Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 19, dez. 2020

Bruno Donadelli Trajano Mattos
Secretaria da Educação de SP
b.donadelli@hotmail.com

Transformação de radicais duplos em soma de radicais simples mediante construções geométricas

Transformation of double radicals in sum of simple radicals by means of geometric constructions

Resumo

Este artigo procura motivar professores de Matemática do Ensino Básico a retornarem o ensino de Álgebra Elementar e, principalmente, Geometria Euclidiana mediante construções geométricas. Será apresentada uma forma de abordar o assunto através da identidade envolvendo radicais duplos $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ fornecendo, portanto, um ponto de vista distinto daqueles apresentados pelas demais literaturas nacionais.

Palavras-chave: Construções geométricas. Identidade entre radicais duplos. Aplicação.

Abstract

This article aims to motivate elementary school mathematics teachers to return to teaching Elementary Algebra and, mainly, Euclidean Geometry through geometric constructions. A way of approaching the subject through identity involving double radicals $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ will be presented, thus providing a point of view different from those presented by other national literature.

Keywords: Geometric constructions. Identity between double radicals. Application.

Artigo recebido em maio 2020 e aceito em jul. 2020

1 Introdução

No início dos anos 2000, cursava o Ensino Fundamental em um bom colégio privado de minha cidade. Lá tínhamos bons professores e alunos brilhantes. Muitos deles tornar-se-iam médicos, engenheiros, empresários de sucesso e advogados consagrados. Tínhamos um ensino privilegiado e, diga-se de passagem, uma boa convivência escolar com os profissionais que atuavam naquela unidade.

Embora guarde ótimas recordações daquela época, reconheço também algumas falhas existentes em nosso aprendizado. Dentre elas, destaca-se o ensino das construções geométricas no âmbito da geometria. Instrumentos simples e de baixo valor monetário como régua, par de esquadros e compasso eram pouco utilizados nas aulas de matemática e, quando explorados, percebia-se falta de clareza, objetividade e baixo domínio dos professores no manuseio de tais equipamentos. Portanto, transparecia a nós estudantes o desconforto e o descontentamento facial de nossos mestres na prática de aulas desse tipo.

No colegial, raríssimas eram às vezes em que os professores utilizavam equipamentos geométricos em suas aulas. Em trigonometria, por exemplo, davam preferência a barbantes e, *algumas poucas vezes*, utilizavam régua. Alegavam, principalmente, que o par de esquadros e o compasso eram objetos desajeitados em seu transporte e que, por vezes, serviam como *ferramentas perigosas* para alguns alunos.

Anos mais tarde, tornei-me professor da rede estadual de ensino e percebi o quão raro eram as aulas de construções geométricas oferecidas aos estudantes. As razões para tanto são bem mais complexas do que aquelas que atingem as instituições de ensino privada e, algumas, são: permutação contínua do quadro docente, infraestrutura comprometida, redução do investimento público em materiais escolares elementares, diversidade comunitária, divergência no direcionamento da verba pública conduzida pela gestão escolar, dentre inúmeros outros.

Tendo em vista a multiplicidade de fatores que dificulta o estudo das construções geométricas, adicionadas a escassez de obras nacionais direcionadas a esse tema, decidi pesquisar, do ponto de vista da matemática, aplicações possíveis de serem relacionadas no âmbito algébrico utilizando somente seus instrumentos essenciais: régua e compasso. Para minha surpresa, foi possível encontrar um significado geométrico para a soma (ou diferença) de radicais $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ e, ainda, compreender o porquê dessa ser idêntica a $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$. Posto isso, compartilho neste pequeno artigo, um pouco do que pude adquirir através da observação e da investigação.

Finalmente, antes de iniciar, assumimos que o leitor esteja familiarizado com as relações métricas no triângulo retângulo, regras elementares das construções geométricas e que domine fundamentos básicos construtivos como: transportar um segmento, encontrar o ponto médio de um segmento dado, traçar *uma única* paralela a um ponto fora de uma reta dada, traçar *uma única* perpendicular a um ponto fora de uma reta dada, construir a raiz quadrada de um valor natural qualquer através de um segmento unitário, etc (caso necessário consulte Wagner (2007)). Ressaltamos que a notação $\overline{XY}$, aqui adotada, refere-se à medida do segmento XY em relação ao segmento unitário $1\ u$.

2 Condição de existência para $f(a,b) = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

Antes de iniciarmos qualquer construção geométrica para a soma de radicais de f devemos, a princípio, estabelecer a *condição de existência* para $f(a,b)$. Tal restrição, resume-se a encontrar uma relação entre a e b que satisfaçam, simultaneamente, as desigualdades $a \pm \sqrt{a^2 - b} \geq 0$. Daí, não é difícil inferirmos que $a^2 \geq b \geq 0$; essa, para $a \geq 0$, poderá ser interpretada geometricamente da seguinte forma: dados dois segmentos, um *unitário* e outro de medida *qualquer* a, podemos exibir a existência de um terceiro segmento b de tal modo que o seu comprimento seja menor do que ou igual ao comprimento de a^2. Conforme mostra a Figura 1

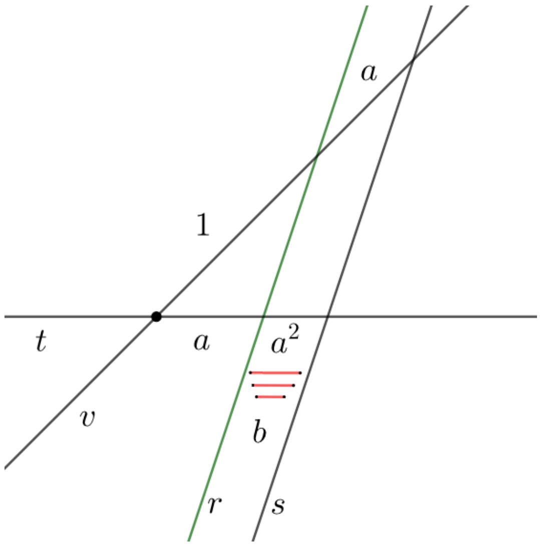

Figura 1: Sendo r e s paralelas cortadas pelas transversais t e v o Teorema de Tales, consulte Mattos (2020), justifica a *existência* de b.

podemos selecionar *ao menos um candidato*, dentre os infinitos segmentos possíveis para b, de tal forma que a condição $0 \leq b \leq a^2$ esteja satisfeita. Na mesma figura, sugerimos em vermelho, três opções a serem selecionadas.

3 Construção geométrica da soma $f(a, b)$

Atentando-se à restrição existencial de f ressaltamos a possibilidade da construção geométrica da soma $f(a, b)$. Selecionemos, para tanto, os segmentos $1\,u,\ a,\ b\ (\leq a^2)$ e, ainda, uma semirreta OX cuja origem encontra-se no ponto O. Nessas condições, devemos obter o segmento $\sqrt{b}$ e, em seguida, transferi-lo para a semirreta OX de tal modo que uma de suas extremidades incida sobre o ponto O. Chamemos a extremidade restante (aquela pertencente à semirreta OX) de A e, sobre esse, façamos uma reta perpendicular à semirreta OX indicada por p. Tomemos, em p, o *único ponto* B responsável pela veracidade da igualdade $\overline{OB} = a$. Formamos, por essa construção, um triângulo retângulo OAB com $\overline{AB} = \sqrt{a^2 - b}$. Tracemos, em sua hipotenusa, uma nova semirreta com origem O e que passa por B. A Figura 2 ilustra essa situação.

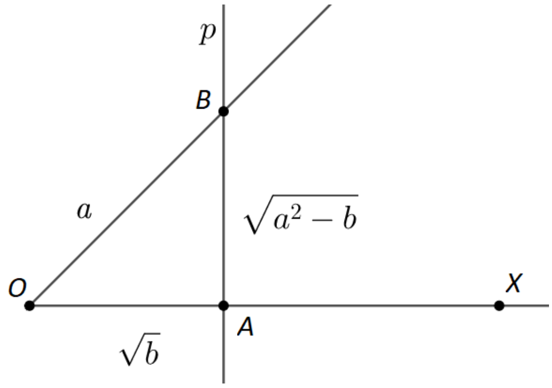

Figura 2: Por essa figura observa-se que se a condição $0 \leq \sqrt{b} \leq a$ não for inicialmente respeitada, então B não pertencerá a p.

Conduzamos, em AB, a mediatriz q responsável por concorrer AB e OB nos pontos M e C. O círculo de centro em B e raio $\overline{BM} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 - b}$ interceptará a semirreta OB nos pontos D e E com D abaixo de E. Daí, justificamos que $\overline{CD} = \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$ e $\overline{CE} = \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}$.

Neste momento, faz-se por necessário, transportarmos *duplamente* o segmento unitário a semirreta OB. O primeiro deles deverá incidir uma de suas extremidades no ponto E de tal modo que a extremidade restante se encontre acima desse ponto. Por F indiquemos a extremidade não sobreposta à E. Encerrado essa etapa, enfatizemos agora, o segundo transporte. Analogamente, façamos com que uma das extremidades da unidade justaponha-se a D mantendo a extremidade de sobra acima desse ponto. Usemos a letra G para referenciá-la.

Finalizada todas as exigências anteriores daremos continuidade à construção. Prosseguimos, então, traçando dois semicírculos λ_1 e λ_2 de diâmetros CF e CG. Denominemos por Q e P seus respectivos pontos médios. Com centro em Q e raio QF, tracemos o semicírculo λ_1 situado no semiplano superior à semirreta OB. Da mesma maneira, porém, com centro em P e raio PG, tracemos o semicírculo λ_2 situado também mesmo semiplano. A Figura 3 ilustra as descrições realizadas até o momento.

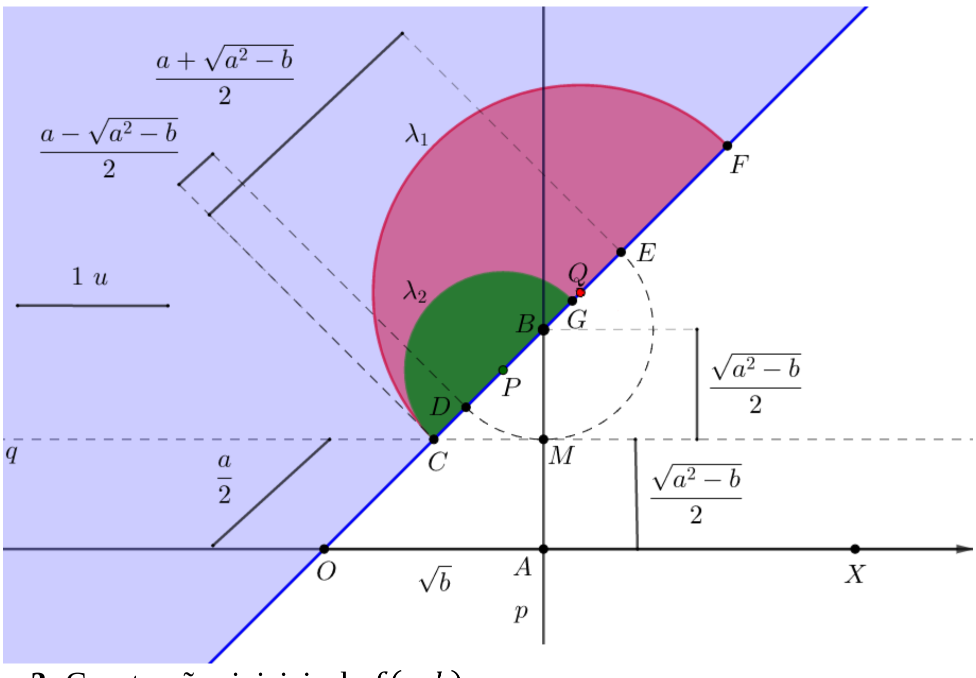

Figura 3: Construções iniciais de $f(a,b)$.

Em D e E construamos duas retas u e l perpendiculares à semirreta OB. Simbolizemos por H o ponto em que u intercepta o semicírculo menor λ_2 e por I o ponto em que l intercepta o semicírculo maior λ_1. Os segmentos DH e EI possuem medidas $\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$ e $\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}$, uma vez que DH e EI são as alturas dos triângulos GHC e FIC inscritos em λ_2 e λ_1. Posto isso, se transportarmos o segmento DH para a reta l, com D incidindo em I e H sobrepondo em um ponto J de l (acima de λ_1), teremos um segmento EJ de medida igual à soma $f(a,b)$ almejada.

4 Identidade algébrica de $f(a,b)$

Encerrada a construção geométrica da soma $f(a,b)$ veremos, logo abaixo, que é possível encontrar uma identidade algébrica para f. Para tal, façamos preliminarmente algumas construções adicionais na Figura 3 que são:

- Conduzamos o segmento OA para a semirreta OB de tal modo que O sobreponha-se em B e A incida em um ponto R acima de B.
- Desloquemos o segmento unitário para a semirreta OB de tal maneira que uma de suas extremidades coincida-se a R e a outra situe-se imediatamente acima desse ponto. Usemos a letra L para denominar esse ponto.
- Em R tracemos uma paralela a l. Chamemos tal reta de m.
- Transportemos o segmento EJ para m de modo que E sobreponha-se a R e J coincida com um ponto N de m localizado no semiplano superior a semirreta OB.
- No mesmo semiplano da menção acima façamos a construção de um semicírculo λ_3 cujo centro seja S e o diâmetro seja OL.

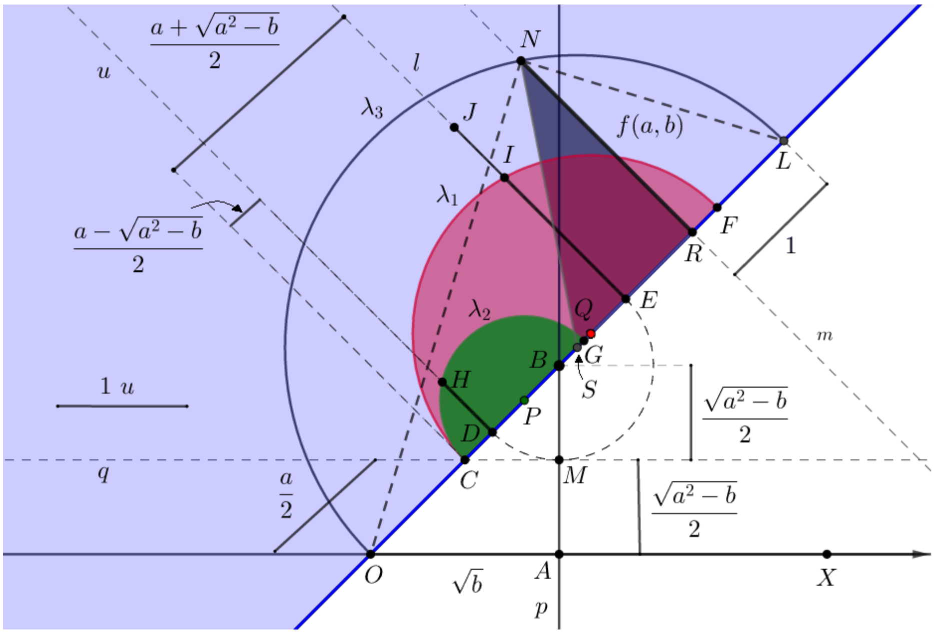

Figura 4: Construção geométrica de $f(a,b)$ e conjectura da inscrição do triângulo LNO em λ_3.

Se após o término dessas etapas formos capazes de comprovar que N pertence a λ_3, então podemos concluir que

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}, \tag{1}$$

já que a hipótese $\overline{RN} = f(a,b) = \overline{EJ}$ juntamente ao fato de que

"Em todo triangulo retângulo a altura relativa à hipotenusa é a média geométrica da projeção de seus catetos sobre a hipotenusa.",

nos permite inferirmos que $(\overline{RN})^2 = \left(a+\sqrt{b}\right)\cdot 1$, ou seja, $\overline{RN} = \sqrt{a+\sqrt{b}} = f(a,b)$. Contudo, comprovar que N pertençe a λ_3 equivale a mostrar que a distância de entre S e N é igual à medida do raio $\overline{SL}$ de λ_3 dada por $\frac{1}{2}\cdot\overline{OL}$.

Com efeito, no *triângulo retângulo* RNS temos as seguintes hipóteses: $\overline{SR} = \left(\frac{a+\sqrt{b}+1}{2} - 1\right)$ e $\overline{RN} = f(a,b)$. Tais fatos estão dentro das exigências do Teorema de Pitágoras justificando, portanto, que

$$\overline{SN} = \sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{b}+1}{2} - 1\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2}$$

cujo desenvolvimento seguido da simplificação algébrica resulta em

$$\overline{SN} = \frac{a+\sqrt{b}+1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\overline{OL}$$

encerrando, dessa forma, a demonstração.

■

Transparecidas as ideais essenciais da demonstração deixamos, *a cargo do leitor*, provar a seguinte identidade

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}. \tag{2}$$

Nota: É imprescindível ressaltarmos a eficiência das fórmulas (1) e (2) (mas principalmente da fórmula (2)) para simplificar expressões envolvendo soma (ou diferença) de radicais duplos em soma (ou diferença) de radicais simples que surgem, *naturalmente*, em aplicações matemáticas corriqueiras. Salienta-se ainda que tais simplificações tornam-se *possíveis* quando, e somente quando, a diferença $a^2 - b$ é o quadrado de um número *real positivo*.

5 Aplicação das identidades

Abaixo, iremos exemplificar um problema que torna prático a aplicação da fórmula (2). Outros mais poderão ser encontrados em Mattos (2018).

Problema. Sabe-se que a fórmula que determina o lado l_{2n} do polígono regular de $2n$ lados inscrito em círculo de raio R, em recorrência ao lado l_n é expressa por

$$l_{2n} = \sqrt{2 \cdot R^2 - R \cdot \sqrt{4 \cdot R^2 - l_n^2}}. \tag{3}$$

Determine, usando (2), uma identidade para (3). Em seguida, utilize a identidade obtida e calcule, com precisão de duas casas decimais, o perímetro de um dodecágono inscritível em um círculo unitário.

Solução. Confrontando o radical duplo expresso em (3) com a fórmula apresentada em (2), inferimos que $a = 2 \cdot R^2$ e $b = 4 \cdot R^4 - (R \cdot l_n)^2$ pois, segundo as propriedades de radiciação, é correto afirmarmos que

$$l_{2n} = \sqrt{2 \cdot R^2 - R \cdot \sqrt{4 \cdot R^2 - l_n^2}} = \sqrt{2 \cdot R^2 - \sqrt{4 \cdot R^4 - (R \cdot l_n)^2}}.$$

A diferença $a^2 - b$ é igual ao quadrado do produto $R \cdot l_n$. Portanto, torna-se viável aplicarmos a fórmula presente em (2) a fim de encontrarmos uma identidade para o radical expresso por (3). Sendo assim, justificamos que

$$l_{2n} = \sqrt{\frac{2 \cdot R^2 + \sqrt{(R \cdot l_n)^2}}{2}} - \sqrt{\frac{2 \cdot R^2 - \sqrt{(R \cdot l_n)^2}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot R^2 + R \cdot l_n}{2}} - \sqrt{\frac{2 \cdot R^2 - R \cdot l_n}{2}} = \frac{R}{2} \cdot \left(\sqrt{4 + \frac{2 \cdot l_n}{R}} - \sqrt{4 - \frac{2 \cdot l_n}{R}}\right). \tag{4}$$

Finalmente, ao realizarmos a substituição $R = 1 = l_6$ em (4), deduzimos que o perímetro do dodecágono regular é igual a $12 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})$, ou seja, $6 + 0{,}21165708 \cong 6{,}21$.

6 Conclusão

Apesar dos inúmeros obstáculos enfrentados pelos professores do Ensino Básico no ensino de geometria via construções geométricas, ressaltamos sua importância não somente para o desenvolvimento motor dos estudantes, mas também, pela naturalidade com que as figuras e suas características são introduzidas em sala de aula. Além do mais, é possível explorarmos diversas propriedades elementares da Geometria Euclidiana mediante reais necessidades práticas das aulas assim propostas.

Por fim, salientamos ainda a possibilidade de descobertas de novos fatos algébricos e geométricos que podem ser adquiridos na exploração simultânea da álgebra e geometria por meio de construções geométricas. Dessa forma, esperamos que o artigo apresentado possa contribuir diretamente na formação cultural de alunos e professores do Ensino Básico.

7 Referências

MATTOS, B. D. T. Um olhar analítico sobre o teorema de Tales e a área do círculo. **C.Q.D.– Revista Eletrônica Paulista de Matemática,** Bauru, v. 18, p. 21-36, 2020. Disponível em: https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/revista-cqd/. Acesso em: 27 jul. 2020.

MATTOS, B. D. T. **Provando e praticando.** Rio de Janeiro: Interciência, 2018.

WAGNER, E. **Construções geométricas.** 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.