

**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 19, dez. 2020

Luísa Andrade Martins

Faculdade de Matemática
Universidade Federal de Uberlândia
luisaamartins10@gmail.com

Ana Paula Tremura Galves

Faculdade de Matemática
Universidade Federal de Uberlândia
ana.galves@ufu.br

Espaço de Hausdorff e os fractais IFS

Metric spaces and IFS fractals

Resumo

Este trabalho tem como propósito o estudo dos fractais que podem ser vistos como pontos fixos de um sistema de funções iteradas (IFS), que são chamados fractais IFS. Tais fractais serão definidos no espaço de Hausdorff, cujos pontos são subconjuntos compactos não vazios de um espaço métrico completo X , com a métrica de Hausdorff, que determina o grau de correspondência entre dois conjuntos segundo sua distância. Para tal, foram estudados conceitos básicos de espaços métricos como compacidade, sequência de Cauchy, espaços métricos completos, entre outros. Além disso, serão apresentados o conceito de ponto fixo e o teorema do ponto fixo de Banach, os quais serão de grande importância na definição e na demonstração de resultados sobre fractais IFS.

Palavras-chave: Fractais IFS. Espaço de Hausdorff. Métrica de Hausdorff. Teorema do ponto fixo de Banach.

Abstract

This work aims to study fractals that can be seen as fixed points of an iterated function systems (IFS), which are called IFS fractals. Such fractals will be defined in Hausdorff space, whose points are not compact empty subsets of a complete metric space X , with Hausdorff metric, which determines the degree of correspondence between two sets according to their distance. To this end, basic concepts of complete metric space were studied, such as: compactness, Cauchy sequence, space complete metric space, among others. In addition, the concept of fixed point and the Banach fixed point theorem will be presented, which will be of great importance for the definition and results demonstration on IFS fractals.

Keywords: IFS fractals. Hausdorff space. Hausdorff metric. Banach fixed point theorem.

1 Introdução

As distâncias conferem uma noção de proximidade muito diversa daquela resultante da observação intuitiva humana e daquela que leva a interpretação adequada do processo em análise. A distância de Hausdorff, um dos tópicos que serão estudados nesse artigo, tem sido bastante utilizada para tais propósitos.

O presente trabalho tem como objetivo inicial, o estudo da teoria de contrações e pontos fixos.

A teoria sobre pontos fixos é de vasta aplicação em matemática. Uma pergunta natural a se fazer é: será que toda função tem ponto fixo? Na prática, dada uma função f , de certa forma é difícil assegurar-se da existência de um ponto fixo para f , ou seja, um ponto x do domínio da função tal que $f(x) = x$. Na maioria das situações, o interesse é garantir a existência de um, e somente um, ponto fixo para a função dada.

Devido a valiosas informações que um ponto fixo pode oferecer, grandes matemáticos enriqueceram a teoria com grandes teoremas sobre o assunto. Um desses teoremas, de interesse de estudo no trabalho, é o teorema do ponto fixo de Banach, também conhecido como teorema das contrações. Além de apresentar o teorema, ele será utilizado no estudo do conceito do espaço de Hausdorff e dos fractais IFS, o qual é o foco final desse trabalho.

Do ponto de vista informal, fractais são estruturas que apresentam irregularidades e fragmentação em uma faixa de escala muito ampla, aparentemente infinita, como, por exemplo, as encontradas nas nuvens, nas fumaças, nas montanhas, nas árvores e em diversos outros objetos da natureza. Em síntese, um fractal é uma forma cujas partes são réplicas do todo sob algum aspecto.

Desse modo, de acordo com [1], os fractais podem ser classificados em três categorias principais. Estas categorias podem ser determinadas pelo modo como o fractal é formado ou gerado.

Primeiro, temos os fractais determinísticos, conhecidos como fractais geométricos, são subconjuntos gerados por transformações geométricas simples do próprio objeto nele mesmo. Temos os fractais gerados por computadores, que também são chamados de fractais de fuga. E por fim, os fractais aleatórios, são também chamados de fractais naturais, quando o todo é estatisticamente semelhante a uma ampliação de uma parte, dizemos que o fractal é aleatório.

Como objetivo final do trabalho, estaremos interessados em mostrar, que determinados fractais podem ser entendidos como pontos fixos de um sistema de funções iteradas IFS para algum espaço métrico munido com uma métrica de Hausdorff, os chamados fractais IFS. Para isso, faz-se necessário os conceitos de métrica, espaços métricos, ponto fixo e o teorema do ponto fixo de Banach citados anteriormente.

Os sistemas de funções iteradas são sistemas de funções que têm a característica de convergirem para um dado conjunto quando aplicados várias vezes sobre si mesmo.

2 Conceitos preliminares

Nessa seção serão apresentados alguns conceitos preliminares da teoria de espaços métricos, necessários para o desenvolvimento do trabalho. Alguns resultados básicos sobre espaços métricos, espaços métricos compactos e sequências serão assumidos neste artigo, porém suas demonstrações podem ser encontradas em [2]. Para maiores detalhes sobre o assunto, consultar [3], [4] e [5].

2.1 Contrações em espaços métricos

Dentre as funções contínuas, temos as contrações, que serão de extrema importância para nosso estudo, sendo utilizada como hipótese no teorema do ponto fixo de Banach que será apresentado na seção seguinte, e em outros resultados fundamentais para a definição dos fractais IFS.

A ideia de uma contração pode ser expressa como uma função de um espaço métrico em si mesmo, reduzindo as distâncias. A definição formal veremos a seguir:

Definição 1 Seja (X, d) um espaço métrico. Uma transformação $f : X \rightarrow X$ é uma **contração** se existir uma constante $s \in \mathbb{R}$, com $0 \leq s < 1$, tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq s.d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

Chamaremos a constante s de fator de contração de f .

Exemplo 2 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. Note que

$$d(f(x), f(y)) = \left| \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3}y + \frac{2}{3} \right) \right| = \frac{1}{3}|x - y| = \frac{1}{3}d(x, y).$$

Assim, temos que f é uma contração com fator de contração igual a $\frac{1}{3}$. Observe que qualquer $r \in \left[\frac{1}{3}, 1 \right)$ é também fator de contração de f .

Proposição 3 Toda contração é contínua.

Prova.

Seja (X, d) um espaço métrico. Sejam $f : X \rightarrow X$ uma contração, $a \in X$ e $\varepsilon > 0$. Devemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Como f é uma contração, existe s , com $0 \leq s < 1$, tal que $d(f(x), f(y)) \leq sd(x, y)$. Se $s = 0$ então $d(f(x), f(y)) = 0$, $\forall x, y \in X$, significa que f é uma função constante e, portanto, contínua.

Agora, se $s > 0$, basta fazer $\delta = \frac{\varepsilon}{s}$. Assim,

$$d(x, a) < \delta = \frac{\varepsilon}{s} \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq sd(x, a) < s \cdot \frac{\varepsilon}{s} = \varepsilon,$$

para todo $a \in X$.

Em particular, se $s = 1$, temos que $d(f(x), f(a)) \leq d(x, a)$. Assim, tomando $\delta = \varepsilon$, temos

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) \leq d(x, a) < \delta = \varepsilon, \quad \forall a \in X.$$

Esse caso, chamamos de *contração fraca*. □

Exemplo 4 Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(z) = sze^{i\theta} + a + bi$, onde $s, a, b \in \mathbb{R}$, com $0 \leq s < 1$, i é unidade imaginária e e a constante de Euler.

Lembremos que $e^{i\theta} = \cos\theta + isen\theta = (\cos\theta, sen\theta)$, onde $\|e^{i\theta}\| = 1$. Entretanto,

$$\begin{aligned} \|f(z) - f(w)\| &= \|sze^{i\theta} + a + bi - swe^{i\theta} - a - bi\| \\ &= s\|e^{i\theta}\| \cdot \|z - w\| = s \cdot \|z - w\|. \end{aligned}$$

Assim,

$$d(f(z), f(w)) = sd(z, w).$$

Portanto, f é uma contração com fator de contração s e, conseqüentemente, contínua.

2.2 Espaços métricos completos

Nesta subseção, estudaremos sequências em espaços métricos, exibindo e demonstrando alguns resultados como: sequências, limites de sequências, destacando as sequências de Cauchy, tendo como objetivo a definição de espaços métricos completos. Traremos alguns resultados importantes para os resultados do teorema do ponto fixo de Banach.

Definição 5 *Seja (X, d) um espaço métrico. Uma sequência (x_n) de pontos de X é chamada sequência de Cauchy se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um índice $r \in \mathbb{N}^*$ tal que*

$$m, n \geq r \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Vejam os a seguir, um resultado importante para sequências convergentes.

Proposição 6 *Toda sequência convergente de um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.*

Prova.

Como a sequência é convergente, temos que (x_n) converge para a , então para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \geq n_0$ tal que $d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, para todo $m, n \geq n_0$, temos

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

A recíproca dessa proposição não é válida, observemos o exemplo a seguir.

Exemplo 7 *Seja (x_n) a sequência de pontos de \mathbb{Q} definida por recorrência abaixo*

$$x_1 = 2 \text{ e } x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right), \quad \forall n \geq 1.$$

Como $x_n - \frac{2}{x_n} \neq 0$, uma vez que cada x_n é racional, e como

$$x_{n+1}^2 = \frac{1}{4} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(x_n - \frac{2}{x_n} \right)^2 + 2,$$

então $x_n^2 > 2$, para todo $n \geq 1$. Daí,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) < \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{x_n^2}{x_n} \right) = x_n,$$

para qualquer $n \geq 1$. Então,

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n > \dots > 1$$

Como a sequência é decrescente e limitada inferiormente por 1, então a sequência (x_n) converge para um ponto $p > 0$ e, portanto, (x_n) é de Cauchy em \mathbb{Q} . Como $(x_2, x_3, \dots) \rightarrow p$ e aplicando

limite em ambos os lados da igualdade

$$\begin{aligned}\lim x_{n+1} &= \lim \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \\ p &= \frac{1}{2} \left(p + \frac{2}{p} \right) \\ 2p &= p + \frac{2}{p} \\ p &= \frac{2}{p} \\ p^2 &= 2\end{aligned}$$

Portanto, $p \notin \mathbb{Q}$, ou seja, (x_n) não converge em \mathbb{Q} .

Proposição 8 Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em um espaço métrico (X, d) . Se existe uma subsequência de (x_n) que converge para $p \in X$, então $\lim x_n = p$.

Prova.

Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em um espaço métrico X . Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe um índice n_k , tal que

$$n_i \geq n_k \Rightarrow d(x_{n_i}, p) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, sendo (x_n) sequência de Cauchy, existe um índice s , tal que

$$m, n \geq s \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $t = \max\{n_k, s\}$, temos que

$$n \geq t \Rightarrow d(x_n, p) < \varepsilon,$$

o que garante a convergência de (x_n) para o ponto p . □

Corolário 9 Se uma sequência de pontos de um espaço métrico contém duas subsequências que convergem para pontos diferentes desse espaço, então a sequência não é de Cauchy.

Definição 10 Um espaço métrico X é chamado completo se toda sequência de Cauchy desse espaço converge para um ponto de X .

Proposição 11 Toda sequência de Cauchy (x_n) em \mathbb{R} converge para um ponto $p \in \mathbb{R}$.

Prova.

Sabemos que existe um $k > 0$ tal que $|x_n| < k, \forall n \geq 1$, o que nos permite concluir a existência, para cada índice $m \geq 1$, de

$$y_m = \inf\{x_m, x_{m+1}, \dots\}.$$

Podemos notar que

$$y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n \leq \dots \leq k$$

e portanto, (y_n) converge para $p = \sup\{y_n | n = 1, 2, \dots\}$ que é um ponto de \mathbb{R} . Mostremos que $\lim x_n = p$.



Dado $\varepsilon > 0$, existe um índice r e um índice s , uma vez que (x_n) é de Cauchy, tais que

$$\begin{aligned} n \geq r &\Rightarrow |y_n - p| < \frac{\varepsilon}{3} \\ m, n \geq s &\Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Tomando $t > \max\{r, s\}$, temos que para todo $n > t$

$$|x_n - p| < \varepsilon.$$

Logo, $\lim x_n = p$. □

Assim, podemos dizer que \mathbb{Q} não é completo e \mathbb{R} é um espaço métrico completo.

Proposição 12 *Sejam M e N espaços métricos. Então, o espaço $M \times N$ é completo se, e somente se, M e N são completos.*

Prova.

Se (x_n) é uma sequência de Cauchy em M , então, para cada $y \in N$, $((x_n, y))$, com $n = 1, 2, \dots$, é uma sequência de Cauchy no espaço $M \times N$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe um índice r tal que

$$m, n \geq r \Rightarrow D_1((x_m, y); (x_n, y)) = d(x_m, x_n) + d(y, y) = d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Portanto, $((x_n, y))$ converge para um ponto (x, y) de $M \times N$ e daí (x_n) converge para $x \in M$. De modo análogo se prova que N é completo. □

Agora, se $((x_n, y_n))$ é uma sequência de Cauchy em M e N , respectivamente, e sendo completos estes espaços, existem $p \in M$ e $q \in N$ de modo que $\lim x_n = p$ e $\lim y_n = q$. Portanto, ainda pela proposição anterior

$$\lim(x_n, y_n) = (p, q).$$

Corolário 13 *O espaço \mathbb{R}^n é completo.*

Proposição 14 *Todo espaço métrico compacto é completo.*

Prova.

Seja (x_n) uma sequência de Cauchy num espaço métrico compacto X . Da compacidade de X temos que existe uma subsequência $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots)$ que converge para um ponto $p \in M$. Mas se uma subsequência de uma sequência de Cauchy converge, então a sequência converge para o mesmo ponto. Logo, $x_n \rightarrow p$ e portanto, X é completo. □

Observação: A recíproca não vale sempre, por exemplo, o espaço \mathbb{R} , com métrica usual, é completo. Porém, não é compacto pois a sequência de números reais $(2, 4, 6, \dots)$ não admite subsequência que convergente em \mathbb{R} .

Já vimos que \mathbb{Q} não é completo. A construção de \mathbb{R} a partir de \mathbb{Q} representa o que chamamos de **completamento** de \mathbb{Q} . Intuitivamente, \mathbb{R} é a ampliação de \mathbb{Q} obtida acrescentando-se a este conjunto os limites de sequências de Cauchy racionais que a ele não pertencem.

Definição 15 *Um completamento de um espaço métrico (X, d) é um par $((\hat{X}, d); f)$, onde (\hat{X}, d) é um espaço métrico completo, $f : X \rightarrow \hat{X}$ é a imersão isométrica e $f(\hat{X})$ é denso em \hat{X} .*

Proposição 16 *Seja (X, d) um espaço métrico. Se existe um subconjunto não vazio $A \subset X$ tal que $\overline{A} = X$ e toda sequência de Cauchy de pontos de A converge em X , então X é completo.*

Prova.

Se (x_n) é uma sequência de Cauchy em X , para todo $\varepsilon > 0$ existe um índice r tal que $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{3}$ para quaisquer $m, n \geq r$.

O fato de A ser denso em X garante por outro lado que, para cada índice $k \geq 1$, existe $y_k \in A$ de maneira que $d(x_k, y_k) < \frac{1}{k}$. Assim, se s é um índice maior que r e que $\frac{\varepsilon}{3}$, para $m, n \geq s$ então vale

$$d(y_m, y_n) \leq d(y_m, x_m) + d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) < \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n} < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

o que mostra que (y_n) é uma sequência de Cauchy em A . Como as sequências de Cauchy que convergem em A convergem em X , existe $p \in X$ tal que $\lim y_n = p$. Mostremos que (x_n) também converge para p .

Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim y_n = p$, existe r tal que

$$n \geq t \Rightarrow d(y_n, p) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daí, para todo $n > \max\{t, \frac{\varepsilon}{2}\}$ teremos

$$d(x_n, p) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, p) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

3 Teorema do ponto fixo de Banach

Nesta seção será apresentado o teorema do ponto fixo de Banach e sua demonstração, o qual será utilizado em resultados fundamentais do espaço de Hausdorff e dos fractais IFS.

Inicialmente, apresentaremos a definição de ponto fixo de uma função e abordaremos alguns exemplos que nos permitirão identificar tais pontos. Lembrando que iremos considerar sempre (X, d) um espaço métrico.

Definição 17 *Um ponto fixo de uma aplicação $f : X \rightarrow X$ é um ponto $x \in X$ tal que $f(x) = x$.*

Exemplo 18 *A aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$, tem dois pontos fixos, que são os pontos 0 e 1. Pois, $f(0) = 0^2 = 0$ e $f(1) = 1^2 = 1$.*

Exemplo 19 *A aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \cos(x)$, possui um ponto fixo, o qual está representado graficamente abaixo.*

Para maiores detalhes sobre o teorema e suas aplicações, consultar [6] e [7].

Teorema 20 (do ponto fixo de Banach) *Se (X, d) é um espaço métrico completo, toda contração $f : X \rightarrow X$ possui um único ponto fixo em X .*

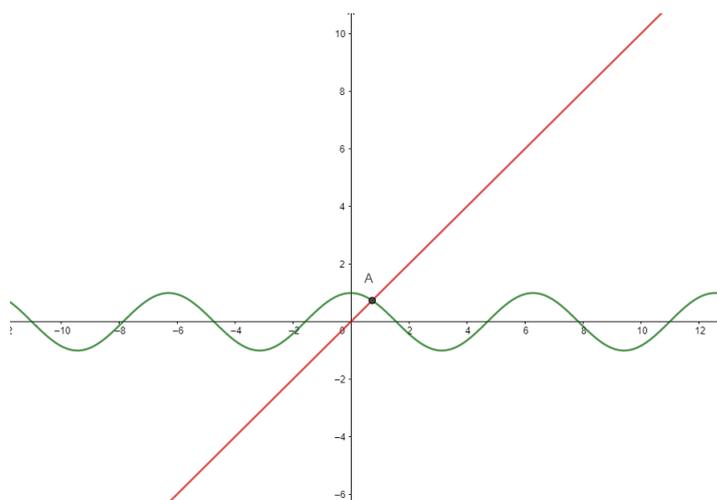


Figura 1: Ponto fixo da função $f(x) = \cos(x)$ indicado pela interseção das duas curvas $y = \cos x$ e $y = x$ no ponto A. Adaptado de [6].

Prova.

Seja (x_n) uma sequência em X tal que, fixado um ponto x_0 e fazendo $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2), \dots$, $x_n = f(x_{n-1})$, $x_{n+1} = f(x_n), \dots$. Mostremos que $a = \lim x_n$ é o único ponto fixo de f . Vamos admitir que a sequência (x_n) convirja para um ponto $a \in X$.

Provemos a existência do ponto fixo.

Como, por hipótese, $\lim x_n = a$, temos $f(a) = f(\lim x_n)$. Mas, como f é uma contração, segue que f é contínua, assim

$$f(\lim x_n) = \lim f(x_n),$$

o que implica, $f(a) = \lim f(x_n)$. Mas, por hipótese, $f(x_n) = x_{n+1}$, então $f(a) = \lim x_{n+1}$, e como supomos que (x_n) converge para a , segue da unicidade do limite, que $f(a) = a$.

Portanto, a é o ponto fixo de f .

Provemos a unicidade do ponto fixo.

Suponhamos que existam dois pontos fixos, $f(a) = a$ e $f(b) = b$. Como f é uma contração

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y),$$

com $0 \leq c < 1$, para x, y quaisquer em M . Então,

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq c \cdot d(a, b),$$

ou seja, $d(a, b) \leq c \cdot d(a, b) \Rightarrow d(a, b)(1 - c) \leq 0$. Como $1 - c > 0$, temos que $d(a, b) \leq 0$. Mas por se tratar de uma métrica, $d(a, b)$ deve ser sempre maior ou igual a zero, nos restando apenas a possibilidade $d(a, b) = 0$. E isso acontece se, e somente se, $a = b$.

Portanto, o ponto fixo é único.

Resta provar que a sequência (x_n) , considerada inicialmente, é de fato convergente. Para isso, basta mostrar que (x_n) é de Cauchy em X , pois sendo X completo (x_n) é convergente.

Observe que, sendo f uma contração e como

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots, x_n = f(x_{n-1}), x_{n+1} = f(x_n), \dots$$

temos

$$\begin{aligned}d(x_1, x_2) &= d(f(x_0), f(x_1)) \leq c \cdot d(x_0, x_1), \\d(x_2, x_3) &= d(f(x_1), f(x_2)) \leq c \cdot d(x_1, x_2) \leq c \cdot (c \cdot d(x_0, x_1)) = c^2 \cdot d(x_0, x_1).\end{aligned}$$

Fazendo isso indefinidamente temos, de modo geral, $d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n \cdot d(x_0, x_1)$. Daí, segue que, para $n, p \in \mathbb{N}$ quaisquer

$$\begin{aligned}d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\&\leq [c^n + c^{n+1} + \cdots + c^{n+p-1}] \cdot d(x_0, x_1).\end{aligned}$$

Desta forma,

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq c^n [1 + c + \cdots + c^{p-1}] \cdot d(x_0, x_1).$$

Note que $[1 + c + \cdots + c^{p-1}]$ é a soma de termos de uma progressão geométrica de razão c , com $0 \leq c < 1$, logo $[1 + c + \cdots + c^{p-1}] = \frac{1}{1-c}$. E assim, obtemos

$$d(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{c^n}{1-c} \cdot d(x_0, x_1).$$

Como, $0 \leq c < 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$, segue que $d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon, \forall n > n_0$ com $\varepsilon > 0$ tão pequeno quanto se queira. Portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy no espaço métrico completo X e concluímos assim que a sequência é convergente. \square

4 Espaço de Hausdorff

Nos referimos ao espaço de Hausdorff como o "espaço dos fractais", os quais iremos discutir mais a fundo na próxima seção. Esta seção tem como principal objetivo verificar que o espaço de Hausdorff é um espaço métrico completo. Para maiores informações sobre o assunto, consultar [8] e [9].

Definição 21 *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Denotaremos de $\mathcal{H}(X)$ o espaço cujos pontos são subconjuntos compactos não vazios de X , ou seja,*

$$\mathcal{H}(X) = \{K \subset X | K \text{ é compacto e } K \neq \emptyset\}.$$

Para trabalharmos com um espaço métrico é importante que tenhamos uma métrica bem definida e para isso, definiremos a distância de um elemento do espaço métrico X a um elemento de $\mathcal{H}(X)$. Tal métrica será apresentada na subseção a seguir e é conhecida como *distância de Hausdorff*.

4.1 Métrica de Hausdorff

A métrica de Hausdorff ou distância de Hausdorff, mede a extensão em que cada ponto de um conjunto de modelos fica próximo a algum ponto de um conjunto de imagens e vice-versa. Assim, essa distância pode ser usada para determinar o grau de correspondência entre dois objetos sobrepostos um ao outro. Apresentaremos a seguir, o conceito da distância de Hausdorff e alguns resultados a ele relacionados.

Agora, apresentaremos o passo a passo para a definição de tal distância.

Definição 22 Sejam (X, d) um espaço métrico completo, $x \in X$ e $B \in \mathcal{H}(X)$. Definimos a distância do ponto x ao conjunto B como

$$d(x, B) = \min \{ d(x, y) | y \in B \}.$$

Como sabemos que o conjunto de números reais $\{ d(x, y) | y \in B \}$ contém um mínimo valor como afirma a definição acima? Tal resultado segue do fato de $B \in \mathcal{H}(X)$ ser compacto e não vazio.

De fato, seja $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, com B compacto, definida por $f(y) = d(x, y), \forall y \in B$.

Consideremos o seguinte conjunto

$$S := \{ d(x, y) | x \in B \}.$$

Observe que $S \subseteq \mathbb{R}, S \neq \emptyset$ e S é limitado inferiormente; pois se \mathbb{R} é completo, existe $P = \inf S$. Como P é a maior das cotas inferiores de S , para cada $n \in \mathbb{N}^*$ existe $(y_n) \in B$, pela Proposição 12, tal que $f(y_n) < P + \frac{1}{n}$, e se $-\frac{1}{n} < 0 \leq f(y_n) - P < \frac{1}{n}$; portanto $|f(y_n) - P| < \frac{1}{n}$, resultando

$$\lim f(y_n) = P.$$

Como B é compacto, existe (y_{n_k}) subsequência de (y_n) tal que $\lim(y_{n_k}) = \hat{y}$, com $\hat{y} \in B$. Se $f(\lim(y_{n_k})) = f(\hat{y})$ e f é contínua, $\lim(f(y_{n_k})) = f(\hat{y})$. Portanto, $f(y_{n_k})$ é uma subsequência de $f(y_n)$, então $P = f(\hat{y})$, de modo que P é realmente mínimo de S .

Definição 23 Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $A, B \in \mathcal{H}(X)$. A distância do conjunto A ao conjunto B é definida como

$$d(A, B) = \max \{ d(x, B) | x \in A \}.$$

Assim como garantimos a existência de um mínimo, podemos afirmar a existência de um máximo para a definição anterior.

De fato, seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = d(x, B), \forall x \in A$, a qual sempre existe, como vimos anteriormente. Vejamos que f é contínua. Seja $\varepsilon > 0$, teremos

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, B) - d(y, B)| = |d(x, b_1) - d(y, b_2)|$$

para algum $b_1, b_2 \in B$, então temos

$$\begin{aligned} d(x, B) &= d(x, b_1) = \min \{ d(x, b) | b \in B \} \\ d(y, B) &= d(y, b_2) = \min \{ d(y, b) | b \in B \}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$d(x, b_1) \leq d(x, b_2) \leq d(x, y) + d(y, b_2) \quad \text{e} \quad d(y, b_2) \leq d(y, b_1) \leq d(y, x) + d(x, b_1).$$

Das desigualdades anteriores obtemos

$$-d(x, y) \leq d(x, b_1) - d(y, b_2) \leq d(x, y).$$

Desse modo,

$$|d(x, b_1) - d(y, b_2)| \leq d(x, y).$$

E para obter a continuidade de f basta então tomar $0 < \delta \leq \varepsilon$.
Agora, consideremos o seguinte conjunto

$$S := \{d(x, B) | x \in A\}.$$

$S \subseteq \mathbb{R}, S \neq \emptyset$. Como $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e A é compacto, então $f(A)$ também é compacto. Note que $f(A) = S$ é compacto e portanto limitado. Como \mathbb{R} é completo, existe $P = \sup S$. Para verificar que P é máximo de S , vamos supor que para cada $n \in \mathbb{N}^*$, existe $y_n \in A$ tal que $P - \frac{1}{n} < f(y_n)$, logo

$$-\frac{1}{n} < 0 \leq P - f(y_n) < \frac{1}{n},$$

onde $|P - f(y_n)| < \frac{1}{n}$ e portanto

$$\lim f(y_n) = P.$$

Como A é compacto e (y_n) é uma sequência em A , existe (y_{n_k}) subsequência de (y_n) tal que $\lim y_{n_k} = \hat{a}$ para algum $\hat{a} \in A$. Portanto $f(\lim(y_{n_k})) = f(\hat{a})$, e como f é contínua, $\lim(f(y_{n_k})) = f(\hat{a})$. Como $f(y_{n_k})$ é uma subsequência de $f(y_n)$, segue que $P = f(\hat{a})$, de maneira que P é o máximo de S .

Em outras palavras, $d(A, B)$ é a maior das menores distâncias que separam os pontos de A de qualquer ponto de B .

Para entender melhor a definição anterior, considere o exemplo a seguir.

Exemplo 24 Dados os conjuntos $A = [200, 250] \times [200, 250]$ e $B = [300, 400] \times [200, 250]$. Vamos calcular a distância do conjunto A ao conjunto B .

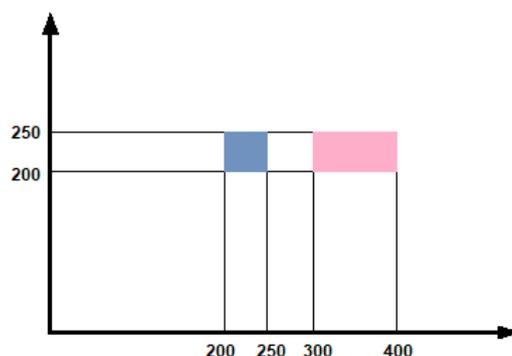


Figura 2: Representação dos conjuntos $A = [200, 250] \times [200, 250]$ e $B = [300, 400] \times [200, 250]$.

Primeiramente, calcularemos as distâncias de cada ponto $x \in A$ ao conjunto B . Assim, se

$$x = (200, 250) \implies d(x, B) = 100.$$

$$x = (250, 200) \implies d(x, B) = 50.$$

$$x = (250, 250) \implies d(x, B) = 50.$$

$$x = (200, 200) \implies d(x, B) = 100.$$

Como qualquer ponto deve estar entre os limites do ponto x que já calculamos, basta ver o máximo entre eles.

Logo, $d(A, B) = \max \{ d(x, B) : x \in A \} = 100$.

E para calcular $d(B, A)$? O processo será análogo, somente considerando sentido inverso para o cálculo das distâncias. Calculando as distâncias de cada ponto $y \in B$ ao conjunto A , tem-se

$$y = (300, 200) \implies d(y, A) = 50.$$

$$y = (300, 250) \implies d(y, A) = 50.$$

$$y = (400, 200) \implies d(y, A) = 150.$$

$$y = (400, 250) \implies d(y, A) = 150.$$

Logo, $d(B, A) = \max \{ d(y, A) : y \in B \} = 150$.

Observação: Essa definição de distância entre conjuntos não pode ser uma métrica, pois nem sempre $d(A, B) = d(B, A)$, como no exemplo anterior, onde $d(A, B) \neq d(B, A)$.

Dessa forma, a distância de Hausdorff será definida como a maior entre as distâncias $d(A, B)$ e $d(B, A)$.

Considerando a notação $x \vee y$ para representar o máximo entre dois números reais x e y , temos a seguinte definição formal:

Definição 25 Seja (X, d) um espaço métrico completo. Definimos a distância de Hausdorff entre dois pontos $A, B \in \mathcal{H}(X)$ como

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A).$$

Proposição 26 A aplicação h é uma métrica no espaço $\mathcal{H}(X)$.

Prova.

Sejam $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$. De fato,

i) Para todo $A \in \mathcal{H}(X)$,

$$h(A, A) = d(A, A) \vee d(A, A) = d(A, A) = \max \{ d(x, A) | x \in A \} = 0.$$

Para todo $A, B \in \mathcal{H}(X)$, $A \neq B$ então, $h(A, B) > 0$.

De fato, A e B são compactos e não vazios, então existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $d(A, B) = d(a, b)$. Como d é uma métrica em X , então $d(a, b) \geq 0$ e portanto $h(A, B) \geq 0$. Se $A \neq B$, então existe $a \in A$ tal que $a \notin B$, donde $d(A, B) > 0$, já que A e B são fechados. Consequentemente, $h(A, B) > 0$.

ii) É imediato concluir que a função h é simétrica.

iii) Para mostrarmos que $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$ primeiro mostremos que $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

Para algum $a \in A$

$$\begin{aligned} d(a, B) &= \min \{ d(a, b) | b \in B \} \\ &\leq \min \{ d(a, c) + d(c, b) | b \in B \}, \forall c \in C \\ &= d(a, c) + \min \{ d(c, b) | b \in B \}, \forall c \in C. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} d(a, B) &\leq \min \{ d(a, c) | c \in C \} + \max \{ \min \{ d(c, b) | b \in B \} | c \in C \} \\ &= d(a, C) + d(C, B). \end{aligned}$$

Logo, $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.

Analogamente, $d(B, A) \leq d(B, C) + d(C, A)$. Portanto,

$$\begin{aligned} h(A, B) &= d(A, B) \vee d(B, A) \\ &\leq d(B, C) \vee d(C, B) + d(A, C) \vee d(C, A) \\ &= h(B, C) + h(C, A). \end{aligned}$$

Logo, h é uma métrica no espaço $\mathcal{H}(X)$. □

Definição 27 Seja $S \subset X$ e $\Gamma \geq 0$. Então,

$$S + \Gamma = \{ y \in X : d(x, y) \leq \Gamma \text{ para algum } x \in S \}.$$

O conjunto $S + \Gamma$ é chamado de dilatação de S pela bola de raio Γ .

Lema 28 Sejam $A, B \in \mathcal{H}(X)$, onde (X, d) é um espaço métrico. Considere $\varepsilon > 0$, então

$$h(A, B) \leq \varepsilon \iff A \subset B + \varepsilon \text{ e } B \subset A + \varepsilon.$$

Prova.

Inicialmente, mostremos que $h(A, B) \leq \varepsilon \iff A \subset B + \varepsilon$. Por hipótese, $h(A, B) \leq \varepsilon \implies h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A) \leq \varepsilon$.

Se $d(A, B) \leq \varepsilon \implies d(x, B) \leq \varepsilon$ para todo $x \in A$. Em particular, $d(x, y) \leq \varepsilon$ para algum $y \in B$. Logo, $x \in B + \varepsilon$ e consequentemente, $A \subset B + \varepsilon$. Analogamente para $d(B, A) \leq \varepsilon$, teremos $B \subset A + \varepsilon$.

Seja $x \in A$. Sabemos que $d(A, B) = \max \{ d(x, B) | x \in A \}$, e como $A \subset B + \varepsilon$ temos que para algum $y \in B$, $d(x, y) \leq \varepsilon$. Tomando $\varepsilon_i > 0$ como sendo $\min \{ d(x_i, y) : y \in B \}$, temos:

$$d(x_i, B) \leq \varepsilon_i.$$

Como isso vale para todo $x_i \in A$, segue que

$$d(A, B) \leq \varepsilon_A, \quad \text{com } \varepsilon_A = \max \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \}.$$

Analogamente, temos

$$d(B, A) \leq \varepsilon_B, \quad \text{com } \varepsilon_B = \max \{ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \}.$$

Tomando $\varepsilon = \max \{ \varepsilon_A, \varepsilon_B \}$,

$$d(A, B) \leq \varepsilon \text{ e } d(B, A) \leq \varepsilon.$$

Logo, $h(A, B) \leq \varepsilon$.

Analogamente, teremos $h(A, B) \leq \varepsilon \iff B \subset A + \varepsilon$, completando a demonstração. □

Seja (A_n) uma sequência de Cauchy de conjuntos em $(\mathcal{H}(X), h)$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe N , tal que $n, m \geq N$ implica $A_m \subset A_n + \varepsilon$ e $A_n \subset A_m + \varepsilon$, isto é, $h(A_n, A_m) \leq \varepsilon$.

Estamos interessados nas sequências de Cauchy (x_n) em X , com a propriedade de $x_n \in A_n$ para cada n . Precisaremos do lema a seguir que nos permitirá estender tal subsequência para sua subsequência de Cauchy (x_{n_j}) , com $x_{n_j} \in A_{n_j}$ para cada j .

Lema 29 (da Extensão) Seja (X, d) um espaço métrico. Considere (A_n) uma sequência de Cauchy de pontos em $(\mathcal{H}(X), h)$. Seja (n_j) uma sequência infinita crescente de inteiros positivos. Suponha que tenhamos uma sequência de Cauchy (x_{n_j}) , com $x_{n_j} \in A_{n_j}$ em X . Então, existe uma sequência de Cauchy (\tilde{x}_n) com $\tilde{x}_n \in A_n$ tal que $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$ para todo $j = 1, 2, 3, \dots$

Prova.

Primeiro, iremos construir a sequência (\tilde{x}_n) com $\tilde{x}_n \in A_n$.

Para cada $n \in \{1, 2, 3, \dots, n_1\}$ escolhamos $\tilde{x}_n \in \{x \in A_n | d(x, x_{n_1}) = d(x_{n_1}, A_n)\}$. Isto é, \tilde{x}_n é o ponto mais próximo de x_{n_1} em A_n e tal existência pode ser garantida pela compacidade de A_n . De modo similar, para cada $j \in \{2, 3, \dots\}$ e $n \in \{n_j, n_j + 1, \dots, n_{j+1}\}$ escolhamos $\tilde{x}_n \in \{x \in A_n | d(x, x_{n_j}) = d(x_{n_j}, A_n)\}$.

Agora, basta mostrar que (\tilde{x}_n) possui as propriedades desejadas, ou seja, uma extensão de (x_{n_j}) para (A_n) .

Pela construção anterior, podemos afirmar que $\tilde{x}_n = x_{n_j}$ e $N_2 \in A_n$. Para mostrarmos que essa é uma sequência de Cauchy, tome um $\varepsilon > 0$, como (x_{n_j}) é uma sequência de Cauchy, por hipótese, existem N_1 e N_2 tais que

$$\begin{aligned} n_k, n_j \geq N_1 &\Rightarrow d(x_{n_k}, x_{n_j}) \leq \frac{\varepsilon}{3} \\ m, n \geq N_2 &\Rightarrow d(A_m, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Seja $N = \max \{N_1, N_2\}$ e note que para $m, n \geq N$,

$$d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leq d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) + d(x_{n_j}, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, \tilde{x}_n),$$

onde $m \in \{n_{j-1}, n_{j-1} + 1, n_{j-1} + 2, \dots, n_j\}$ e $n \in \{n_{k-1}, n_{k-1} + 1, n_{k-1} + 2, \dots, n_k\}$.

Como $h(A_m, A_{n_j}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, existe $y \in A_m \cap ((x_{n_j}) + \frac{\varepsilon}{3})$ tal que $d(\tilde{x}_m, x_{n_j}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

De modo semelhante, $d(x_{n_k}, \tilde{x}_n) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Logo, $d(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) \leq \varepsilon$ para todo $m, n > N$. Portanto, (\tilde{x}_n) é uma sequência de Cauchy. \square

Teorema 30 (Completeness do espaço dos fractais) Seja (X, d) um espaço métrico completo. Então, $(\mathcal{H}(X), h)$ é um espaço métrico completo. Além disso, se (A_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}(X)$, então

$$A = \lim A_n \in \mathcal{H}(X)$$

que podemos descrever como:

$$A = \{x \in X | \text{existe uma sequência de Cauchy } (x_n), \text{ que converge para } x\}.$$

Prova.

Seja (A_n) uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}(X)$ e considere A definido como descreve o teorema. Iremos separar a prova nas seguintes partes:

- (a) $A \neq \emptyset$;
- (b) A é fechado e, portanto, completo já que X é completo;
- (c) para $\varepsilon > 0$ existe N tal que, para $n \geq N$ então $A \subset A_n + \varepsilon$;
- (d) A é totalmente limitado e, portanto, por (b) é compacto;
- (e) $\lim A_n = A$.

Prova (a). Para mostrar que $A \neq \emptyset$ iremos provar que existe uma sequência de Cauchy (a_i) , com $a_i \in A_i$, em X . Para isso, consideremos a sequência de inteiros positivos $N_1 < N_2 < N_3 < \dots < N_n < \dots$ tal que

$$h(A_m, A_n) < \frac{1}{2^i}, \quad \text{para } m, n > N_i.$$

Escolha $x_{N_1} \in A_{N_1}$. Logo, como $h(A_{N_1}, A_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$, podemos encontrar um $x_{N_2} \in A_{N_2}$ tal que $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{1}{2}$. Como, $h(A_{N_k}, A_{N_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$, $x_{N_k} \in A_{N_k}$, podemos encontrar um $x_{N_{k+1}} \in A_{N_{k+1}}$ tal que $d(x_{N_k}, x_{N_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$.

Seguindo o mesmo raciocínio, conseguimos encontrar uma sequência (x_{N_i}) , com $x_{N_i} \in A_{N_i}$ tal que $d(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}) \leq \frac{1}{2^i}$.

Para mostrarmos que (x_{N_i}) é uma sequência de Cauchy em X , basta tomarmos $\varepsilon > 0$ e N_ε tal que $\sum_{i=N_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon$. Então, para $m > n > N_\varepsilon$ temos:

$$\begin{aligned} d(x_{N_m}, x_{N_n}) &\leq d(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}) + d(x_{N_{m+1}}, x_{N_{m+2}}) + \dots + d(x_{N_{n-1}}, x_{N_n}) \\ &< \sum_{i=N_\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 29, existe uma subsequência convergente a_i , com $a_i \in A_i$ para a qual $a_{N_i} = x_{N_i}$. Então, $\lim a_i$ existe e pela definição está em A . Logo, $A \neq \emptyset$.

Prova (b). Para mostrar que A é fechado, suponha que a sequência (a_i) de A convirja para um ponto a . Nós iremos mostrar que $a \in A$, e consequentemente, A é fechado.

Para cada inteiro positivo i , existe uma sequência $(x_{i,n})$ de A tal que $\lim x_{i,n} = a_i$. Existe uma sequência crescente de inteiros positivos (N_i) tal que $d(a_{N_i}, a) < \frac{1}{i}$. Além disso, existe uma subsequência de inteiros (m_i) tal que $d(x_{N_i, m_i}, a_i) \leq \frac{1}{i}$. Logo, $d(x_{N_i, m_i}, a) \leq \frac{2}{i}$.

Se considerarmos $y_{m_i} = x_{N_i, m_i}$ temos que $y_{m_i} \in A_{m_i}$ e $\lim y_{m_i} = a$. Pelo Lema 29, (y_{m_i}) pode ser estendido à uma sequência convergente (z_i) de A_i , e assim, $a \in A$. Logo, temos que A é fechado.

Prova (c). Seja $\varepsilon > 0$. Existe N tal que para $m, n \geq N$, então $h(A_m, A_n) \leq \varepsilon$. Agora, seja $n \geq N$. Assim, para $m \geq n$ temos que $A_m \subset A_n + \varepsilon$.

Precisamos mostrar que $A \subset A_n + \varepsilon$. Para isso, considere $a \in A$. Existe uma sequência (a_i) de A_i que converge para a . Tomemos N grande o bastante para que $m \geq N$, $d(a_m, a) < \varepsilon$.

Então, $a_m \in A_n + \varepsilon$, já que $A_m \subset A_n + \varepsilon$. Como A_n é compacto, podemos afirmar que $A_n + \varepsilon$ é fechado. Portanto, como $a_m \in A_n + \varepsilon$ para todo $m \geq N$, a deve estar em $A_n + \varepsilon$ também. Logo, $A \subset A_n + \varepsilon$.

Prova (d). Suponhamos que A não seja totalmente limitado. Assim, podemos encontrar uma sequência (x_i) em A tal que $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$, para $i \neq j$. Mostraremos que isso nos trará uma contradição.

Pelo item (c), existe um n suficientemente grande garantindo que $A \subset A_n + \frac{\varepsilon}{3}$. Para cada x_i , existe um $y_i \in A$ correspondente, para o qual $d(x_i, y_i) \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Como A_n é compacto, sabemos que alguma subsequência de (y_{n_i}) de (y_n) converge. Então, podemos encontrar pontos suficientemente próximos nessa sequência (y_{n_i}) . Em particular, y_{n_i} e y_{n_j} , tais que $d(y_{n_i}, y_{n_j}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Porém,

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq d(x_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, x_{n_j}) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

e assim, temos uma contradição para o modo que (x_{n_i}) foi escolhida. Logo, A é totalmente limitado e pelo item (b), é compacto.

Prova (e). Do item (d), temos que $A \in \mathcal{H}(X)$. Além disso, usando o item (c) e o Lema 28 para completar a prova que $\lim A_i = A$, basta mostrarmos que para $\varepsilon > 0$, existe um N tal que $n \geq N \Rightarrow A_n \subset A + \varepsilon$.

Para isso, consideremos $\varepsilon > 0$ e encontremos um N tal que $m, n \geq N, h(A_m, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Então, para $m, n \geq N, A_m \subset A_n + \frac{\varepsilon}{2}$.

Seja $n \geq N$, mostraremos que $A_n \subset A + \varepsilon$, uma vez que no item (c) vimos que $A \subset A_n + \varepsilon$. Seja $y \in A_n$. Então, existe uma sequência crescente (N_i) de inteiros, tal que $n < N_1 < N_2 < N_3 < \dots < N_k < \dots$ e para $m, k \geq N_j, A_m \subset A_k + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$.

Note que $A_n \subset A_{N_1} + \frac{\varepsilon}{2}$. Como, $y \in A_n$, existe um $x_{N_1} \in A_{N_1}$ tal que $d(y, x_{N_1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Como $x_{N_1} \in A_{N_1}$, existe um ponto $x_{N_2} \in A_{N_2}$ tal que $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{\varepsilon}{2^2}$. Repetindo o procedimento, encontraremos uma sequência de pontos tal que $x_{N_j} \in A_{N_j}$ e $d(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}) < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$. Usando a desigualdade triangular sucessivas vezes, conseguimos mostrar que

$$d(y, x_{N_j}) \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } j.$$

E também, (x_{N_j}) é uma sequência de Cauchy que converge para um ponto x que está em A . Além disso, $d(y, x_{N_j}) \leq \varepsilon$ implica em $d(y, x) \leq \varepsilon$. Portanto, mostramos que $A_n \subset A + \varepsilon$ para $n \geq N$.

Além disso, temos pelo item (b) que A é compacto, o que completa nossa prova que $\lim A_n = A$. E consequentemente, que $(\mathcal{H}(X), h)$ é um espaço métrico completo. \square

Pelo teorema anterior, podemos concluir que vale o Teorema do ponto fixo de Banach no espaço dos fractais $\mathcal{H}(X)$ com a métrica de Hausdorff h .

4.2 Contrações no espaço de Hausdorff

Antes de falarmos mais sobre fractais precisamos, primeiramente, falar das funções de contração no espaço de Hausdorff.

Proposição 31 *Seja $w : X \rightarrow X$ uma contração em um espaço métrico (X, d) , com fator de contração s . Então, $w : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$, definida por*

$$w(B) = \{w(x) | x \in B\}, \quad \forall B \in \mathcal{H}(X)$$

é uma contração sobre $(\mathcal{H}(X), h)$, com fator de contração s .

Prova.

Pela Proposição 3 temos que w é contínua e aplica $\mathcal{H}(X)$ nele próprio.

Sejam $B, C \in \mathcal{H}(X)$. Então

$$\begin{aligned} d(w(B), w(C)) &= \max \{ \min \{ d(w(x), w(y)) | y \in C \} | x \in B \} \\ &\leq \max \{ \min \{ s d(x, y) | y \in C \} | x \in B \} = s d(B, C). \end{aligned}$$

Analogamente, $d(w(C), w(B)) \leq s d(C, B)$. Portanto,

$$\begin{aligned} h(w(B), w(C)) &= \max \{ d(w(B), w(C)), d(w(C), w(B)) \} \\ &\leq \max \{ s d(B, C), s d(C, B) \} \\ &\leq s \max \{ d(B, C), d(C, B) \} \\ &\leq s h(B, C). \end{aligned}$$

□

Proposição 32 *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Então, para $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$, temos*

$$d(A, B \cup C) = \min\{d(A, B), d(A, C)\}.$$

Proposição 33 *Para todo $B, C, D, E \in \mathcal{H}(X)$, temos*

$$h(B \cup C, D \cup E) \leq \max\{h(B, D), h(C, E)\}$$

onde h é a métrica de Hausdorff.

Prova.

Para essa demonstração usaremos o Lema 28.

Primeiramente, mostraremos que $d(B \cup C, D \cup E) \leq \max\{d(B, D), d(C, E)\}$. De fato,

$$\begin{aligned} d(B \cup C, D \cup E) &= \max\{d(x, D \cup E) | x \in B \cup C\} \\ &= \max\{\max\{d(x, D \cup E) | x \in B\}, \max\{d(x, D \cup E) | x \in C\}\} \\ &= \max\{d(B, D \cup E), d(C, D \cup E)\} \\ &= \max\{\min\{d(B, D), d(B, E)\}, \min\{d(C, D), d(C, E)\}\} \\ &\leq \max\{d(B, D), d(C, E)\}. \end{aligned}$$

De modo análogo teremos

$$d(D \cup E, B \cup C) \leq \max\{d(D, B), d(E, C)\}.$$

Por fim,

$$\begin{aligned} h(B \cup C, D \cup E) &= \max\{d(B \cup C, D \cup E), d(D \cup E, B \cup C)\} \\ &\leq \max\{\max\{d(B, D), d(C, E)\}, \max\{d(D, B), d(E, C)\}\} \\ &\leq \max\{\max\{d(B, D), d(D, B)\}, \max\{d(C, E), d(E, C)\}\} \\ &\leq \max\{h(B, D), h(C, E)\}. \end{aligned}$$

□

Proposição 34 *Seja X um espaço métrico completo. Seja $\{w_n | n = 1, 2, \dots, N\}$, contrações sobre $(\mathcal{H}(X), h)$, sendo o fator de contração de w_n , denotado por s_n para cada n . Defina $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ por*

$$W(B) = w_1(B) \cup w_2(B) \cup \dots \cup w_N(B) = \bigcup_{n=1}^N w_n(B).$$

Então, W é uma contração com fator de contração $s = \max\{s_n | n = 1, 2, \dots, N\}$.

Prova.

Vamos demonstrar para $N = 2$ e por argumento indutivo completamos a demonstração.

Sejam $B, C \in \mathcal{H}(X)$. Temos

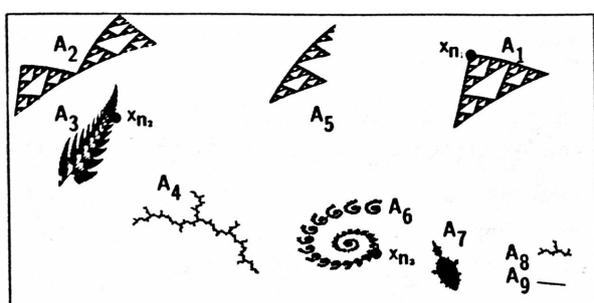
$$\begin{aligned} h(W(B), W(C)) &= h(w_1(B) \cup w_2(B), w_1(C) \cup w_2(C)) \\ &\leq \max\{h(w_1(B), w_1(C)), h(w_2(B), w_2(C))\} \\ &\leq \max\{s_1 \cdot h(B, C), s_2 \cdot h(B, C)\} \\ &\leq s \cdot h(B, C). \end{aligned}$$

□

5 O que é um fractal?

O termo fractal foi criado por Benoit B. Mandelbrot por volta de 1975. Do ponto de vista informal, fractais são estruturas que apresentam irregularidades e fragmentação em uma faixa de escala muito ampla, aparentemente infinita como, por exemplo, as encontradas nas nuvens, nas fumaças, nas montanhas, nas árvores e em diversos outros objetos da natureza.

Então o que é um fractal? Inicialmente, é apenas um subconjunto de um espaço. Esse espaço possui uma estrutura do conjunto definido, onde cada ponto está próximo um do outro. Vamos dar alguns exemplos a seguir para que a ideia fique mais clara. Em síntese, um fractal é uma forma cujas partes são réplicas do todo sob algum aspecto.



(a) a



(b) b

Figura 3: Na figura (a) cada $A_i, i = 1, \dots, 9$ é um exemplo de fractal. Na figura (b) temos um exemplo de fractal. Fonte [10].

Definição 35 Considere o espaço X como um conjunto. Os pontos desse espaço são os elementos desse conjunto.

Exemplo 36 Considerando $X = \mathbb{R}$, onde cada "ponto" $x \in X$ é um número real, temos um exemplo mais simples de fractal.

Exemplo 37 Seja $X = \varphi[0, 1]$, o conjunto de funções contínuas que leva o intervalo fechado $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$ à reta real \mathbb{R} . Um "ponto" $f \in X$ é dado pela função $f : [0, 1] \xrightarrow{cte} \mathbb{R}$, onde f pode ser representado como o gráfico a seguir indica.

Note que $f \in X$ não é um ponto no eixo x , e sim toda a função. Uma função contínua em um intervalo é caracterizada pelo seu gráfico ininterrupto.

Exemplo 38 O plano complexo, $X = \mathbb{C}$, no qual qualquer ponto $x \in X$ é dado por

$$x = x_1 + ix_2 \quad \text{onde } i = \sqrt{-1},$$

para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. É claro que \mathbb{C} é essencialmente como o \mathbb{R}^2 , porém existe uma distinção implícita. No espaço \mathbb{C} podemos multiplicar dois pontos x, y e obter um novo ponto em \mathbb{C} . Assim, definimos:

$$x \cdot y = (x_1 + ix_2)(y_1 + iy_2) = (x_1y_1 - x_2y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

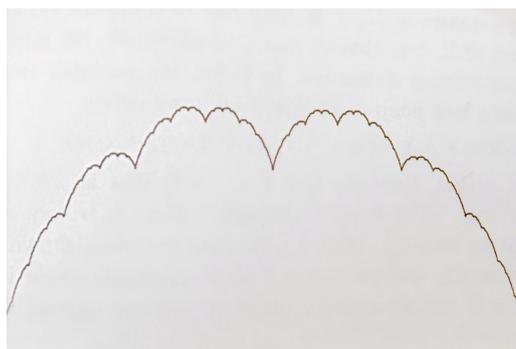


Figura 4: Ponto f no espaço de funções contínuas no intervalo $[0,1]$. Fonte [10].

Exemplo 39 Seja C a notação para representar o Conjunto de Cantor. Esse subconjunto do espaço métrico $[0, 1]$ é obtido por exclusão sucessiva de subintervalos abertos do terço médio, como mostra a figura a seguir, isto é,

$$\begin{aligned} I &= [0, 1] \\ C_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \\ C_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right], \\ &\vdots \end{aligned}$$

De modo que,

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq \dots$$

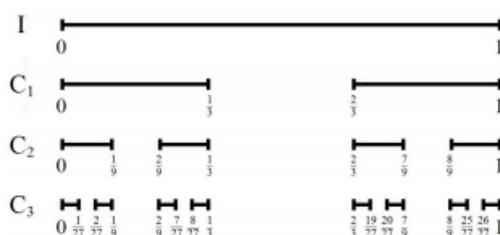


Figura 5: Construção do Conjunto de Cantor

Note que a geometria fractal se preocupa com a descrição, classificação, análise e observação de subconjuntos dos espaços métricos (X, d) .

5.1 Classificação dos Fractais

Os fractais podem ser classificados em três categorias principais. Estas categorias podem ser determinadas pelo modo como o fractal é formado ou gerado, como mostraremos a seguir.

Sistema de funções iteradas (IFS). Os fractais determinísticos, conhecidos como fractais geométricos, são subconjuntos gerados por transformações geométricas simples do próprio objeto nele mesmo, possuem uma regra fixa de substituição geométrica, aplicada a cada iteração como por

exemplo, a curva de Peano, o floco de neve de Koch e a esponja de Menger, que mostraremos mais adiante.

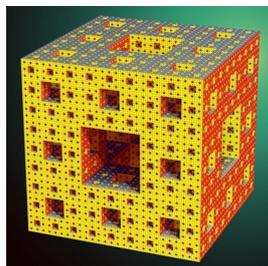


Figura 6: Esponja de Menger.

Fractais gerados por computadores. Também são chamados de fractais de fuga. São gráficos de funções matemáticas que definem conjuntos que costumam operar com números imaginários e números complexos, que é o caso do fractal de Mandelbrot, e que portanto são estudados dentro da área de dinâmica complexa (ou de sistemas dinâmicos), onde os pontos representados são os pontos que não escaparam para o infinito ou que permaneceram limitados após um número pré-estabelecido de iterações. São utilizados computadores, porque estas iterações envolvendo números complexos são praticamente impossíveis de serem feitas à mão.

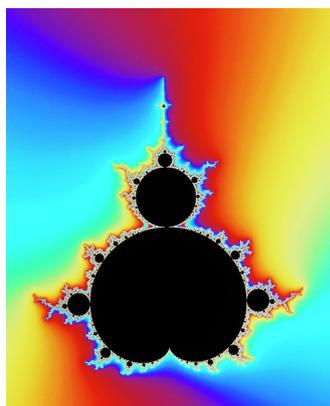


Figura 7: Conjunto de Mandelbrot.

Fractais aleatórios. São também chamados de fractais naturais, quando o todo é estatisticamente semelhante a uma ampliação de uma parte dizemos que o fractal é aleatório.

O interesse do nosso trabalho é o estudo dos Fractais IFS, que apresentaremos a seguir.

6 Sistemas de Funções Iteradas (IFS)

Definição 40 Seja $f : X \rightarrow X$ uma transformação em X . Chamamos de **iteração** sobre f , transformações da forma $f^n : X \rightarrow X$ definidas por:

$$f^0(x) = 1, f^1(x) = f(x), f^2(x) = f \circ f(x), \dots, f^n(x) = \overbrace{f \circ \dots \circ f}^{n \text{ vezes}}(x)$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

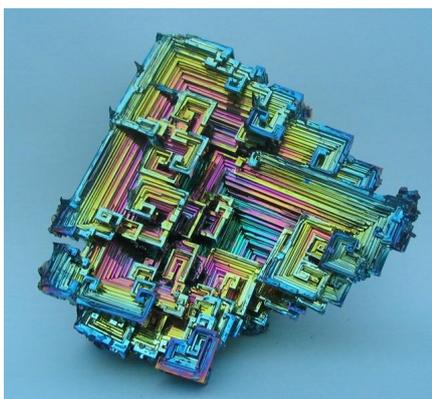


Figura 8: Cristal de Bismuto.

Exemplo 41 Considere a função $f(x) = \sqrt{x}$, para $x \geq 0$.

Tomando o valor inicial $x_0 = 81$ teremos

$$f^2(81) = f(f(81)) = 3.$$

Continuando essa iteração teremos sucessivamente

$$f^3(81) = 1,732050\dots, f^4(81) = 1,316074\dots, f^5(81) = 1,147202\dots, f^6(81) = 1,071075\dots,\dots$$

valores que se aproximam cada vez mais de 1, o qual será um ponto fixo dessa função.

Veremos que isso não é uma coincidência, pois é um caso particular do teorema seguinte que garante a existência e unicidade de cada fractal obtido através de iteração de funções. Como poderemos perceber, é o Teorema 20 voltado para iterações.

Teorema 42 Seja $f : X \rightarrow X$ uma contração sobre um espaço métrico completo (X, d) . Então f possui um único ponto fixo $x_f \in X$ e mais ainda, para algum ponto $x \in X$, a sequência $\{f^n(x); n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$ converge para x_f . Isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f, \text{ para cada } x \in X.$$

Prova.

Seja $x \in X$ e $0 \leq s < 1$ um fator de contração para f . Então,

$$d(f^n(x), f^m(x)) = s^{\min\{n,m\}} d(x, f^{|n-m|}(x)) \quad (1)$$

para todo $m, n = 0, 1, 2, \dots$, com $x \in X$ fixo. Para $k = 0, 1, 2, \dots$, temos

$$\begin{aligned} d(x, f^k(x)) &\leq d(x, f(x)) + d(f(x), f^2(x)) + \dots + d(f^{k-1}(x), f^k(x)) \\ &\leq (1 + s + s^2 + \dots + s^{k-1})d(x, f(x)) \\ &\leq (1 - s)^{-1}d(x, f(x)), \end{aligned}$$

substituindo na equação (1), temos

$$d(f^n(x), f^m(x)) \leq s^{\min\{n,m\}} (1 - s)^{-1} d(x, f(x)),$$

portanto $(f^n(x))$ é uma sequência de Cauchy. Como X é completo esta sequência de Cauchy possui um limite $x_f \in X$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_f.$$

Agora, mostraremos que x_f é ponto fixo de f . Sabemos que f é uma contração e consequentemente contínua, então

$$f(x_f) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n+1}(x) = x_f.$$

Supondo que exista mais de um ponto fixo de f , sendo eles x_f e y_f , temos

$$x_f = f(x_f), y_f = f(y_f) \text{ e } d(x_f, y_f) = d(f(x_f), f(y_f)) \leq sd(x_f, y_f),$$

onde $(1 - s)d(x_f, y_f) \leq 0$, logo $d(x_f, y_f) = 0$.

Portanto, $x_f = y_f$, isto é, x_f é único ponto fixo de f . □

Um **sistema de funções iteradas (IFS)** é uma estrutura da forma $\{X; f_1, f_2, f_3, \dots, f_N\}$, onde X é um espaço métrico completo e cada $f_i : X \rightarrow X$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$, são contrações em X .

O teorema a seguir garante a existência e unicidade do que chamaremos de atrator de um IFS.

Teorema 43 *Seja $\{X; f_1, f_2, f_3, \dots, f_N\}$ um IFS, define-se*

$$F : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$$
$$K \mapsto F(K) := \bigcup_{i=1}^N f_i(K);$$

então existe um único $A \in \mathcal{H}(X)$, tal que $F(A) = A = \bigcup_{i=1}^N f_i(A)$.

Além disso, para qualquer $K \in (\mathcal{H}(X), h)$, tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(K) = A.$$

Chamamos A de atrator de um IFS.

Prova.

Primeiramente, note que F está bem definida e além disso é uma contração em $\mathcal{H}(X)$, pois é uma união de contrações que são funções contínuas aplicadas em um espaço compacto K .

Por outro lado, sendo X um espaço métrico completo, temos que $\mathcal{H}(X)$ também é completo, como vimos no Teorema 30. Assim, podemos aplicar o Teorema 42 à função

$$F : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X),$$

para concluir que existe um único $A \in \mathcal{H}(X)$, tal que

$$\bigcup_{i=1}^N f_i(A) = F(A) = A. \tag{2}$$

Usando a segunda parte do Teorema 42, garantimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(K) = A,$$

para qualquer $K \in (\mathcal{H}(X), h)$.

Analisando a expressão (2) e recordando que cada f_i é uma contração, de modo que cada $f_i(A)$ pode ser interpretada como uma cópia de A , então pela igualdade (2), podemos dizer que o conjunto A também é a união de um número finito de cópias reduzidas de si mesmo. \square

Exemplo 44 Considere o IFS $\{\mathbb{R}; f_1, f_2\}$, onde

$$f_1(x) = \frac{1}{3}x, \quad f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Nesse caso, $F : \mathcal{H}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R})$ está bem definida por

$$F(K) := f_1(K) \cup f_2(K), \quad \forall K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}).$$

Como conjunto inicial, tomemos o conjunto $C_0 = [0, 1]$. Então, fica claro que o atrator deste IFS é o conjunto de Cantor C e para provarmos isso, basta observar que $(C_n)_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ onde

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots \supseteq C_n \supseteq \dots$$

Como X é completo, (C_n) é uma sequência de Cauchy e usando o teorema anterior, para obtermos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = C.$$

Exemplo 45 Consideremos um IFS $\{\mathbb{R}^2; \frac{1}{2}z; \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\}$. Neste caso, $F : \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ é definida por

$$F(K) := f_1(K) \cup f_2(K) \cup f_3(K), \quad \forall K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2),$$

sendo $f_1(z) = \frac{1}{2}z$, $f_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$ e $f_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}$.

Exemplo 46 Tomemos agora IFS $\{[0, 1]; \frac{2}{5}x\}$.

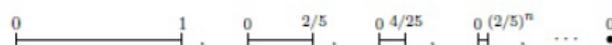


Figura 9: Construção do Atrator IFS $\{[0, 1]; \frac{2}{5}x\}$.

Podemos observar, pela figura anterior, que seu atrator é $A = \{0\}$. E de fato, pelo teorema anterior, basta provar que A é um ponto fixo da contração $F : \mathcal{H}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{H}([0, 1])$, definida por

$$F(K) = f_1(K), \quad \forall K \in \mathcal{H}([0, 1]), \quad f_1(x) = \frac{2}{5}x.$$

Tomemos

$$F(\{0\}) = f_1(\{0\}) = \{f_1(0)\} = \{0\}.$$

Com este exemplo podemos perceber que em qualquer IFS, temos somente uma contração.

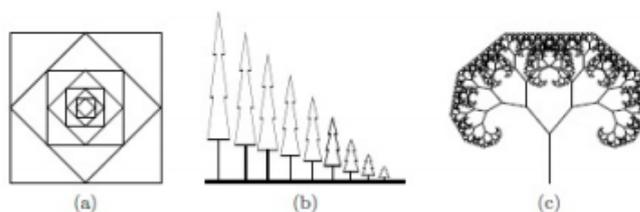


Figura 10: IFS com condensação. Fonte [10].

6.1 IFS com condensação

Para bom entendimento de um IFS com condensação, mostraremos uma ideia geométrica do que seria tal fractal. Observemos as figuras abaixo.

Intuitivamente sem usar uma lupa, dentro destas figuras observamos cópias reduzidas de si mesmo em qualquer parte do conjunto. Mas mesmo fazendo uso de uma, não seria possível afirmar que existem realmente cópias reduzidas. No entanto, é possível obter este tipo de figuras como atratores de algum sistemas de funções iteradas, que chamamos de IFS com condensação.

Definição 47 *Seja (X, d) um espaço métrico e $C \in \mathcal{H}(X)$. Definimos $w_0 : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ por $w_0(K) := C, \forall K \in \mathcal{H}(X)$. Dizemos então, que w_0 é uma **transformação de condensação**, e C é o conjunto de condensação associado.*

Observe que, w_0 é uma função constante $\mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$, portanto w_0 é uma contração, com fator de contração igual a zero, cujo ponto fixo é o conjunto de condensação C .

Agora, seja $\{X; w_1, w_2, \dots, w_N\}$ um IFS e $w_0 : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$, uma transformação de condensação. Então $\{X; w_0, w_1, w_2, \dots, w_N\}$ se chama IFS com condensação.

Exemplo 48 *Seja $\{\mathbb{R}^2; w_0, w_1, w_2\}$ onde*

$$w_0(K) := \{0\} \times [0, 1], \quad w_1(z) := \frac{1}{2}ze^{-i\frac{\pi}{4}} + i \quad e \quad w_2(z) := \frac{1}{2}ze^{i\frac{\pi}{4}} + i.$$

Note que a diferença entre um IFS e um IFS com condensação é a presença de uma contração diferente no segundo caso, enquanto em $w_0 : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$ o domínio e o contradomínio de w_0 é $\mathcal{H}(X)$, nas outras contrações o domínio e contradomínio é X . No entanto, o IFS com condensação pode trabalhar da mesma forma que os outros e gerar uma sequência convergente de compactos.

Agora, vejamos como ficariam tais conceitos para o IFS com condensação do exemplo acima:

Exemplo 49 *Para o IFS do Exemplo 48, temos $W : \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ dado por*

$$\begin{aligned} W(K) &:= w_0(K) \cup w_1(K) \cup w_2(K) \\ &= \{0\} \times [0, 1] \cup w_1(K) \cup w_2(K). \end{aligned}$$

Tomemos como conjunto inicial o mesmo conjunto de condensação: $K = \{0\} \times [0, 1]$. A sequência $K, W(K), W^2(K), W^3(K), \dots, W^n(K), \dots$ seria, aproximadamente, a seguinte

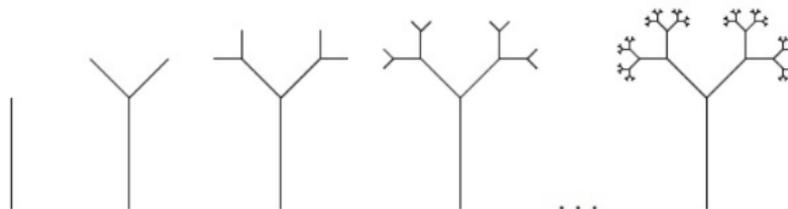


Figura 11: Construção de uma árvore fractal. Fonte [10].

Teorema 50 *Seja $\{X; w_0, w_1, w_2, \dots, w_n\}$ um IFS com condensação. Então, uma transformação $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$, definida por*

$$W(K) := \bigcup_{i=0}^N w_i(K), \quad \forall K \in \mathcal{H}(X)$$

tem um único ponto fixo, isto é, existe um único $A \in \mathcal{H}(X)$ tal que

$$W(A) = A = \bigcup_{i=0}^N w_i(A).$$

Além disso, para qualquer $K \in \mathcal{H}(X)$ tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W^n(K) = A.$$

O conjunto A é chamado atrator do IFS com condensação.

A demonstração do teorema anterior segue o mesmo raciocínio da demonstração do Teorema 43.

Uma forma, dentre várias outras, de se definir fractais é através de um IFS, como podemos ver a seguir.

Definição 51 *Dados um IFS $\{X; w_n, n = 1, 2, 3, \dots, N\}$, com fator de contração s , e W uma contração em $\mathcal{H}(X)$. Define-se **fractal**, o ponto fixo $A \in \mathcal{H}(X)$ da função de contração W , ou seja, após infinitas iterações de uma função resulta-se um fractal.*

Exemplo 52 (Curva de Peano) A Curva de Peano, apresentada em 1890, é um exemplo de um fractal que preenche o plano. Uma curva que preenche o plano passa por todos os pontos de uma determinada área, acabando por, gradualmente, a ocupá-la totalmente.

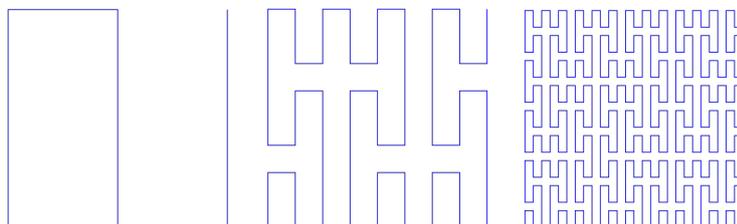


Figura 12: Construção da Curva de Peano

O ponto de partida para a construção de tal curva é começar com um segmento. Na primeira iteração o segmento é substituído por 9 segmentos de comprimento igual a um terço do comprimento do segmento inicial. Esses 9 segmentos constituem a primeira iteração da construção recursiva da curva de Peano. Depois, o processo recursivo aplica-se a cada um dos 9 segmentos, até o infinito.

Exemplo 53 (Curva de Koch) A Curva de Koch é uma curva geométrica e um dos primeiros fractais a serem descritos. Aparece pela primeira vez em [11]. O conhecido Floco de Neve de Koch corresponde à mesma curva, sendo que sua construção se inicia a partir de um triângulo equilátero.

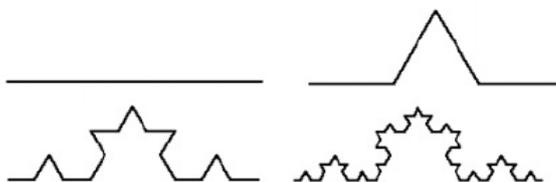


Figura 13: Construção da Curva de Koch

Para construirmos este fractal podemos construí-lo a partir de um segmento de reta submetido a alterações recorrentes, isto é, a iterações, como descritas a seguir:

1. Divide-se o segmento de reta em três segmentos de igual comprimento.
2. desenha-se um triângulo equilátero, em que o segmento central, referido no primeiro passo, servirá de base.
3. Apaga-se o segmento que serviu de base ao triângulo do segundo passo. Procedendo da mesma forma para cada um dos quatro segmentos que ficam, formam-se dezesseis novos segmentos menores.

Exemplo 54 (Esponja de Menger) A Esponja de Menger é construída a partir de um cubo através do seguinte processo recursivo:

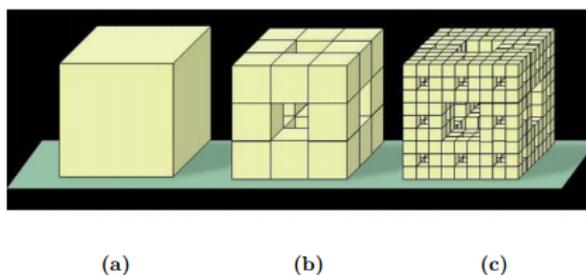


Figura 14: Construção da Esponja de Menger até o nível 2.

1. Tome um cubo qualquer (Figura 14(a)).
2. Divida cada face do cubo em 9 quadrados. Desse modo o cubo inicial fica subdividido em 27 cubos menores.
3. Remova o cubo localizado no meio de cada face e o cubo central, deixando apenas 20 cubos restantes (Figura 14(b)). Este é o primeiro nível da Esponja de Menger.
4. Repita os passos 2 e 3 para cada um dos 20 pequenos cubos restantes do nível anterior. Assim, obtemos o segundo nível da Esponja (Figura 14(c)). Note que, neste nível, estamos dividindo cada um dos 20 cubos do nível anterior em outros 20 cubos menores, obtendo no final 202 cubos.
5. A Esponja de Menger é o limite deste processo depois de um número infinito de iterações.

7 Considerações Finais

De acordo com [4], a geometria euclidiana se preocupa em criar nossa percepção espacial intuitiva de modo mais objetivo. Dessa forma, a geometria clássica apresenta uma primeira aproximação à estrutura física de objetos. Já a geometria fractal é uma extensão dessa geometria clássica e pode ser usada para criar modelos precisos de estruturas físicas como samambaias, cristais de gelo e até mesmo galáxias.

Já imaginou conseguir descrever uma nuvem com a precisão que um arquiteto consegue descrever uma casa? Pois bem, a geometria fractal te oferece essa habilidade, uma vez que a compreenda. É uma nova forma de linguagem.

Além disso, suas aplicações principais residem na computação gráfica, compressão de imagens, reconhecimento de padrões, estudo do comportamento de fenômenos físicos e meteorológicos (como o atrator de Lorenz), teoria espectral de operadores, em sistemas de numeração, dentre muitas outras. A geometria fractal surge exatamente nesse ponto, no qual a geometria tradicional não é capaz de representar todas as formas do mundo real. Dessa forma, a geometria fractal, além de descrever com precisão fenômenos da natureza, pode constituir uma representação geométrica de conceitos abstratos de diversas áreas da Matemática.

Referências

- [1] OLIVEIRA, G. C. **Geometria fractal na educação básica**. 2014. 74 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização em Matemática) - Universidade Federal de Minas Gerais, [Belo Horizonte], 2014.



- [2] MARTINS, L. A. **Espaços métricos e os fractais IFS**. 2019. 70 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019.
- [3] DOMINGUES, H. H. **Espaços métricos e introdução à topologia**. São Paulo: EDUSP, 1982.
- [4] ENDO, D. H. C. **Espaços métricos: uma introdução**. 2015. 47 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015.
- [5] LIMA, E. L. **Espaços métricos**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. (Projeto Euclides).
- [6] BARROS, C. D. V. **O teorema do ponto fixo de Banach e algumas aplicações**. 2013. 46 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.
- [7] CASTELLI, M. **Teoremas de ponto fixo**. 2016. 72 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2016.
- [8] CORPO paralelo (PB) e os espaços de Hausdorff. Disponível em: <http://www.ic.uff.br/~aconci/DistanciaHausdorff.pdf>. Acesso em: 23 maio 2019
- [9] MANDELBROT, B. B. **The fractal geometry of nature**. New York: W. H. Freeman and Company, 1977.
- [10] BARNESLEY, M. F. **Fractals everywhere**. 2nd ed. Boston: Academic Press, 2000.
- [11] KOCH, H. V. Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes. **Acta Math.** v. 30, p. 145-174, 1906. Disponível em: <https://projecteuclid.org/euclid.acta/1485887154>. Acesso em: 23 maio 2019.