



Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 19, dez. 2020

Jorge Corrêa de Araújo

Faculdade de Formação de Professores- Universidade do Estado do Rio de Janeiro
jcaraujo_55@yahoo.com.br

Rosa García Márquez

Faculdade de Formação de Professores- Universidade do Estado do Rio de Janeiro
rosagmarquez@yahoo.com.br

Distribuição de temperatura em cilindros circulares infinitos: aproximações de soluções para pequenos intervalos de tempo

Temperature distribution in infinite circular cylinders: approximations of solutions for small times

Resumo

Nesse trabalho, um problema de condução de calor transiente em um cilindro infinito, com geração de energia interna em regime uniforme, e condição de Dirichlet na superfície, foi analisado com o método da transformada de Laplace. Modelos de representações para os casos especiais dessas soluções restritas a pequenos intervalos de tempo foram estabelecidas por meio de aproximações assintóticas das funções de Bessel que fazem parte dessas soluções. Em particular, uma expressão suficientemente geral para a aproximação de soluções para esse tipo de problema de condução de calor pode ser estabelecida. Também foram obtidas aproximações assintóticas para as temperaturas no eixo do cilindro nos casos examinados considerando um intervalo restrito de tempo. Os resultados mostram que os perfis de temperaturas aproximadas são realísticos do ponto de vista físico de cada problema analisado usando pequenos intervalos de tempo.

Palavras-chave: Funções de Bessel. Funções de Bessel modificadas. Transformada de Laplace. Separação de variáveis. Cilindro infinito.

Abstract

In this work, a transient heat conduction problem in a infinite cylinder with uniform energy generation and Dirichlet condition, was analyzed with the Laplace transform method. Representation models for these especial cases were obtained using asymptotic approximations of the Bessel functions that are part of these solutions. In particular, a enough general expression for approaching solutions to this type of heat conduction problem can be established. Asymptotic approximations for temperatures on the cylinder axis were also obtained involvind small times in the examined cases. The results obtained show realistic approximation temperatures from the physic point of view of each case examined adopting small times.

Keywords: Bessel functions. Modified Bessel functions. Laplace transform. Separation of variables. Infinite circular cylinder.

1 Introdução

A distribuição de temperaturas em regime transiente de condução de calor em cilindros tem diversas aplicações em engenharia. Por exemplo, segundo Oliveira (2004, p.2) soluções analíticas ou numéricas de equação de difusão-convecção de calor em reatores de leito fixo reportados na literatura são equipamentos cilíndricos com seção transversal circular. Portanto, podem ser abordados como problemas bidimensionais. Também em reatores nucleares são utilizadas barras cilíndricas de um elemento combustível como o urânio ou o tório, onde ocorre a geração de calor, sendo por isso, importante conhecer a temperatura em uma seção transversal desse elemento.

Recentemente, Araújo e Márquez (2019, p. 1547-1559) utilizaram um modelo 1-D de equação de difusão na geometria cilíndrica para uma análise de concentração de carbono em placas finas ou membranas. Também na Biologia, de acordo com Ribeiro (2012, p. 194) a influência térmica na dinâmica de membranas altera a estrutura delas, podendo vir a comprometer as atividades enzimáticas associadas aos processos de transporte. Sabe-se que uma análise 1-D, ou mesmo 2-D é apenas uma possibilidade de retratar um problema 3-D, pois o movimento 2-D de fluido não existe no mundo físico real (MEYER, 1999, p.15). Entretanto, Fox, Pritchard, e McDonald (2015, p. 25) afirmam que muitos problemas em engenharia, uma análise unidimensional é adequada para fornecer soluções aproximadas e com boa precisão. Nesse sentido, os

cilindros circulares infinitos, isto é, cilindros longos, $\frac{L}{r_0} \geq 10$ e finos, com r_0 pequeno, são adequados a uma análise 1-D por terem simetria radial, $\partial_r T(0, t) = 0$, ou seja, segundo Zill, Wright e Cullen (2011, p. 548) tais problemas independem das variáveis θ e z . Um estudo nessa geometria em uma região finita da variável radial deve ter condições de fronteira especificadas, e no caso de simetria, elas devem ser as mesmas (CINELLI, 1965, p. 539).

Apesar da importância aplicada de problemas de condução de calor nessa geometria, são poucos os autores que descrevem essas aplicações com detalhes, entre eles, podemos citar Hahn e Ozisik (2012, p. 156-157) e Carslaw e Jaeger (2011, p. 188-213, 327-346) onde são apresentadas diversas aplicações de condução de calor nessa geometria, mas em geral, a maior parte é resolvida de modo conciso ou somente tendo suas soluções reportadas, dificultando a compreensão de passagens matemáticas importantes.

Em particular, pouca atenção é dispensada ao estudo no sentido de se obter soluções aproximadas para pequenos intervalos de tempo em problemas de condução de calor transiente em regiões finitas, como barras, cilindros ou esferas. Essa necessidade decorre do fato de que as soluções de problemas de condução de calor são em forma de séries, denominadas Fourier-Bessel, as quais convergem rapidamente para tempos grandes e muito lentamente para pequenos intervalos de tempo (HAHN; OZISIK, 2012, p. 382). Além disso, as soluções assim obtidas podem produzir resultados não adequados para esses tempos (CARSLAW; JAEGER, 2011, p.330).

Essas dificuldades também são encontradas em barras e esferas, mas as alternativas de soluções em problemas cilíndricos são mais complicadas (CARSLAW; JAEGER, 2011, p.330).



Entretanto, na prática isso pode ser importante dependendo do problema a ser analisado. Por exemplo, em uma reação nuclear controlada em usinas termoeletricas de geração de calor, é fundamental conhecer a temperatura de um elemento combustível em todo o instante de tempo, sob o perigo de uma fusão do núcleo do reator, ou seja, incluindo os tempos pequenos. Também em ensaios não destrutivos, é de interesse “a priori”, conhecer a taxa máxima de geração de energia de modo que em uma pequena faixa restrita de tempo, o sistema possa suportar o aumento de temperatura gerado pela fonte de calor e a condição de fronteira estabelecida.

Carslaw e Jaeger (2011, p.330-331) usaram a expansão assintótica de uma função de Bessel envolvida na solução de um particular problema de condução de calor em geometria cilíndrica unidimensional, sem geração de calor, e com temperatura inicial zero, bem como, a temperatura na superfície mantida em zero. Usando essa metodologia, foi aqui analisado um caso mais geral de condução de calor nessa geometria com geração de calor uniforme em um cilindro infinito formado por um material homogêneo, isotrópico de aço-carbono com temperatura inicial constante, e de Dirichlet na superfície. Modelos de aproximação para pequenos intervalos de tempo, inclusive no eixo do cilindro, foram obtidos para três casos especiais usando aproximações assintóticas das funções de Bessel envolvidas em cada solução. Os resultados mostram que esses modelos fornecem temperaturas realistas do ponto de vista físico de cada caso analisado, em oposição às temperaturas inadequadas usando as soluções analíticas encontradas.

2 Materiais e métodos

Nesta seção é apresentada a equação do calor em regime transiente 1-D, a equação de Bessel modificada, o método de separação de variáveis e o método da transformada de Laplace.

2.1 A equação de condução de calor

A equação de calor em regime transiente de temperatura em um sistema 1-D em coordenadas cilíndricas é dada por (HAHN; OZISIK, 2012, p. 98, 162)

$$\frac{\partial T^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}, 0 \leq r < a, t > 0, \quad (1)$$

ou, se houver geração de energia tem-se

$$\frac{\partial T^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{g(r,t)}{K} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}, 0 \leq r < a, t > 0, \quad (2)$$

onde $K \left(\frac{W}{m \cdot ^\circ C} \right)$ é a condutividade térmica do material onde se dá a condução de calor e

$\kappa \left(\frac{m^2}{s} \right)$ a difusividade térmica, isto é, esse parâmetro está relacionado a uma propriedade termo

física do meio, ou seja, com a velocidade de propagação de calor para o interior de um sólido durante as mudanças de temperaturas (HAHN; OZISIK, 2012, p. 11)

2.2. A equação de Bessel modificada

A equação de Bessel modificada é segundo Hahn e Ozisik (2012, p. 55) dada por

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \left(\eta^2 + \frac{\nu^2}{r^2} \right) R = 0, \quad (3)$$

cuja solução pode ser expressa na forma

$$R(r) = c_1 I_\nu(\eta r) + c_2 K_\nu(\eta r), \quad (4)$$

onde $I_\nu(\eta r)$ e $K_\nu(\eta r)$ são respectivamente as funções de Bessel modificadas de primeira e segunda espécie de ordem ν .

2.3. Método de separação de variáveis

Um método padrão para obter uma solução para a eq. (1) é assumir que as variáveis são separáveis, isto é,

$$T(r, t) = G(r) H(t), \quad (5)$$

onde G e H são só funções de r e t respectivamente. A substituição da eq. (5) na eq. (1) resulta em duas equações diferenciais ordinárias independentes na forma [7]

$$\frac{1}{G} \left(\frac{d^2 G}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG}{dr} \right) = \frac{1}{\kappa H} \frac{dH}{dt} = -\lambda^2, \quad (6)$$

ou, seja

$$\frac{1}{\kappa H} \frac{dH}{dt} = -\lambda^2, \quad (7)$$

$$\frac{d^2 G}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG}{dr} + \lambda^2 G = 0. \quad (8)$$

A Eq (7) pode ser resolvida diretamente por separação de variáveis para obter,

$$H(t) = c_1 e^{-\kappa \lambda^2 t}, \quad (9)$$

enquanto a equação diferencial ordinária (EDO) na variável r é uma equação de Bessel de ordem $\nu = 0$, cuja solução geral é dada pela Eq (10) na forma (HAHN; OZISIK, 2012, p. 48, ZILL; WRIGHT; CULLEN, 2011, p. 262)

$$G(r) = c_2 J_0(\lambda r) + c_3 Y_0(\lambda r), \quad (10)$$

onde as constantes poderão ser eliminadas por meio de condições iniciais adequadas. Portanto, uma solução geral da Eq (1) é dada pelo produto das soluções individuais dadas pelas eqs. (9) e (10), isto é,

$$T(r, t) = c_1 e^{-\kappa \lambda^2 t} [c_2 J_0(\lambda r) + c_3 Y_0(\lambda r)], \quad (11)$$

ou omitindo as constantes,

$$T(r, t) = e^{-\kappa \lambda^2 t} G_0(r, \lambda). \quad (12)$$

Como para cada $\lambda_n > 0$, podemos associar uma autofunção $G_v(r, \lambda_n)$ e desde que a eq. (1) é linear, a solução mais geral da eq. (1) será obtida pela soma de todos os produtos das eqs. (9) e (10)

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\kappa \lambda_n^2 t} G_0(r, \lambda_n). \quad (13)$$

2.4. Método da Transformada de Laplace

Se a função $F(t)$ é definida para todos os valores positivos na variável t , uma nova função $\bar{F}(p)$ é obtida no parâmetro p , isto é,

$$L\{F(t)\} = \bar{F}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} F(t) dt. \quad (14)$$

Essa nova função é chamada de transformada de Laplace (CHURCHILL, 1972, p.3) e pode ser aplicada na Eq (1) para obter uma equação diferencial ordinária subsidiária. De fato, da linearidade da transformada de Laplace tem-se

$$L\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}\right\} \Leftrightarrow L\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right\} + L\left\{\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r}\right\} - L\left\{\frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}\right\} = 0, \quad (15)$$

ou

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{T}}{dr} - q^2 \bar{T} = 0, \quad (16)$$

onde $q = \sqrt{\frac{p}{\kappa}}$ e se a condição inicial é $T(r, 0) = 0$ tem-se $L\left\{\frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}\right\} = \frac{p}{\kappa} \bar{T}$. Uma vez obtida a solução $\bar{T} = \bar{T}(r, p)$ na variável r com o parâmetro p , pode ser aplicado à transformada inversa de Laplace (CHURCHILL, 1972, p.14) para obter a solução do problema original, isto é,

$$L^{-1}\{\bar{T}(r, p)\} = T(r, p). \quad (17)$$

A transformada inversa de Laplace é definida pela integral complexa segundo Debnath e Bhatta (2015, p. 173) por

$$L^{-1}\{\bar{f}(p)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} \bar{f}(p) dp, \quad (18)$$

onde o caminho de integração é uma linha reta L no plano complexo p com equação $p = c + iR, -\infty < R < \infty, \text{Re}(p) = c$, sendo c é escolhido de modo que todas as singularidades do integrando da Eq (14) estejam à esquerda da reta L . Esse caminho de integração é chamado caminho de Bromwich (DEBNATH; BHATTA, 2015, p. 173) e será aqui assumido nesse artigo.

3 Resultados e discussões

Nesta seção é apresentado um caso de importância prática sobre a distribuição transiente de temperatura, com geração de calor em um cilindro circular, longo e fino. Os parâmetros dependentes do tempo foram multiplicados por sessenta, para obtenção de respostas de tempo em minutos.

A Fig.1 mostra um longo cilindro circular de aço-carbono, homogêneo isotrópico, $0 \leq r < a$, com produção de calor uniforme a uma taxa constante $g_0 \left(\frac{W}{m^3} \right)$. O material está inicialmente a uma temperatura V_0 , enquanto na superfície $r = a$, a temperatura é mantida constante e igual a V .

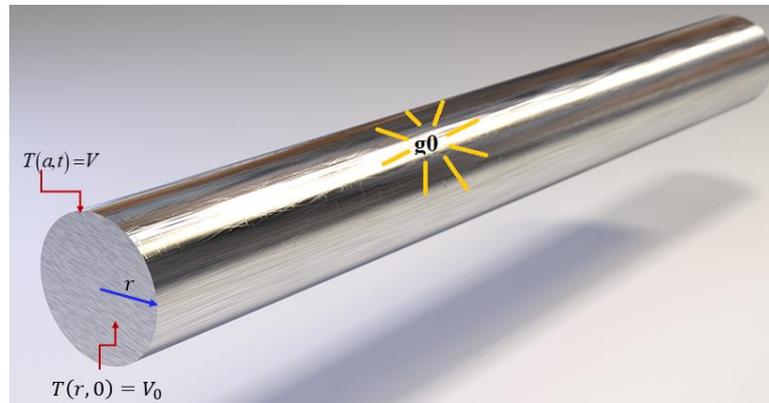


Figura 1. Cilindro longo e fino com geração de energia interna.

A formulação matemática desse problema é dada pela Eq (2) na forma

$$\frac{\partial T^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{g_o}{K} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 \leq r < a, t > 0 \quad (19)$$

$$CF1: T(a, t) = V, \quad t > 0,$$

$$CF2: \lim_{r \rightarrow 0} T(r, t) < \infty, \quad (20)$$

$$CI: T(r, 0) = V_0, \quad 0 < r < a.$$

Aqui CF indica a condição de fronteira, enquanto CI a condição inicial. Essa notação será usando ao longo do texto.

Vamos considerar a CI como $V_0 = 0$. Fazendo a translação $\varphi = T - V$, pode-se obter condições de fronteira homogêneas. Substituindo φ nas Eqs (19) e (20) tem-se a equação diferencial parcial (EDP) auxiliar dada por

$$\frac{\partial \varphi^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad 0 \leq r < a, t > 0, \quad (21)$$

$$CF1: \varphi(a, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$CF2: \lim_{r \rightarrow 0} \varphi(r, t) < \infty, \quad (22)$$

$$CI: \varphi(r, 0) = -V, \quad 0 < r < a.$$

Aplicando a transformada de Laplace, $L\{\varphi(r, t)\} = \bar{\varphi}(r, p) = \bar{\varphi}$, na Eq (21) e na condição CF1, e usando a CI, tem-se um problema de valor inicial dado por uma equação diferencial ordinária linear (EDO) de segunda ordem na variável r não homogênea na forma

$$\frac{d^2\bar{\varphi}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{\varphi}}{dr} - q^2\bar{\varphi} = \frac{V}{\kappa} - \frac{g_0}{Kp}, \quad 0 < r < a, \quad (23)$$

$$CF1: \quad \bar{\varphi}(a, p) = 0, \quad (24)$$

$$CF2: \quad \lim_{r \rightarrow 0} \bar{\varphi}(r, p) < \infty,$$

onde $q^2 = \frac{p}{\kappa}$.

A Eq (23) pode ser resolvida por superposição de soluções, isto é,

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_H + \bar{\varphi}_{part}, \quad (25)$$

onde $\bar{\varphi}_H$ é a solução do problema homogêneo sujeito as condições dadas e $\bar{\varphi}_{part}$ uma solução particular da equação não homogênea. A solução particular pode ser obtida fazendo $\bar{\varphi}_{part} = \beta$ para obter

$$\bar{\varphi}_{part} = \frac{\kappa}{K} \frac{g_0}{p^2} - \frac{V}{p}. \quad (26)$$

Das Eqs (23), (24) e (26) resulta o problema homogêneo dado pela EDO

$$\frac{d^2\bar{\varphi}_H}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{\varphi}_H}{dr} - q^2\bar{\varphi}_H = 0, \quad 0 < r < a, \quad (27)$$

$$CF1: \quad \bar{\varphi}_H(a, t) = -\bar{\varphi}_{part} = \frac{V}{p} - \frac{\kappa}{K} \frac{g_0}{p^2}, \quad t > 0, \quad (28)$$

$$CF2: \quad \lim_{r \rightarrow 0} \bar{\varphi}_H(r, t) < \infty.$$

A Eq (27) é uma equação de Bessel modificada de ordem $\nu = 0$ e da condição CF2 dada pela Eq (28), a função de Bessel modificada de segunda espécie $K_0(qr)$, tem que ser excluída da solução, pois $K_0(qr \rightarrow 0) \rightarrow \infty$. Portanto, a solução geral é dada pela Eq (4) na forma

$$\bar{\varphi}_H = c_1 I_0(qr). \quad (29)$$

Da Eq (29) e de CF1 dado pela Eq (28) obtemos

$$\bar{\varphi}_H = \left\{ \frac{V}{\kappa} - \frac{g_0}{Kp} \right\} \frac{I_0(qr)}{I_0(qa)}. \quad (30)$$

Das Eqs (25), (26) e (27) tem-se a solução da Eq (23) sujeito as condições dadas, isto é

$$\bar{\varphi} = \left\{ \frac{\kappa g_0}{K p^2} - \frac{\kappa g_0}{K p^2} \frac{I_0(qr)}{I_0(qa)} \right\} - \frac{V}{p} + \frac{V}{p} \frac{I_0(qr)}{I_0(qa)}. \quad (31)$$

Usando as Eqs (8) e (5) nessa ordem de Carslaw e Jaeger (2011, p. 328), com a omissão da constante que aparece na Eq (8) original, tem-se as transformadas inversa de Laplace dos seguintes termos da Eq (31)

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{\lambda^2} \frac{I_0(\mu r)}{I_0(\mu a)} \right\} = t - \frac{a^2 - r^2}{4\kappa} + \frac{2}{a\kappa} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa \alpha_n^2 t} \frac{J_0(r \alpha_n)}{\alpha_n^3 J_1(a \alpha_n)}, \quad (32)$$

e

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{\lambda} \frac{I_0(\mu r)}{I_0(\mu a)} \right\} = 1 - \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa \alpha_n^2 t} \frac{J_0(r \alpha_n)}{\alpha_n J_1(a \alpha_n)}. \quad (33)$$

Aqui $\mu = \sqrt{\frac{\lambda}{\kappa}} \equiv q$ na notação original do autor. Usando a tabela A.2 (CHURCHILL, 1972, p. 459) temos que

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{\lambda^2} \right\} = t \quad e \quad L^{-1} \left\{ \frac{1}{\lambda} \right\} = 1. \quad (34)$$

Lembrando que $p = \lambda$ tem-se das Eqs (31, 32-34), e da translação $\varphi = T - V$, a solução do problema dado pelas Eqs (19, 20) com a *C.I* sendo $V_0 = 0$ na forma

$$T = V + \frac{g_0}{4K} (a^2 - r^2) - \frac{2g_0}{aK} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa \alpha_n^2 t} \frac{J_0(r \alpha_n)}{\alpha_n^3 J_1(a \alpha_n)} - \frac{2V}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa \alpha_n^2 t} \frac{J_0(r \alpha_n)}{\alpha_n J_1(a \alpha_n)}, \quad (35)$$

onde os $\alpha_n, n = 1, 2, \dots$ são as raízes reais simples da equação transcendental $J_0(r \alpha) = 0$.

Em particular, se a condição CF1 dada pela Eq (20) for substituída por $T(r = a, t) = V = 0$, obtemos diretamente da Eq (35) fazendo $V = 0$, a Eq (24) reportada por Carslaw e Jaeger (2011, p. 330) para esse caso. A solução da Eq (20) com as condições dadas pela Eq (19) pode ser obtida diretamente da Eq (35) por meio da translação $T - V_0$ na forma

$$T = V + \frac{g_0}{4K} (a^2 - r^2) - \frac{2g_0}{aK} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa \alpha_n^2 t} \frac{J_0(r \alpha_n)}{\alpha_n^3 J_1(a \alpha_n)} - \frac{2(V - V_0)}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa \alpha_n^2 t} \frac{J_0(r \alpha_n)}{\alpha_n J_1(a \alpha_n)}. \quad (36)$$

A solução desse problema usando separação de variáveis também foi obtida pelos autores desse artigo com vistas à validação indireta da Eq (36), sendo a mesma dada por

$$T = \frac{g_0}{4K} (a^2 - r^2) + V + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{r=0}^a r \left(V_0 - V - \frac{g_0}{4K} (a^2 - r^2) \right) J_0(r \alpha_n) dr \right\} \frac{J_0(r \alpha_n) e^{-\kappa \alpha_n^2 t}}{a^2 J_1^2(a \alpha_n)}. \quad (37)$$

Ou seja, as Eqs (36) e (37) resolvem o problema dado pelas Eqs (19), (20) com $T(r, 0) = V_0$.

Consideremos o cilindro da Fig.1 com as seguintes especificações: $a = 0.05 \text{ m}$, $K = 64.3 \text{ (W / m}^2\text{)}$, $\kappa = 18.8 \times 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$ e com taxa de geração de calor uniforme a razão de $g_0 = 3.8 \times 10^9 \text{ W / m}^3$. Além disso, $T(r, 0) = V_0 = 30^\circ \text{ C}$ e $T(a, t) = V = 35^\circ \text{ C}$.

Aqui todos os parâmetros de tempo e temperatura foram convertidos respectivamente para minutos e graus Celsius. A Fig. 2 mostra o perfil de algumas temperaturas no cilindro circular infinito usando a Eq (36) ou a Eq (37), a partir do tempo $t > t_{\text{máx}} = 1.974 \text{ min}$. Esse tempo foi obtido por meio da equação $T(a, t) = 0$, pois em $r = a$ as séries envolvidas na solução convergem muito lentamente (HAHN; OZISIK, 2012, p.382) ou mesmo, podem não convergir uniformemente para esse ponto, quando são envolvidos pequenos valores de tempo. Desse

modo, a equação $T(a, t) = 0$ nos dá uma estimativa para o tempo máximo tal que, a partir dele, a solução converge rapidamente.

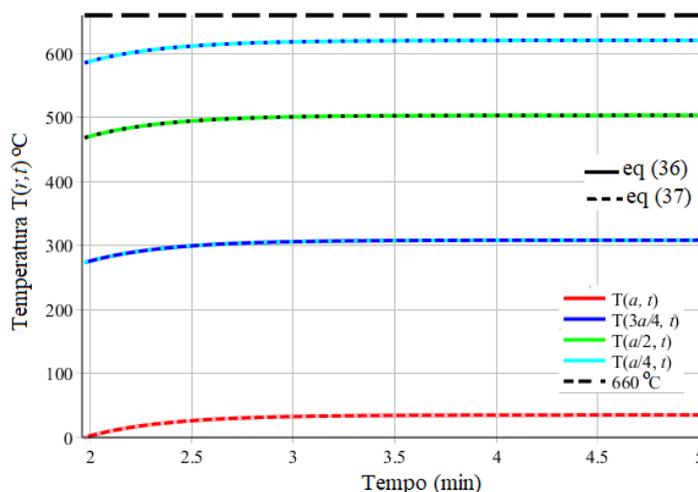


Figura 2. Perfis de temperaturas no interior do cilindro após o tempo $t > t_{\max} = 1.974$ min

As soluções de problemas de condução de calor transiente, como as Eqs (35), (36) e (37), estão em forma de séries que convergem rapidamente para tempos elevados (Fig 2), mas que segundo Hahn e Ozisik (2012, p. 382) convergem lentamente para pequenos intervalos de tempo notadamente próximo às fronteiras, e por isso, não são adequadas para a computação numérica. Também Carslaw e Jaeger (2011, p. 200, 330) detectaram esse problema para tempos t inferiores a $\frac{\kappa t}{a^2} < 0.02$, principalmente em geometria cilíndrica. Entretanto, às vezes, soluções adequadas para pequenos intervalos de tempo podem ser encontradas. Um dos procedimentos é segundo Carslaw e Jaeger (2011, p. 330, 331) obter expansões assintóticas das funções de Bessel envolvidas nas soluções, como é o caso da Eq (31). Essas expansões envolvem formas exponenciais $e^{-q(a-r)}$ cujos coeficientes são séries em $\frac{1}{q}$.

Vamos usar essa metodologia para obter soluções aproximadas para reduzidas faixas de tempo com as Eqs (35) e (36). Consideremos as equações obtidas da Eq (31) na forma

$$\bar{\varphi}_2 = \frac{\kappa}{K} \frac{g_0}{p^2} \frac{I_0(qr)}{I_0(qa)} \text{ e } \bar{\varphi}_4 = \frac{V}{p} \frac{I_0(qr)}{I_0(qa)}, \quad (38)$$

Observe que ambas têm a fração $\frac{I_0(qr)}{I_0(qa)}$ formada pela função de Bessel modificada de primeira espécie. Para grandes valores de z , tem-se da Eq (12) de Carslaw e Jaeger (2011, p. 489) que essa função pode ser aproximada por

$$I_0(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left\{ 1 + \frac{1}{8z} + \frac{1}{128z^2} + O(z^3) \right\} + \dots \quad (39)$$

Da Eq (39) podemos escrever

$$\frac{I_0(qr)}{I_0(qa)} = \frac{I_0(qr)}{I_0(qa)} = \frac{\sqrt{2\pi qa}}{\sqrt{2\pi qr}} \left\{ \frac{1 + \frac{1}{8qr} + \frac{1}{128(qr)^2} + \dots}{1 + \frac{1}{8qa} + \frac{1}{128(qa)^2} + \dots} \right\} e^{-q(a-r)}. \quad (40)$$

Das Eqs (38) e (40) tem-se

$$\bar{\varphi}_2 = \frac{\kappa}{K} g_0 \frac{a^2}{p^2 r^2} \left\{ 1 + \frac{a-r}{8qa} + \frac{9a^2 - 7r^2 - 2ar}{128(qa)^2} + \dots \right\} e^{-q(a-r)}, \quad (41)$$

e

$$\bar{\varphi}_4 = \frac{Va^2}{pr^2} \left\{ 1 + \frac{a-r}{8qa} + \frac{9a^2 - 7r^2 - 2ar}{128(qa)^2} + \dots \right\} e^{-q(a-r)}. \quad (42)$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa na Eq (41) e usando a Eq (11) de Carslaw e Jaeger (2011, p. 494) com $n=1, 3, 4$ obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & \frac{\kappa}{K} g_0 \frac{a^2}{r^2} \left\{ 4ti^2 \operatorname{erf}_c \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right) \right\} + \frac{\kappa^2}{8K} \frac{g_0(a-r)}{a^2 r^2} \left\{ (4t)^{\frac{3}{2}} i^3 \operatorname{erf}_c \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right) \right\} + \\ & + \frac{\kappa^2 g_0 (9a^2 - 7r^2 - 2ar)}{128(qa)^2} \left\{ (4t)^2 i^4 \operatorname{erf}_c \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right) \right\} + \dots \end{aligned} \quad (43)$$

e

$$\varphi_4 = \frac{Va^2}{pr^2} \operatorname{erf}_c \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right) + \frac{V(a-r)\sqrt{\kappa at}}{4ar^{\frac{3}{2}}} i \operatorname{erf}_c \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right) + \frac{V(9a^2 - 7r^2 - 2ar)}{32a^{\frac{3}{2}} r^{\frac{5}{2}}} i^2 \operatorname{erf}_c \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right) + \dots \quad (44)$$

onde $\operatorname{erf}_c(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$ é a função complementar da função erro de Gauss, sendo que sua definição e algumas de suas propriedades podem ser vistas com mais detalhes em Crank (2011, p. 375-376).

Portanto, da translação $\varphi = T - V$ e das Eqs (31), (34), (43) e (44) tem-se uma aproximação da Eq (35) para pequenos intervalos de tempo na forma

$$\begin{aligned} T \cong & \frac{\kappa}{K} g_0 t - \left[\frac{\kappa}{K} g_0 \frac{a^2}{r^2} \left\{ 4ti^2 \operatorname{erf}_c \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right) \right\} + \frac{\kappa^2}{8K} \frac{g_0(a-r)}{a^2 r^2} \left\{ (4t)^{\frac{3}{2}} i^3 \operatorname{erf}_c \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right) \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{g_0 \kappa^2 (9a^2 - 7r^2 - 2ar)}{128Ka^{\frac{3}{2}} r^{\frac{5}{2}}} \left\{ (4t)^2 i^4 \operatorname{erf}_c \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right) \right\} \right] + \\ & + \frac{Va^2}{r^2} \operatorname{erf}_c \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right) + \frac{V(a-r)\sqrt{\kappa at}}{4ar^{\frac{3}{2}}} i \operatorname{erf}_c \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right) + \frac{V(9a^2 - 7r^2 - 2ar)}{32a^{\frac{3}{2}} r^{\frac{5}{2}}} i^2 \operatorname{erf}_c \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right). \end{aligned} \quad (45)$$

Aqui é necessário observar que o lado direito da Eq (45) é a resposta aproximada que T deveria fornecer, caso a sua expressão analítica dada pela Eq (35) pudesse ser adequada a intervalos de tempos pequenos.

A Fig. 3 mostra dois perfis de temperaturas em reduzidas faixas de tempo, isto é, inferiores a $t_{\max} = 0.044$ min usando a Eq (45). A solução numérica com a Eq (35) foi obtida para efeito de comparação.

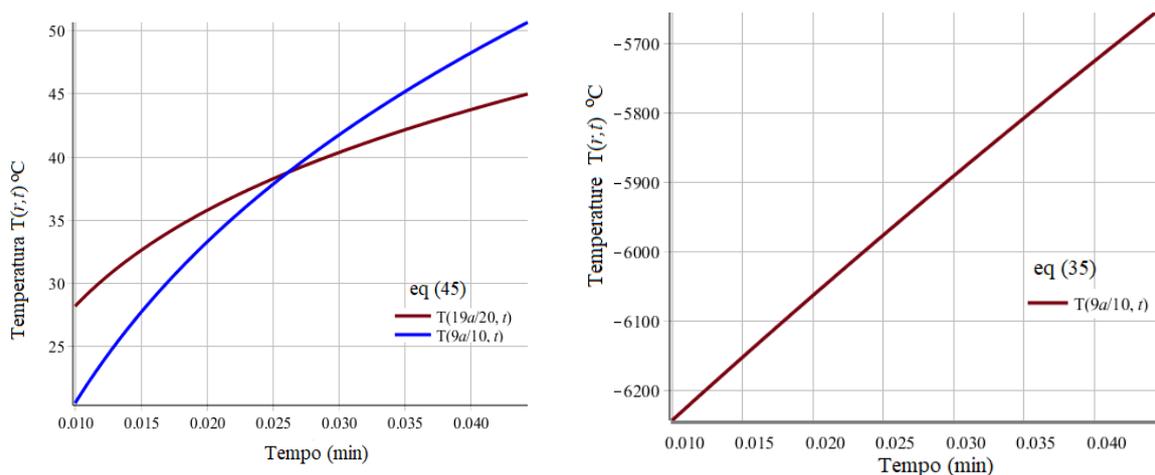


Figura 3. Perfis de temperaturas transiente no cilindro circular com $V_0 = 0$: (a) usando a Eq (45) e (b) usando a Eq (35).

Pode ser notado na Fig 3(a) que a temperatura começa em $V_0 = 0^\circ C$ para pontos pouco mais afastados da superfície, e vai subindo mais rapidamente em $r = a$, por conta da condição de Dirichlet, enquanto na Fig 3(b) a solução é perdida quando é usada a Eq (35).

Vamos examinar alguns casos especiais das Eqs (35) e (45) considerando $r \neq 0$.

Caso 1. Se o cilindro tem a condição CF1 dada pela Eq (20) como $T(r = a, t) = V = 0$, $t > 0$, então a Eq (35) fica na forma

$$T = \frac{g_0}{4K} (a^2 - r^2) - \frac{2g_0}{aK} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa \alpha_n^2 t} \frac{J_0(r \alpha_n)}{\alpha_n^3 J_1(a \alpha_n)}. \quad (46)$$

Essa solução é concordante com a Eq (24) obtida por Carslaw e Jaeger (2011, p.330) para esse problema particular. Aqui deve ser registrado que os referidos autores não utilizaram uma fórmula mais geral como fizemos nas Eqs (35) e (36) mas, sim apresentando somente a solução individual para esse problema em questão. Uma aproximação para a Eq (46) com tempo pequeno pode ser obtida diretamente da Eq (45) na forma

$$T \cong \frac{\kappa}{K} g_0 t - \left[\frac{\kappa}{K} g_0 \frac{a^2}{r^2} \left\{ 4t i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right) \right\} + \frac{\kappa^2}{8K} \frac{g_0 (a-r)}{a^2 r^2} \left\{ (4t)^{\frac{3}{2}} i^3 \operatorname{erfc} \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right) \right\} + \frac{\kappa^2 g_0 (9a^2 - 7r^2 - 2ar)}{128Ka^2 r^{\frac{5}{2}}} \left\{ (4t)^2 i^4 \operatorname{erfc} \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right) \right\} \right]. \quad (47)$$

A Fig. 4 mostra dois perfis de temperaturas próximas à superfície cilíndrica quando $V = V_0 = 0$, para pequenos intervalos de tempo com a Eq (47). A solução numérica obtida com a Eq (35) foi usada para comparação. A Fig 4 (a) mostra dois perfis de temperaturas próximos a superfície cilíndrica oriundas da contribuição isolada do termo fonte com uma maior variação de temperatura na região mais interna. Novamente os resultados indesejáveis com a aplicação da solução analítica para esse problema pode ser visto na Fig. 4(b).

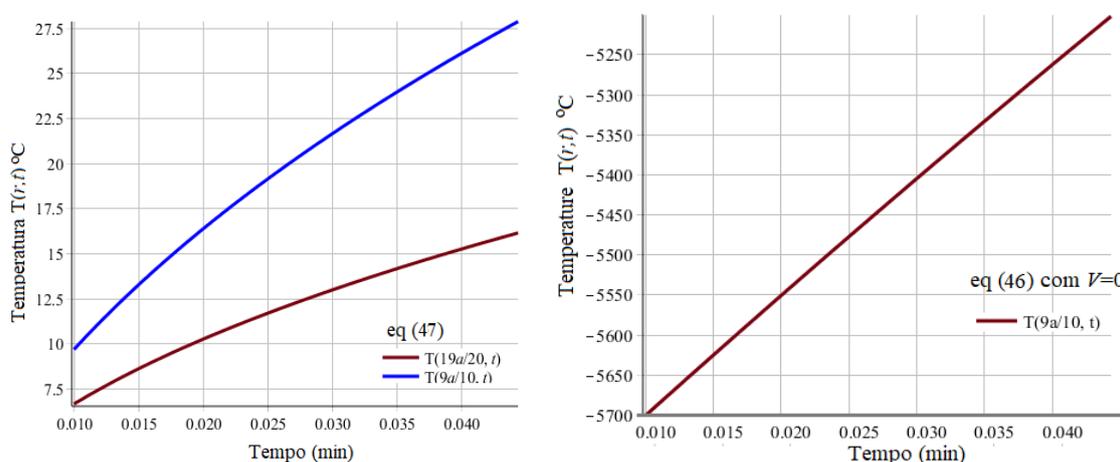


Figura 4. Perfis de temperaturas transiente no cilindro com, $V = V_0 = 0$: (a) usando a Eq (47) e (b) usando a Eq (46).

Caso 2. Se o cilindro tem a condição $g_0 = 0$ na Eq (20) então a Eq (35) fica na forma

$$T = V - \frac{2V}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\kappa\alpha_n^2 t} \frac{J_0(r\alpha_n)}{\alpha_n J_1(a\alpha_n)}. \quad (48)$$

Essa equação está em concordância com a Eq (7) de Carslaw e Jaeger (2011, p. 328) para esse problema em particular. Uma aproximação para a Eq (48) com tempo pequeno pode ser obtida diretamente da Eq (45) na forma

$$T \cong \frac{Va^{\frac{1}{2}}}{r^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right) + \frac{V(a-r)\sqrt{\kappa at}}{4ar^2} i \operatorname{erfc} \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right) + \frac{V(9a^2 - 7r^2 - 2ar)}{32a^2 r^{\frac{5}{2}}} i^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right). \quad (49)$$

Essa aproximação concorda com a Eq (3) de de Carslaw e Jaeger (2011, p. 331) para esse caso.

A Fig. 5 mostra dois perfis de temperaturas próximas à superfície cilíndrica quando $g_0 = 0$ e $V_0 = 0$, para pequenos intervalos de tempo com a Eq (49). O gráfico usando Eq (48) é gerado para efeito de comparação de resultados. Pode ser observado que a Fig 5 (a) mostra uma maior

variação de temperatura na superfície cilíndrica em decorrência da contribuição isolada da condição de Dirichlet. Novamente, a aplicação da solução analítica dada pela Eq (48) nessa faixa de tempo mostra-se inadequada.

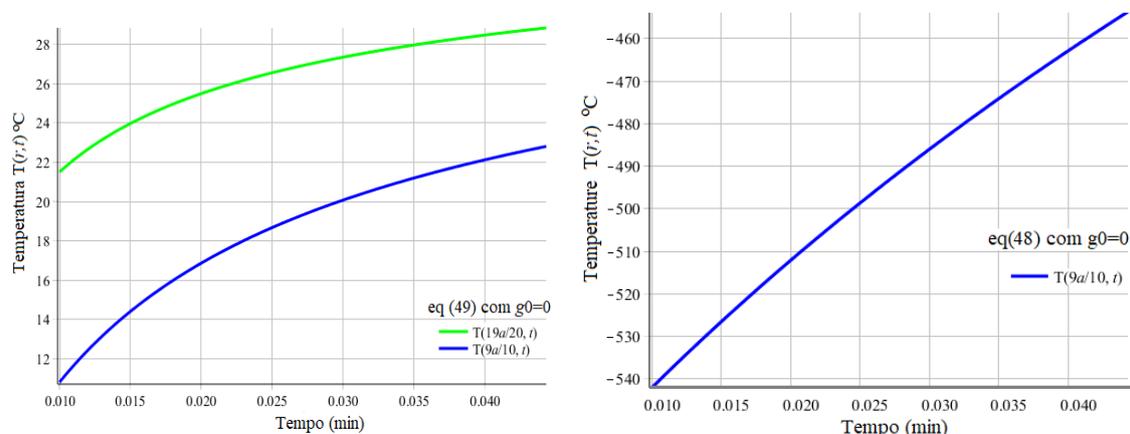


Figura 5. Perfil de temperaturas transientes no cilindro com, $g_0 \equiv 0$ e $V_0 = 0$: (a) usando a Eq (49) e (b) usando a Eq (48)

Caso 3. Aproximações para as Eqs (36, 37), considerando $r \neq 0$ com as condições, CF1 e C.I dadas pela Eq (20) podem ser colocadas na forma

$$\begin{aligned}
 T \cong \frac{\kappa}{K} g_0 t - & \left[\frac{\kappa}{K} g_0 \frac{a^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \left\{ 4ti^2 \operatorname{erf}_c \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right) \right\} + \frac{\kappa^{\frac{3}{2}} g_0 (a-r)}{8K a^{\frac{1}{2}} r^{\frac{3}{2}}} \left\{ (4t)^{\frac{3}{2}} i^3 \operatorname{erf}_c \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right) \right\} + \right. \\
 & \left. + \frac{\kappa^2 g_0 (9a^2 - 7r^2 - 2ar)}{128(qa)^2} \left\{ (4t)^2 i^4 \operatorname{erf}_c \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right) \right\} \right] + \\
 & + (V - V_0) \frac{a^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \operatorname{erf}_c \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right) + \frac{(V - V_0)(a-r)\sqrt{\kappa at}}{4ar^{\frac{3}{2}}} i \operatorname{erf}_c \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right) + \\
 & + \frac{(V - V_0)(9a^2 - 7r^2 - 2ar)}{32a^{\frac{3}{2}} r^{\frac{5}{2}}} i^2 \operatorname{erf}_c \left(\frac{a-r}{2\sqrt{kt}} \right). \quad (50)
 \end{aligned}$$

Essa equação pode ser obtida das Eqs (41) e (42) fazendo a translação $\varphi = T - (V - V_0)$.

A Fig. 6 mostra perfis de temperaturas para pequenos intervalos de tempo próximos a superfície cilíndrica para o problema de condução de calor representado pelas Eqs (19) e (20) com o uso da Eq (50) comparada com a solução numérica dada pela Eq (36) ou a Eq (37). Pode ser notado na Fig. 6 (a) as contribuições do termo fonte e da condição de Dirichlet em regiões mais próximas a superfície cilíndrica, enquanto na Fig 6 (b) podem ser vistos os resultados impraticáveis com a solução analítica dada pela Eq (37) para o problema em análise considerando pequenos intervalos de tempo.

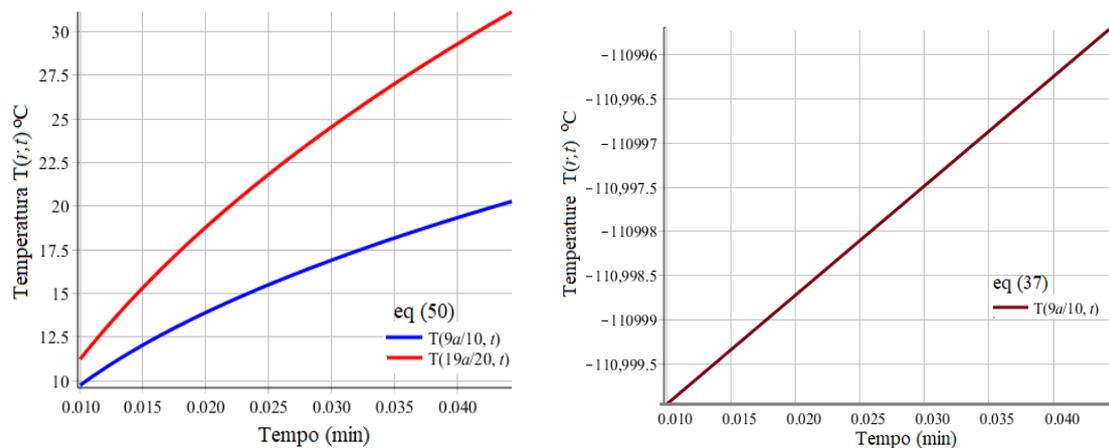


Figura 6. Perfil de temperaturas transientes no cilindro representado pelas Eqs (19,20) com a Eq (50) e (b) usando a Eq (36) ou a Eq (37).

Portanto, a Eq (50) pode ser considerada um modelo suficientemente geral para a aproximação de soluções de problemas não homogêneos de condução de calor transiente em geometria cilíndrica 1-D, com geração de energia uniforme, e condições de fronteira do tipo Dirichlet de valores constantes para tempos onde $\frac{\kappa t}{a^2} < 0.02$.

Em todos os casos analisados, as aproximações obtidas não podem ser aplicadas no centro do cilindro em $r = 0$, e desse modo, esses modelos não fornecem estimativas sobre temperaturas no eixo do cilindro nessa reduzida faixa de tempo. Nesse caso, ainda assim, é possível em geral, obter outras aproximações utilizando a sugestão de Carslaw e Jaeger (2011, p. 331) de desenvolver expansões assintóticas para $I_0(qa)$ na fração $\frac{I_0(0)}{I_0(qa)} = \frac{1}{I_0(qa)}$.

Vamos examinar alguns casos especiais das Eqs (35) e (45) considerando $r = 0$.

Caso 1.1. A Eq (46) é a inversa da transformada de Laplace aplicada na expressão entre chaves dada pela Eq (31), isto é,

$$\bar{T} = g_0 \frac{\kappa}{Kp^2} - g_0 \frac{\kappa}{Kp^2} \frac{I_0(qr)}{I_0(qa)}. \quad (51)$$

Daí, e usando a expansão assintótica dada pela Eq (40) com $r = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{g_0 \kappa}{Kp^2} \frac{1}{I_0(qa)} &= \frac{g_0 (2\pi a)^{1/2}}{Kp^{7/4} k^{3/4}} \left\{ 1 + \frac{1}{8qa} + \frac{9}{128(qa)^2} + \dots \right\} e^{-qa} = \\ &= \frac{g_0 (2\pi a)^{1/2}}{Kp^{7/4} k^{3/4}} e^{-qa} - \frac{g_0 (2\pi)^{1/2}}{8Kp^{9/4} k^{1/4} a^{1/2}} e^{-qa} - \dots \end{aligned} \quad (52)$$

Usando somente o primeiro termo da expansão do lado direito da Eq (52) e aplicando a transformada inversa de Laplace na Eq (51) resulta

$$T(r=0, t) \cong g_0 \frac{\kappa}{K} t - \left\{ \frac{g_0 (2\pi a)^{1/2}}{K k^{3/4}} \right\} L^{-1} \left\{ \frac{e^{-qa}}{p^{7/4}} \right\}. \quad (53)$$

onde, $L^{-1} \left\{ \frac{e^{-qa}}{p^{7/4}} \right\}$ foi obtida numericamente.

A Fig. 7 mostra o perfil de temperatura aproximada no eixo do cilindro para pequenos intervalos de tempo com a Eq (53).

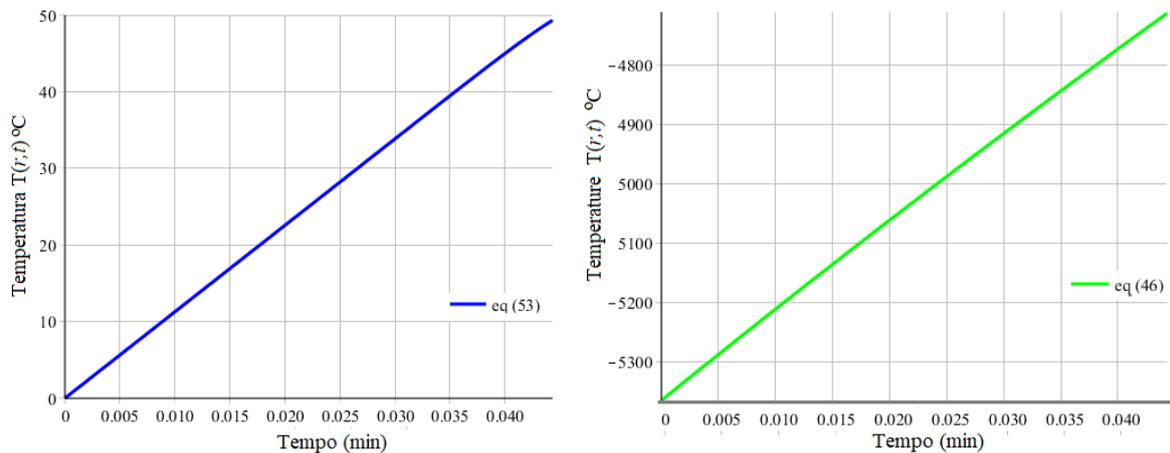


Figura 7. Perfil de temperaturas no eixo do cilindro com tempos pequenos aproximados pela: (a) Eq (53) e (b) Eq (46).

A Fig. 7(a) mostra a contribuição solitária do termo fonte no eixo do cilindro até 2,4 segundos. A Fig. 7(b) mostra os resultados inadequados com a solução analítica do problema nessa faixa de tempo dada pela Eq (46).

Caso 2.1. A Eq (48) é a inversa da transformada de Laplace aplicada no último termo da Eq (31), isto é,

$$\bar{T} = \frac{V I_0(qr)}{p I_0(qa)}. \quad (54)$$

Procedendo de forma análoga ao caso 1.1 tem-se

$$\begin{aligned} \bar{T}(r=0, t) &\cong \frac{V}{p} \frac{1}{I_0(qa)} = \frac{V(2\pi a)^{1/2}}{I_0(qa)} = \frac{V(2\pi a)^{1/2}}{p \left\{ 1 + \frac{1}{8qa} + \frac{9}{128(qa)^2} + \dots \right\}} \frac{p^{1/4}}{\kappa^{1/4}} e^{-qa} = \\ &= \frac{V(2\pi a)^{1/2}}{\kappa^{1/4} p^{3/4}} e^{-qa} - \frac{V(2\pi)^{1/2} \kappa^{1/4}}{8a^{1/2} p^{5/4}} e^{-qa} - \dots \end{aligned} \quad (55)$$

Daí e usando a transformada inversa de Laplace aplicada somente no primeiro termo do lado direito da Eq (55) vamos obter

$$T(0, t) \cong \frac{V(2\pi a)^{1/2}}{\kappa^{1/4}} L^{-1} \left\{ \frac{e^{-qa}}{p^{3/4}} \right\}. \quad (56)$$

onde a transformada inversa é calculada numericamente.

Usando a Eq (20) proposta por Crank (2011, p. 378) pode-se obter

$$T(0, t) \cong \frac{Va}{(\pi \kappa t)^{1/2}} e^{-\frac{a^2}{8\kappa t}} K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{a^2}{8\kappa t}\right), \quad (57)$$

onde $K_{\frac{1}{4}}$ é uma função de Bessel modificada de segunda espécie.

A Fig. 8 mostra o perfil de temperaturas com essa aproximação no eixo central do cilindro usando pequenos intervalos de tempo com a Eq (57), quando comparado com o uso da Eq (48). Pode ser notado que não há contribuição significativa de aumento de temperatura nesse período pela influência da condição de Dirichlet dada. É importante observar, que em todas as aproximações foram consideradas apenas o primeiro termo de cada expansão, o que significa abrir mão de uma maior precisão para a obtenção desses perfis de temperaturas.

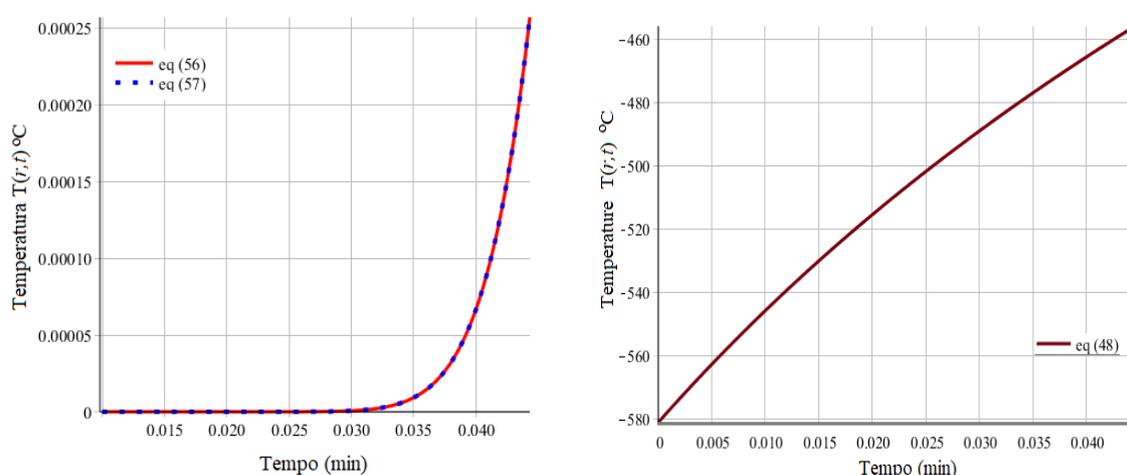


Figura 8. Perfil de temperaturas no eixo do cilindro com tempos pequenos aproximados pelas: Eqs (56) e (57) e (b) Eq (48)

Caso 3.1 Esse caso decorre imediatamente dos casos 1.1 e 2.1 considerando $r = 0$ e usando a transformada inversa de Laplace dada pela Eq (31) e a translação $V - V_0$. Desse modo, pode-se obter uma aproximação para a Eq (36) ou Eq (37) para as temperaturas no eixo do cilindro com tempo pequeno, isto é,

$$\begin{aligned} T(0, t) &= L^{-1}\{\bar{\phi}\} = L^{-1}\left\{\frac{\kappa g_0}{Kp^2} - \frac{\kappa g_0}{Kp^2} \frac{I_0(qr)}{I_0(qa)} - \frac{V - V_0}{p} + \frac{(V - V_0)}{p} \frac{I_0(qr)}{I_0(qa)}\right\} \approx \\ &\approx \frac{g_0 \kappa}{K} t + V - V_0 - \left\{\frac{g_0 (2\pi a)^{1/2}}{K k^{3/4}}\right\} L^{-1}\left\{\frac{e^{-qa}}{p^{7/4}}\right\} + \frac{(V - V_0)a}{(\pi \kappa t)^{1/2}} e^{-\frac{a^2}{8\kappa t}} K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{a^2}{8\kappa t}\right), \end{aligned} \quad (58)$$

onde, $L^{-1}\left\{\frac{e^{-qa}}{p^{7/4}}\right\}$ é calculada numericamente.

A Fig. 9 mostra o perfil de temperaturas com essa aproximação no eixo central do cilindro com pequenos intervalos de tempo quando a Eq (58) é adotada em comparação com a solução

irrealista dada pela Eq (37). A Fig 9 (a) mostra claramente a contribuição da condição inicial e de geração de energia no eixo do cilindro considerando a faixa de tempo.

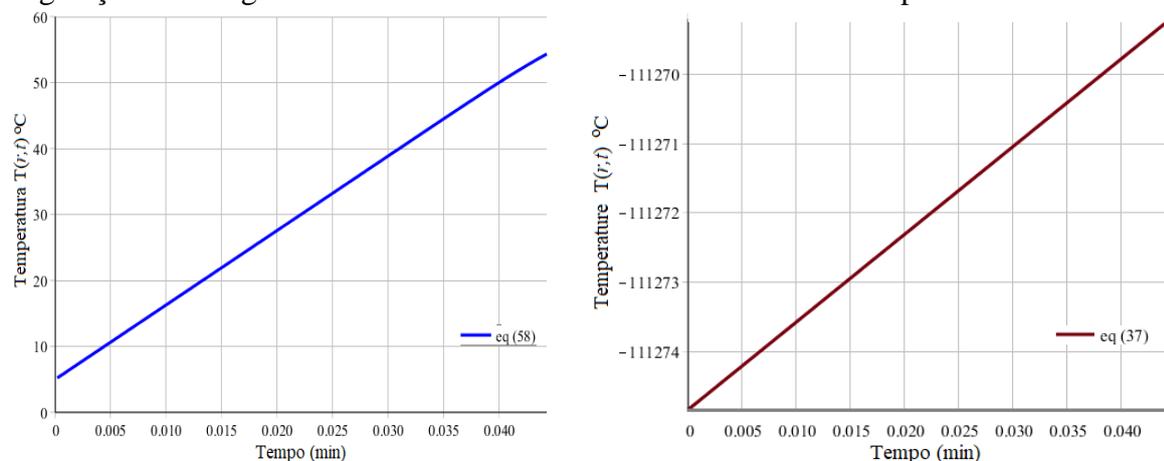


Figura 9. Perfil de temperaturas no eixo do cilindro com tempos pequenos aproximados pelas: (a) Eq (58) e (b) Eq (37).

4 Conclusões

Um caso de importância prática de distribuição transiente de temperatura com geração de energia uniforme, em um cilindro circular infinito formado por um material homogêneo e isotrópico de aço carbono, foi analisado com o método da transformada de Laplace. Usando aproximações assintóticas das funções de Bessel envolvidas nas soluções de três casos especiais desse problema, foi possível estabelecer um modelo suficientemente geral, para uma aproximação dessas soluções para faixas reduzidas de intervalos de tempo. Também foram estabelecidas aproximações para as temperaturas no eixo do cilindro em cada caso analisado considerando também, pequenos intervalos de tempo. Os resultados obtidos com os modelos adotados mostram aproximações de temperaturas realistas do ponto de vista físico de cada caso examinado.

5 Referências

ARAÚJO, J. C.; MÁRQUEZ, R. G. Simple models for diffusion in thin plates or membranes. **Journal of Applied Mathematics and Physics**, v. 7, n. 7, p. 1547-1559, 2019.

CARSLAW, H. S.; JAEGER, J. C. **Conduction of heat in solids**. 2nd ed. Oxford: Clarendon Press, 2011.

CINELLI, G. An extension of the finite Hankel transform and applications. **International Journal of Engineering Science**. v. 3, n. 5, p. 539-559, out. 1965.

CHURCHILL, R. V. **Operational mathematics**. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1972.



CRANK J. **The mathematics of diffusion**. 2nd ed. Oxford: Clarendon Press, 2011.

DEBNATH, L.; BHATTA, D. **Integral transforms and their applications**. 3rd ed. New York: Chapman & Hall/CRC, 2015.

FOX, R.W.; PRITCHARD, P. J.; MCDONALD, A. T. **Introdução à mecânica dos fluidos**. Tradução e revisão técnica de Ricardo Nicolau Nassar Koury e Luiz Machado. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

HAHN, D. W.; ÖZISIK, M. N. **Heat conduction**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2012.

MEYER, R. E. **Introduction to mathematical fluid dynamics**. Mineola: John Wiley & Sons, 1999.

OLIVEIRA, L. G. **Transferência de calor em reator cilíndrico elíptico de leito fixo: aspectos termofluidodinâmicos e geométricos**. 2004. 149 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Processos) — Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2004.

RIBEIRO, C. da S. **A influência térmica na dinâmica das membranas celulares: uma contribuição na conservação de *Steindachneridion parahybae* (Siluriformes: Pimelodidae), uma espécie de peixe ameaçada de extinção**. 2012. 194f. Tese (Doutorado em Ciências) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

ZILL, D. G.; WRIGHT, W.S.; CULLEN, M. R. **Matemáticas avanzadas para ingeniería**. Traducido Erika Jasso Hernan D’Bourneville/Carlos Roberto Cordero Pedraza/Gabriel Nagore Cazares. 4. ed. McGRAW-HILL/Interamericana Editores, 2011.

Apêndice A: Resolução da Eq (37) por separação de variáveis: obtenção da equação transcendental

A solução do problema de condução de calor dado pelas Eqs (19), (20) podem ser resolvida usando a separação de variáveis. A importância dessa solução é no sentido de obter de forma indireta, a validação da Eq (36), bem como, estabelecer a equação transcendental desse problema sem o uso da teoria dos resíduos na integração complexa. Além disso, essa solução pode ser usada para condições iniciais mais gerais do que a estabelecida nesse estudo usando a transformada de Laplace. Vamos considerar que a C.I dada pela Eq (20) em uma forma mais geral, isto é, $T(a, t) = F(r)$, $0 < r < a$.

Fazendo a translação

$$\varphi = T - V, \quad (\text{A.1})$$



tem-se a EDP, linear não homogênea, mas com condições de fronteira homogêneas (CFH) dada por

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{g_0}{K} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad 0 < r < a, t > 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\text{CF1: } \varphi(a, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$\text{CF2: } \lim_{r \rightarrow 0} \varphi(r, t) < \infty. \quad (\text{A.3})$$

$$\text{C.I: } \varphi(r, 0) = F(r) - V = g(r).$$

Desse modo, a Eq (A.2) pode ser resolvida por superposição de soluções (HAHN; OZISIK, 2012, p. 99) na forma

$$\varphi(r, t) = \psi(r, t) + \phi(r), \quad (\text{A.4})$$

onde $\psi(r, t)$ é a solução do problema homogêneo associado, com condições de fronteira homogêneas, enquanto $\phi(r)$ é a solução estacionária da Eq (A.2) sujeita as condições de fronteira dadas pela Eq (A.3), mas independente da condição inicial. Ou seja, tem-se a equação diferencial ordinária dada por

$$\frac{d\phi^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} + \frac{g_0}{K} = 0, \quad 0 < r < a, \quad (\text{A.5})$$

$$\text{CF1: } \phi(a, t) = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$\text{CF2: } \lim_{r \rightarrow 0} \phi(r, t) < \infty.$$

Fazendo $w = \frac{d\phi}{dr}$, e usando o método do fator integrante para equações diferenciais lineares de primeira ordem, tem-se

$$\phi(r) = c_1 \ln r - \frac{g_0}{4K} r^2 + c_2. \quad (\text{A.7})$$

Dá Eq (A.7) e das condições de fronteiras dadas pela Eq (A.6) obtém-se a solução do problema estacionário na forma

$$\phi(r) = \frac{g_0}{4K} (a^2 - r^2). \quad (\text{A.8})$$

O problema homogêneo associado pode ser formulado pela equação

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad 0 < r < a, t > 0, \quad (\text{A.9})$$

sujeita as condições dadas por,

$$\begin{aligned}CF1: & \psi(a, t) = 0, \quad t > 0, \\CF2: & \lim_{r \rightarrow 0} \psi(r, t) < \infty. \\C.I: & \psi(r, 0) = F(r) - V - \varphi(r) = h(r).\end{aligned}\tag{A.10}$$

Como a Eq (A.10) é homogênea, linear e com condições de fronteira homogêneas pode ser usado o método de separação de variáveis descrito na seção 2.3 na forma

$$\psi(r, t) = G(r)H(t).\tag{A.11}$$

Da Eq (A.11) e da condição CF2 dada pela Eq (A.10) tem-se,

$$G(r) = c_2 J_0(\lambda r).\tag{A.12}$$

Da Eq (A.12), e da condição CF1 dada pela Eq (A.10), obtém-se a equação transcendental na forma

$$J_0(\lambda r) = 0.\tag{A.13}$$

Com a Eq (A.13) tem-se que a solução para esse problema homogêneo é dado pela Eq (A.12) na forma

$$\psi(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\kappa \lambda_n^2 t} G_0(r, \lambda_n),\tag{A.14}$$

onde os autovalores $\lambda_n, n = 1, 2, \dots$ são positivos e obtidos por meio da Eq (49). A cada autovalor λ_n pode ser associado uma autofunção $G_0(r, \lambda_n)$ definida no intervalo $0 \leq r \leq a$. Essas autofunções que satisfazem o problema de Sturm – Liouville (HAHN; OZISIK, 2012, p.42) em coordenadas cilíndricas dado pelas Eqs (A.9) e (A.10), constituem um conjunto ortogonal de funções no espaço $C^2[0, a]$ (HAHN; OZISIK, 2012, p. 51). Desse modo dado $f(r)$ nesse espaço vetorial, essa função pode ser expressa como uma série de Fourier Bessel (HAHN; OZISIK, 2012, p.62) na forma

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n G_0(r, \lambda_n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(r, \lambda_n),\tag{A.15}$$

onde os coeficientes de Fourier podem ser calculados usando,

$$c_n = \frac{\int_{r=0}^a r f(r) G_0(r, \lambda_n) dr}{\int_{r=0}^a r G_0^2(r, \lambda_n) dr}.\tag{A.16}$$

Usando a CI dada pela Eq (A.10) pode-se por meio da Eq (A.16) obter

$$h(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0(\lambda_n r).\tag{A.17}$$

onde

$$c_n = \frac{\int_{r=0}^a r h(r) J_0(\lambda_n r) dr}{\int_{r=0}^a r G_0^2(r, \lambda_n) r dr} = 2 \frac{\int_{r=0}^a r (F(r) - V - \varphi(r)) J_0(\lambda_n r) dr}{a^2 J_1^2(\lambda_n a)}. \quad (\text{A.18})$$

Aqui foi usado o caso 3, da tabela 2.2 de Hahn e Ozisik (2012, p. 52) para o computo da norma $N(\lambda_n) = \int_{r=0}^a r J_0^2(\lambda_n r) r dr$.

Das Eqs (A.4), (A.8), (A.14) e (A.18) tem-se

$$\begin{aligned} \phi(r, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\kappa \lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r) = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\int_{r=0}^a r (F(r) - V - \varphi(r)) J_0(\lambda_n r) dr}{a^2 J_1^2(\lambda_n a)} \right\} e^{-\kappa \lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r) + \frac{g_0}{4K} (a^2 - r^2). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Daí, e da Eq (A.1) tem-se a solução aproximada para o problema dado pelas Eqs (A.19) e (A.20) na forma

$$\begin{aligned} T(r, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\kappa \lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r) = \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\int_{r=0}^a r \left(F(r) - V - \frac{g_0(a^2 - r^2)}{4K} \right) J_0(\lambda_n r) dr}{a^2 J_1^2(\lambda_n a)} \right\} e^{-\kappa \lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r) + \frac{g_0(a^2 - r^2)}{4K} + V. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$