrac{u_0 R}{D}\right)$ é o número adimensional de Peclet e r e z são as coordenadas radial e axial, respectivamente.

Analisou-se a Eq. (1) para dois casos:

- velocidade radial nula

$$u\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{1}{Pe}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial c}{\partial r}\right); \tag{2}$$

em que

$$u(r) = 2u_0\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right], \tag{3}$$

e u_0 é a velocidade axial de entrada do escoamento e R é o raio do tubo;
- velocidade radial não nula

$$u\frac{\partial c}{\partial z} + v\frac{\partial (rc)}{\partial r} = \frac{1}{Pe}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial c}{\partial r}\right); \tag{4}$$

em que as velocidades u e v são obtidas da literatura (YUAN; FUNKELSTEIN; BROOKLYN, 1956 apud VENEZUELA; PÉREZ-GUERRERO; FONTES, 2009)

$$u_1 = \left[1 - r^2 + \frac{Re_w}{36}(-2 + 9r^2 - 9r^4 + 2r^5) + \frac{Re_w^2}{10800}(166 - 760r^2 + 825r^4 - 300r^5 + 75r^6 - 6r^7)\right] \tag{5}$$

$$u_2 = \frac{1}{1 - \dfrac{Re_w}{18} + \dfrac{83}{5400}Re_w^2} + 4\frac{Re_w}{Re}z, \tag{6}$$

$$u = u_1 u_2, \tag{7}$$

$$v = -\frac{2Re_w}{rRe}\left[r^2 - \frac{1}{2}r^4 + \frac{Re_w}{72}(-4r^2 + 9r^4 - 6r^5 + r^6) + \frac{Re_w^2}{10800}(166r^2 - 380r^4 + \right.$$
$$\left. + 275r^5 - 75r^6 + 15r^7 - r^8\right], \tag{8}$$

em que $Re\left(\frac{\rho u_0 d}{\mu}\right)$ é o número adimensional de Reynolds e $Re_w\left(\frac{\rho v_w d}{\mu}\right)$ é o número adimensional de Reynolds na parede permeável.

2.2 Camada limite de concentração

Na filtração tangencial as partículas presentes na corrente de alimentação são conduzidas por convecção para a superfície permeável, acumulando-se perto dessa região, até que o equilíbrio entre o fluxo difusivo e convectivo seja atingido. Este acúmulo, conhecido como concentração de polarização, faz com que seja formado um perfil de concentração perpendicular à superfície da membrana, resultando-se em um gradiente de concentração que provoca uma resistência adicional à transferência de massa.

A região onde ocorre formação do gradiente de concentração de soluto, adjacente à membrana, varia do valor da concentração na superfície da membrana, c_w, até a concentração de alimentação, c_0, cuja distância entre esses valores é caracterizada como a espessura da camada limite de concentração, definida como δ (CUNHA, 2014; ZEMAN; ZYDNEY, 1996).

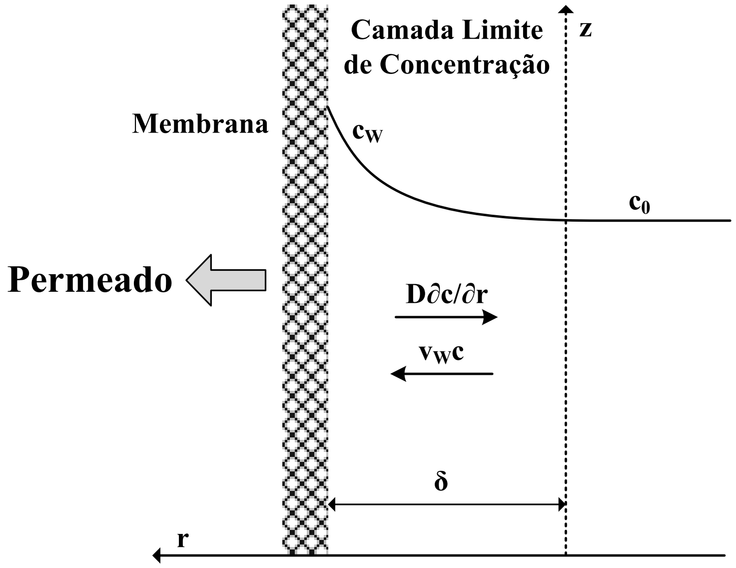


Figura 1: Espessura da camada limite de concentração

Cálculo da espessura da camada limite de concentração

A espessura da camada limite de concentração, δ, é aproximadamente igual à distância entre a superfície da membrana e um valor onde a concentração é próxima o suficientemente do valor de sua entrada, de modo que o equilíbrio entre os fluxos convectivo e difusivo é atingido quando $\delta < 10^{-3}$, assim, seu cálculo é dado pela seguinte expressão (DAMAK *et al*, 2004)

$$\delta = \frac{(c_w - c_0)}{c_0} < 10^{-3}. \tag{9}$$

2.3 Número de Sherwood

Sherwood é um número adimensional que quantifica a taxa de transferência de massa e é representado pela razão de transferência de massa convectiva e difusiva

$$Sh = \frac{kd}{D}, \tag{10}$$

em que d é o diâmetro do tubo, D o coeficiente de difusividade e k é coeficiente de transferência de massa, o qual é um importante parâmetro de estudo do processo de filtração por membranas (DAMAK *et al*, 2004; ZEMAN; ZYDNEY, 1996)

$$k = \frac{-D\left.\dfrac{\partial c}{\partial r}\right|_{r=R}}{c_w - c_0}, \tag{11}$$

Substituindo-se a Eq. (11) em (10), tem-se

$$Sh = \frac{-2R}{c_w - c_0}\left.\frac{\partial c}{\partial r}\right|_{r=R}. \tag{12}$$

2.4 Condições de fronteira

Como o fluxo é simétrico, então, apenas metade do tubo é considerada. As condições de fronteira para velocidades e concentração de soluto na forma adimensional são definidas por (DAMAK *et al*, 2004; GERALDES; SEMIÃO; PINHO, 2001)

(i) *entrada*: um perfil laminar não desenvolvido é prescrito

$$z = 0, \qquad 0 \le r \le 1, \qquad u = 1, \qquad v = 0, \qquad c = 1; \tag{13}$$

(ii) *eixo de simetria*: não há fluxo de massa passando pela fronteira, portanto

$$r = 0, \qquad 0 \le z \le \frac{L}{R}, \qquad \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \qquad v = 0, \qquad \frac{\partial c}{\partial r} = 0; \tag{14}$$

em que L é o comprimento do tubo permeável;

(iii) *superfície permeável*: a velocidade axial é nula, a velocidade radial é definida pela velocidade de permeção (constante nesse trabalho) e a concentração é definida pela equação de balanço de massa, $N_S = v_w c_w - D\dfrac{\partial c}{\partial r}$, em que considera-se nulo o fluxo de soluto através do tubo permeável, pois, no estado estacionário as partículas são quase 100% rejeitadas pela superfície permeável (PAES; SILVA, 2019; RIPPERGER; ALTMANN, 2002)

$$r = 1, \qquad 0 \le z \le \frac{L}{R}, \qquad u = 0, \qquad v = v_w, \qquad c_w v_w = \frac{2}{ReSc}\frac{\partial c}{\partial r}\bigg|_{r=1}, \tag{15}$$

em que $Sc \left(\dfrac{\nu}{\mathbf{D}}\right)$ é o número adimensional de Schmidt e v_w é a velocidade de permeação (considerada constante nesse trabalho);

(iv) *saída*: o fluxo desenvolvido e a baixa difusividade molecular do soluto permitem a aplicação de uma condição de perfil desenvolvido

$$z = L, \qquad 0 \le r \le 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial c}{\partial z} = 0. \tag{16}$$

3 Discretização

As Eqs. (2) e (4) juntamente com as condições de fronteiras, Eqs. (13) - (16), foram discretizadas pela técnica de diferenças finitas em malha computacional co-localizada, utilizando-se passo $1/2$, $\Delta z/2$ e $\Delta r/2$.

O termo difusivo das Eqs. (2) e (4) foram aproximado por diferenças centrais e os termos convectivos por diferenças centrais e diferenças atrasadas, respectivamente. As discretizações dos termos convectivos geraram as concentrações $c_{i+1/2,j}$, $c_{i-1/2,j}$ e $c_{i,j-1/2}$, as quais não estão definidas na malha computacional. Para a aproximação desses termos, aplicou-se o esquema convectivo *upwind* de segunda ordem (FORTUNA, 2000; PAES; SILVA, 2019)

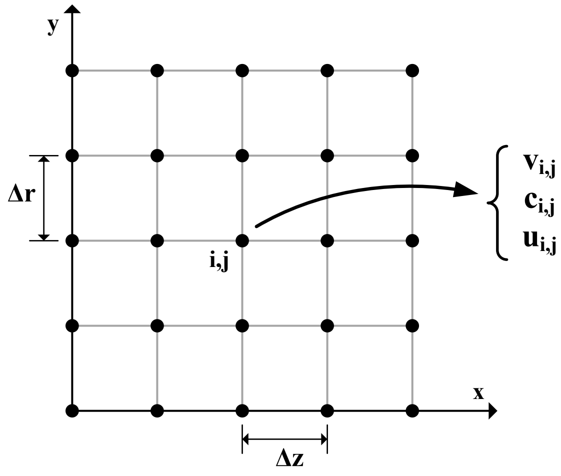


Figura 2: Malha co-localizada.

$$c_{i+1/2,j} = \begin{cases} \frac{3}{2}c_{i,j} - \frac{1}{2}c_{i-1,j},\ u_{i,j} \geq 0 \\ \\ \frac{3}{2}c_{i+1,j} - \frac{1}{2}c_{i+2,j},\ u_{i,j} < 0 \end{cases}, \qquad c_{i-1/2,j} = \begin{cases} \frac{3}{2}c_{i-1,j} - \frac{1}{2}c_{i-2,j},\ u_{i,j} \geq 0 \\ \\ \frac{3}{2}c_{i,j} - \frac{1}{2}c_{i+1,j},\ u_{i,j} < 0 \end{cases},$$

$$c_{i,j-1/2} = \begin{cases} \frac{3}{2}c_{i,j-1} - \frac{1}{2}c_{i,j-2},\ v_{i,j} \geq 0 \\ \\ \frac{3}{2}c_{i,j} - \frac{1}{2}c_{i,j+1},\ v_{i,j} < 0 \end{cases}. \tag{17}$$

Assim, tem-se, na forma discretizada

- equação de convecção-difusão com velocidade radial nula (Eq. (2))

$$c_{i,j} = \frac{1}{B}\left[c_{i,j+1}(r_{i,j} + r_{i,j+1})\Delta z + c_{i,j-1}(r_{i,j} + r_{i,j-1})\Delta z + (4c_{i-1,j} - c_{i-2,j})u\frac{1}{A}\right], \tag{18}$$

- equação de convecção-difusão com velocidade radial não nula (Eq. (4))

$$c_{i,j} = \frac{1}{B_2}\left[c_{i,j+1}\left(A\frac{r_{i,j} + r_{i,j+1}}{2} - \frac{v_j}{\Delta r}\right) + A\frac{r_{i,j} + r_{i,j+1}}{2}c_{i,j-1} + \frac{u_{i,j}}{2\Delta z}(3c_{i-1,j} + c_{i-2,j})\right], \tag{19}$$

em que

$A = \dfrac{1}{Per_{i,j}\Delta r^2}$,

$B = \dfrac{3u}{A} + (r_{i,j-1} + 2r_{i,j} + r_{i,j+1})\Delta z$ e

$B_2 = \left(\dfrac{u_{i,j}}{\Delta z} - \dfrac{v_{i,j}}{\Delta r} + A\dfrac{r_{i,j-1} + 2r_{i,j} + r_{i,j+1}}{2}\right)$.

Os sistemas de equações lineares, gerados pelas discretizações das Eqs. (2) e (4), foram resolvidos pelo método iterativo de Gauss-Seidel.

Discretização do número de Sherwood

A Eq. (12) foi discretizada pela técnica de diferenças finitas, com aproximação por diferenças atrasadas,

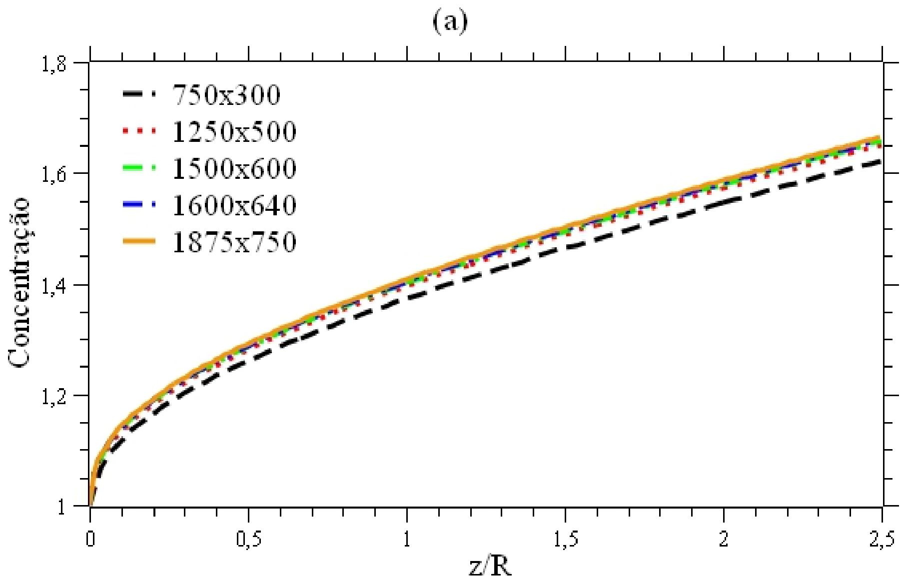
$$Sh = \frac{-2R}{c_w - c_0} \frac{\partial c}{\partial r}\bigg|_{r=R} \approx \frac{2}{c_w - 1} \frac{c_{i,j} - c_{i,j-1}}{\Delta r}. \tag{20}$$

4 Resultados e discussões

Para a análise da transferência de massa na superfície permeável, resultados numéricos desse trabalho foram comparados com correlações da literatura para o número adimensional de Sherwood e para a espessura da camada de concentração. Para as simulações utilizou-se $L = 0,0375$ m e $R = 0,015$ m.

4.1 Malha computacional

Com o objetivo de definir uma malha refinada, mas, com baixo custo computacional, simulações para diferentes malhas foram realizadas. A Fig. 3 apresenta os perfis de concentração, c/c_0, próximo à superfície permeável em função da coordenada axial, z/R, para diferentes malhas computacionais. Para estas simulações foram utilizados Re = 500 e 700; Sc = 500.



Pode-se notar que a partir da malha 1500×600 os resultados numéricos para a concentração não sofrem alterações consideráveis, ou seja, um maior refinamento, não irá influenciar nos resultados analisados neste trabalho. Assim, a malha computacional 1500×600 é adotada para as próximas simulações.

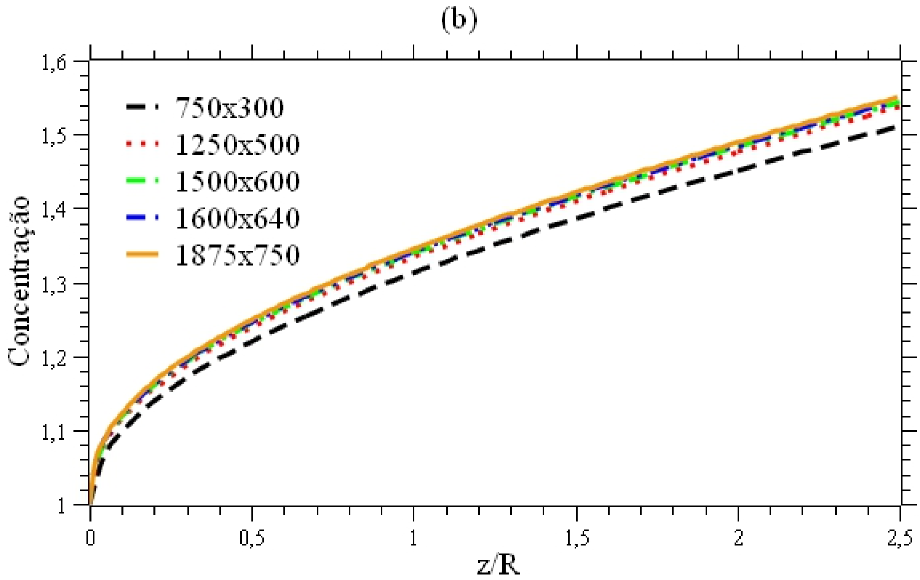


Figura 3: Concentração próxima à superfície permeável em função da coordenada axial, para diferentes malhas computacionais: (a) $Re = 500$ e (b) $Re = 700$.

4.2 Comparações com o número de Sherwood

Os resultados numéricos para o número de Sherwood, Eq. (12), obtidos das simulações das Eqs. (2) e (4), foram comparados com as seguintes correlações

- correlação de Venezuela (2008): obtida das simulações com a equação de convecção-difusão parabólica (Eq. (4))

$$Sh = 0,7438(ReSc/z)^{0,3674}(1 + 1751,9133Re^{-1,2132}Sc^{1,2695}Re_w^{2,5607}); \tag{21}$$

- correlação de Venezuela (2008): obtida das simulações com a equação convecção-difusão elíptica (Eq. (4) com a parcela axial difusiva)

$$Sh = 0,9938(ReSc/z)^{0,3357}(1 + 2,8546Re^{-0,45}Sc^{0,6723}Re_w^{1,1035}), \tag{22}$$

em que $0,005 \leq Re_w \leq 0,014$, $200 \leq Re \leq 700$ e $800 \leq Sc \leq 2500$;

- correlação de Damak *et al* (2004): obtida por simulações com a equação de convecção-difusão elíptica e as equações de Navier-Stokes

$$Sh = 1,23(ReSc/z)^{0,33}(1 + 0,01Re^{-0,125}Sc^{1,055}Re_w^{1,132}), \tag{23}$$

em que $0,02 \leq Re_w \leq 0,3$, $300 \leq Re \leq 1000$ e $600 \leq Sc \leq 3200$;

- correlação de Leveque (ZEMAN; ZYDNEY, 1996): muito utilizada na literatura de membrana para escoamento laminar, porém, a correlação não foi desenvolvida para filtração por membrana, mas para transferência de massa em sistemas impermeáveis, entretanto, é interessante comparar os valores e verificar o efeito da sucção da parede,

$$Sh = 1,62(ReSc/z)^{0,33}. \tag{24}$$

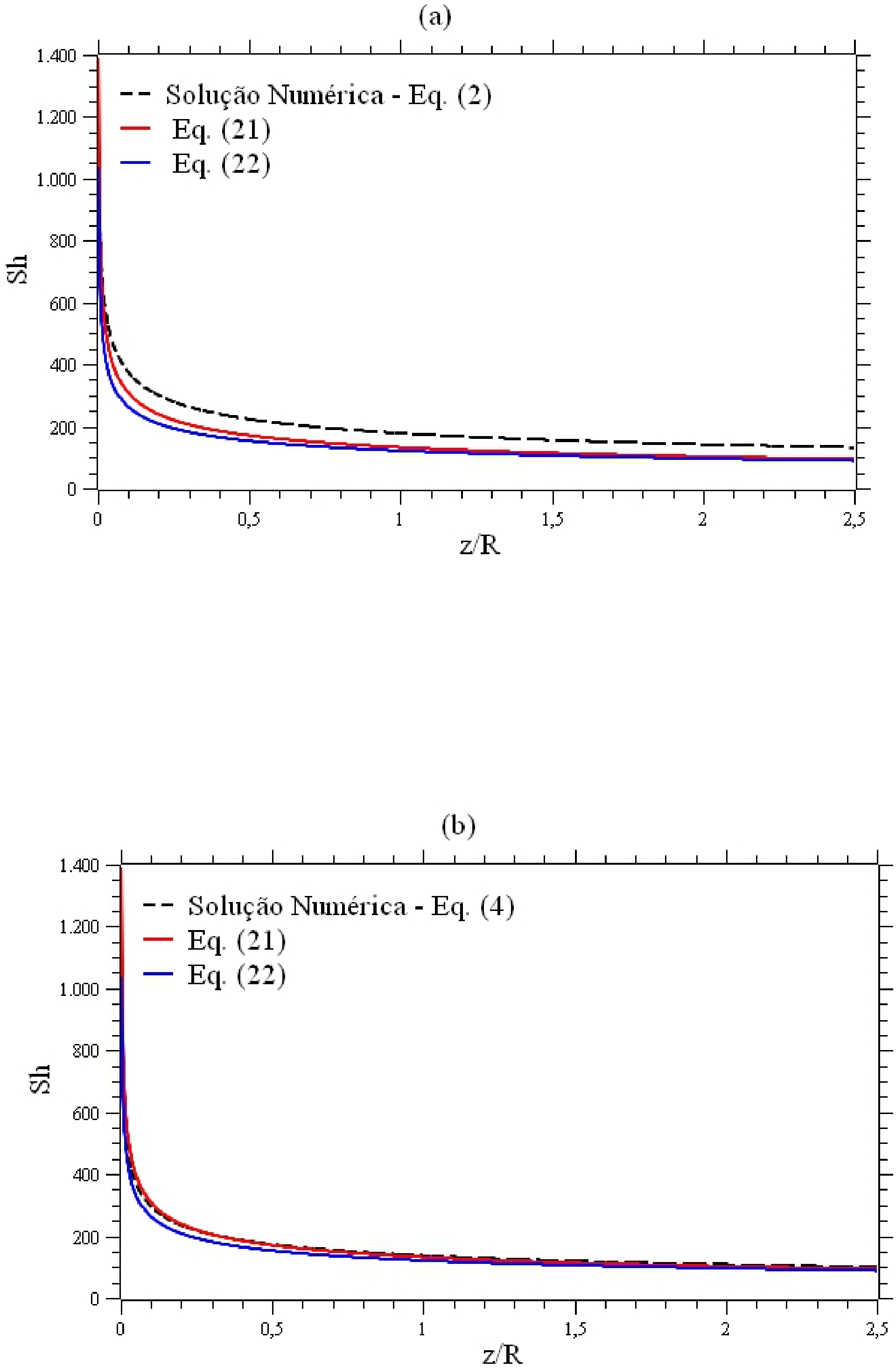


Figura 4: Comparações dos resultados numéricos de Sherwood com correlações da literatura, Eqs. (21) e (22), para $Re_w = 0,005$, $Re = 500$ e $Sc = 2500$: (a) Eq. (2) e (b) Eq. (4).

A Fig. 4 apresenta comparações dos resultados numéricos de Sherwood, Eq. (12), obtidos das simulações das Eqs. (2) e (4), com a equação de convecção-difusão parabólica, Eq. (21), e a equação de convecção-difusão elíptica, Eq. (22), em função da coordenada axial, z/R.

Observa-se que os resultados numéricos da Fig. 4 (a) possuem uma boa concordância qualitativa com as correlações, porém, quantitativamente o erro relativo médio é de 35% e 46%, para as simulações com as Eqs. (21) e (22), respectivamente. Isto pode ser explicado devido a limitação da Eq. (2) que não possui a parcela convectiva radial e o termo axial difusivo. Na Fig. 4 (b), pode-se observar que os resultados possuem uma boa concordância qualitativa e quantitativa, em especial, para a comparação dos resultados da Eq. (4) com a Eq. (21), em que o erro relativo médio é de 4%, enquanto que a comparação dos resultados da Eq. (4) com a Eq. (22) o erro relativo médio é de 13%.

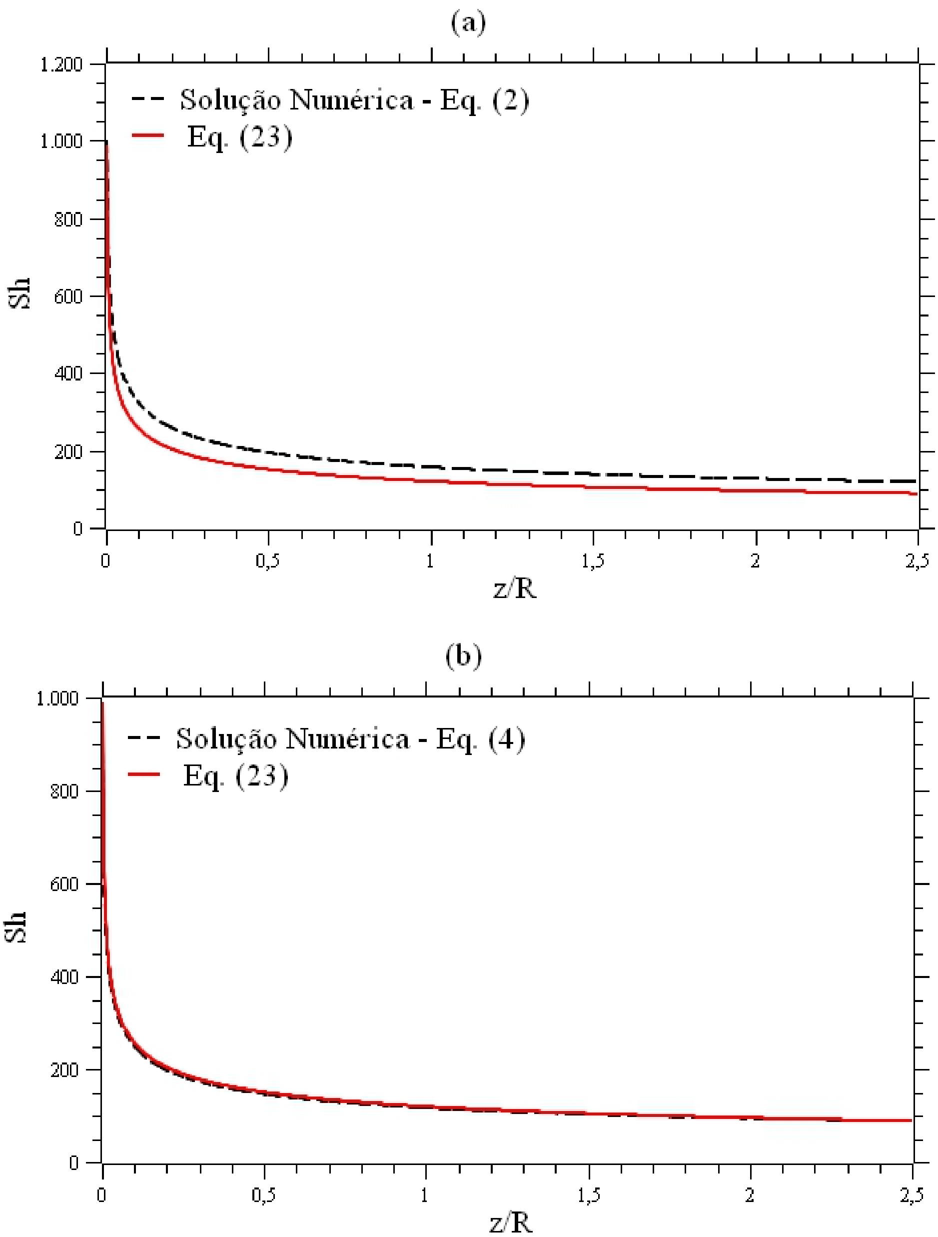


Figura 5: Comparações dos resultados numéricos de Sherwood com a correlação da literatura, Eq. (23), para $Re_w = 0,02$, $Re = 500$ e $Sc = 1500$: (a) Eq. (2) e (b) Eq. (4).

A Fig. 5 apresenta comparações dos resultados numéricos de Sherwood com a Eq. (23), em função da coordenada axial, z/R. Nota-se na Fig. 5 (a) que os resultados apresentam uma boa concordância qualitativa, porém, com um erro médio de 31%. Este erro também pode ser explicado devido a Eq. (2) ser simplificada quando comparada com a equação de concentração utilizada por Damak *et al* (2004) (equação de convecção-difusão elíptica). Já para a comparação da correlação com Eq. (4), Fig. 5 (b), houve uma boa concordância com erro relativo médio de 2%.

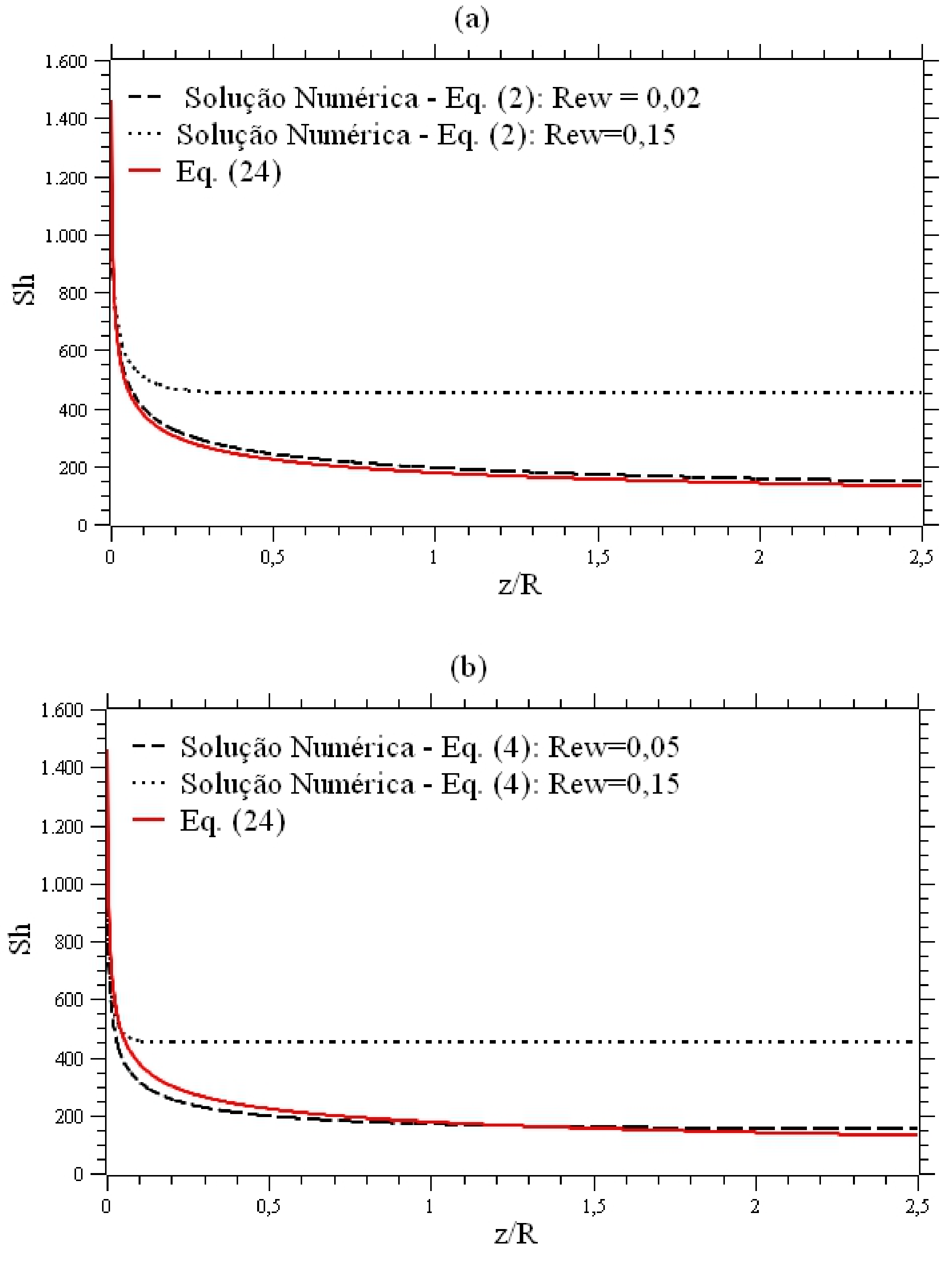


Figura 6: Comparações dos resultados numéricos de Sherwood com a Eq. (24) para $Re = 1000$ e $Sc = 1500$: (a) Eq. (2) e (b) Eq. (4).

Com o objetivo de avaliar a sucção na parede permeável, apresenta-se na Fig. 6 a comparação dos resultados numéricos de Sherwood com a Eq. (24), em função da coordenada axial, z/R, para dois diferentes Re_w. Observa-se na Fig. 6 que para baixos valores de Re_w a comparação dos resultados numéricos de Sherwood com os resultados da correlação de Leveque, Eq. (24), apresentam uma boa concordância, sendo que para a Eq. (2) (Fig. 6 (a)) o erro relativo médio é de 10% com $Re_w = 0,02$

e para a Eq. (4) (Fig. 6 (b)) o erro relativo médio é de 9% com $Re_w = 0,05$. Isto é explicado pelo fato de que, como mencionado anteriormente, a correlação de Leveque foi desenvolvida para transferência de massa em sistemas impermeáveis, logo para baixos valores de Re_w, tem-se pouca transferência de massa na parede, ou seja, tem-se o comportamento do escoamento próximo ao de uma parede impermeável. Já para os resultados numéricos para $Re_w = 0,15$, tem-se uma discrepância nos valores de Sherwood, quando comparados com os resultados da correlação da Eq. (24), pois, nesse caso a transferência de massa é maior.

4.3 Comparações com a espessura da camada de concentração

Os resultados numéricos da espessura da camada de concentração, Eq. (9), foram comparados com a correlação da literatura (VENEZUELA; PÉREZ-GUERRERO; FONTES, 2009)

$$\delta = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{z}{RReScRe_w}\right)^{1/3}} \iota R, \tag{25}$$

em que e ι é uma *taxa assintótica*, com os seguintes limites: $0 < \iota < 1$.

As Figs. 7 e 8 apresentam comparações dos resultados numéricos da espessura da camada de concentração, Eq. (9), obtidos das simulações com as Eqs. (2) e (4), respectivamente, com a Eq. (25) em função da coordenada axial, z/R. Observa-se uma boa concordância qualitativa e quantitativa, com melhor resultado para a simulação com a Eq. (4) com erro relativo médio de 5%, enquanto que para a simulação com a Eq. (2) o erro relativo médio foi de 9%.

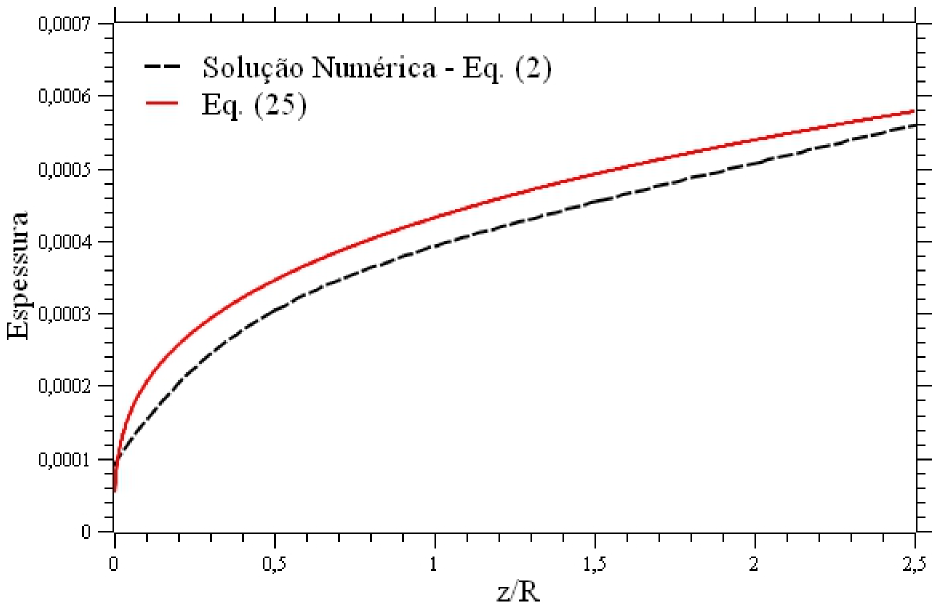


Figura 7: Comparação dos resultados numéricos da espessura da camada limite de concentração, obtidos pelas Eqs. (2) e (9), com a Eq. (25), para $Rew = 0,011$, $Re = 700$, $Sc = 2500$, e $\iota = 0,4$.

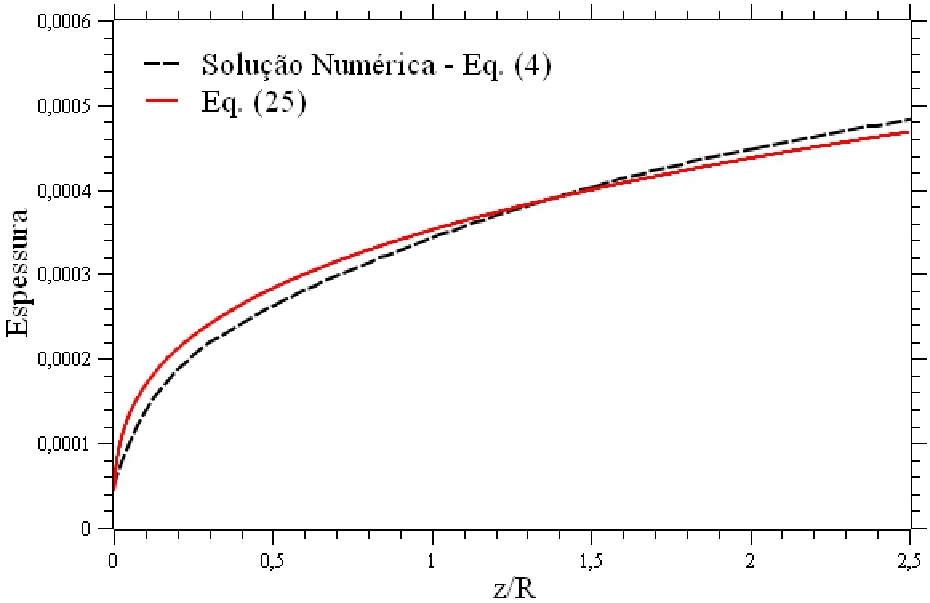


Figura 8: Comparação dos resultados numéricos da espessura da camada limite de concentração, obtidos pelas Eqs. (4) e (9), com a Eq. (25), para $Rew = 0,005$, $Re = 500$, $Sc = 1650$, e $\iota = 0,2$.

5 Conclusão

Este trabalho teve como objetivo estudar o desempenho da equação de convecção-difusão na transferência de massa na superfície permeável, em problemas de escoamentos em tubos permeáveis. Para isso, considerou-se dois casos: equação de convecção-difusão com as parcelas convectivas axial e radial e equação de convecção-difusão com parcela convectiva radial desprezada.

As equações foram discretizadas pela técnica de diferenças finitas e tiveram seus termos convectivos aproximados pelo esquema *upwind* de segunda ordem. Os resultados numéricos foram verificados com as comparações do número adimensional de Sherwood e da espessura da camada limite de concentração com correlações da literatura.

As comparações do número de Sherwood com as correlações de Venezuela (2008) e Damak *et al* (2004), apresentaram uma boa concordância qualitativa para ambos equacionamentos. Porém, quantitativamente só obteve-se bons resultados com a comparação com a Eq. (4).

Observou-se, para valores baixos de Re_w, uma concordância qualitativa e quantitativa dos resultados numéricos do número de Sherwood com a correlação de Leveque (ZEMAN; ZYDNEY, 1996), a qual foi formulada para escoamentos em sistemas impermeáveis. Isso se deve ao fato que para valores baixos de Re_w, tem-se velocidade de permeação menor e, consequentemente, menor transferência de massa, ou seja, um comportamento semelhante ao de uma parede com pouca ou sem permeabilidade.

Por fim, as comparações da espessura da camada limite de concentração, com a formulação matemática definida por Venezuela, Pérez-Guerrero e Fontes (2009), apresentaram boa concordância qualitativa e quantitativa para ambas equações (Eqs. (2), (4)), porém, a Eq. (4) apresentou melhor desempenho.

Portanto, conclui-se que a modelagem utilizando a Eq. (4) produziu resultados numéricos consistentes com a física do problema e comportamentos compatíveis com a tendência geral da literatura. Recomenda-se, para trabalho futuro, a simulação numérica com um equacionamento considerando a parcela axial difusiva na equação de convecção-difusão.

6 Referências

ASADI TASHVIGH, A.; FOULADITAJAR, A.; ZAKAEE ASHTIANI, F. Modeling concentration polarization in crossflow microfiltration of oil-in-water emulsion using shear-induced diffusion; CFD and experimental studies. **Desalination**, v. 357, p. 225-232, 2015.

CUNHA, A. de L. **Tratamento de efluentes da indústria de petróleo via membranas cerâmicas**. 2014. 177 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Processos) - Centro de Ciência e Tecnologia, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2014.

DAMAK, K. *et al* Concentration polarisation in tubular membranes: a numerical approach. **Desalination**, v. 171, n. 2, p. 139-153, 2005.

DZHONOVA-ATANASOVA, D. B.; TSIBRANSKA, I. H.; PANIOVSKA, S. P. CFD simulation of cross-flow filtration. **Chemical Engineering Transaction**, v. 70, p. 2041-2046, 2018.

FORTUNA, A. O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos:** conceitos básicos e aplicações. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000.

GERALDES, V.; SEMIÃO, V.; PINHO, M. N. Flow and mass transfer modelling of nanofiltration. **Journal of Membrane Science**, v. 191, n. 1-2, p. 109-128, 2001.

KASTER, B. **Efeitos das condições operacionais na microfiltração do suco de maçã**. 2009. 83 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Alimentos) - Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2009.

LEE, Y.; CLARK, M. M. A numerical model of steady-state permeate flux during cross-flow ultrafiltration. **Desalination**, v. 109, n. 3, p. 241-251, 1997.

MIGNARD, D.; GLASS, D. H. Fouling during the cross-flow ultrafiltration of proteins: a mass-transfer model. **Journal of Membrane Science**, v. 186, n. 1, p. 133-143, 2001.

PAES, E. M. T.; SILVA, J. M. Estudo numérico da concentração de partículas para escoamento em tubo permeável aplicado ao processo de filtração tangencial. **C.Q.D.-Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 14, p. 30-40, fev. 2019. Edição ERMAC Iniciação Científica.

PARASYRIS, A.; DISCACCIATI, M.; DAS, D. B. Mathematical and numerical modelling of a circular cross-flow filtration module. **Applied Mathematical Modelling**, v. 80, p. 84-98, 2020.

PARIS, J.; GUICHARDON, P.; CHARBIT, F. Transport phenomena in ultrafiltration: a new two-dimensional model compared with classical models. **Journal of Membrane Science**, v. 207, n. 1, p. 43-58, 2002.

RICHARDSON, C. J.; NASSEHI, V. Finite element modelling of concentration profiles in flow domains with curved porous boundaries. **Chemical Engineering Science**, v. 58, n. 12, p. 2491-2503, 2003.

RIPPERGER, S.; ALTMANN, J. Crossflow microfiltration: state of the art. **Separation and Purification Technology**, v. 26, n. 1, p. 19-31, 2002.

SILVA, J. M. **Modelagem numérica do escoamento num tubo permeável aplicada ao processo de filtração tangencial**. 2008. 131 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

SILVA, J. M.; FERREIRA, V. G.; FONTES, S. R. An evaluation of three upwinding approximations for numerical modeling the flow in tubular membrane of Newtonian and non-Newtonian fluids. **Applied Mathematics and Computation**, v. 217, n. 20, p. 7955-7965, 2011.

VENEZUELA, A. L. **Modelagem analítico-numérica do escoamento laminar convectivo em tubos associada à filtração tangencial**. 2008. 176 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

VENEZUELA, A. L.; PÉREZ-GUERRERO, J. S.; FONTES, S. R. Hybrid modeling of convective laminar flow in a permeable tube associated with the cross-flow process. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 14, n. 3, p. 795-810, 2009.

YUAN, S.W.; FUNKELSTEIN, A.B. Laminar pipe flow with injection and suction through a porous wall. **Transactions of the ASME**, v. 78, v. 4, p.719-724, 1956.

ZEMAN, L. J.; ZYDNEY, A. L. **Microfiltration and ultrafiltration:** principles and applications. New York: Marcel Dekker, 1996.