Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 19, dez. 2020

Análise qualitativa de modelos econômicos por meio de retratos de fase

Qualitative analysis of economic models through phase portraits

Isadora Zanato Leite
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto
Universidade de São Paulo
isadorazanato@usp.br

Tiago de Carvalho
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto
Universidade de São Paulo
tiagocarvalho@usp.br

Resumo

Os retratos de fase são ferramentas qualitativas que possibilitam o entendimento do comportamento de equações diferenciais que, não necessariamente, possuem soluções conhecidas. Essas complexas equações podem ser encontradas em diversos campos da ciência, em especial, na Economia e, através de resultados referentes ao estudo qualitativo das mesmas é possível desenvolver políticas, tanto públicas, como privadas, para melhorar a situação das empresas, do governo e dos consumidores. Este trabalho possui como objetivo mostrar a interseção da matemática com outras áreas, estudar alguns modelos econômicos, como, por exemplo, o modelo de Oligopólio, IS-LM e inflação, através de uma análise dos retratos de fase e mostrar que conclusões relevantes podem ser obtidas mesmo diante da ausência de um resultado numérico para problemas propostos.
Palavras-chave: Análise Qualitativa. Modelos Econômicos. Retrato de Fase. Equação Diferencial.

Abstract

Phase portraits are qualitative tools that make it possible to understand the behavior of differential equations that do not necessarily have known solutions. These complex equations can be found in several fields of science, especially in economics, and through the results of their qualitative study it is possible to develop policies, both public and private, to improve the situation of businesses, government and consumers. This work aims to show the intersection of mathematics with other areas, to study some economic models, such as the Oligopoly model, IS-LM and inflation, through an analysis of phase portraits and to show that relevant conclusions can be obtained even in the absence of a numerical result for proposed problems.
Keywords: Qualitative Analysis. Economic Models. Phase Portraits. Differential Equation.

Artigo recebido em ago. 2020 e aceito em nov. 2020

1 Introdução

O objetivo principal deste trabalho é estudar a dinâmica de sistemas de equações diferenciais ordinárias que modelam problemas econômicos. Embora alguns sistemas em questão não sejam lineares, estes satisfazem as hipóteses do Teorema de Hartman-Grobman.

O Teorema de Hartman-Grobman mostra que, sob certas hipóteses, numa região próxima do ponto de equilíbrio, o sistema não linear

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

possui uma estrutura qualitativa equivalente ao sistema linear

$$\dot{x} = Ax \tag{2}$$

onde $A = Df(x_0)$ e x_0 é uma singularidade.

Assim, possuímos recursos suficientes para estudar o comportamento de soluções em uma vizinhança dos pontos críticos. Abaixo, enunciamos o Teorema de Hartman-Grobman, extraído de Perko (1991).

Teorema 1 (Teorema de Hartman-Grobman) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto contendo a origem, $f \in C^1(\Omega)$ e ϕ_t o fluxo do sistema não linear (1), supondo $f(0) = 0$ e que a matriz $A = Df(0)$ não possui autovalores com a parte real nula. Então existe um homeomorfismo $H : U \longrightarrow V$, com U e V contendo a origem, tal que para cada $x_0 \in U$, existe um intervalo aberto $I_0 \subset \mathbb{R}$ contendo o zero tal que, para todo $x_0 \in U$ e $t \in I_0$ vale*

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At} H(x_0)$$

isto é, H leva trajetórias de (1) próximas a origem em trajetórias de (2) próximas a origem, preservando a orientação.

2 Desenhando retratos de fase

Nesta seção, estudaremos a estrutura qualitativa de um sistema de equações lineares, homogêneas e de primeira ordem por meio de retratos de fase. Considere o sistema na forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy. \end{cases} \tag{3}$$

Na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \tag{4}$$

isto é,

$$X' = AX, \tag{5}$$

em que $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Faremos a análise por meio dos autovalores e dos seus respectivos autovetores gerados pela matriz A. Os autovalores, os quais são as raízes do polinômio característico da matriz, serão calculados fazendo

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

ou seja,

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

Por fim, podemos encontrar os autovetores associados aos autovalores da seguinte forma:

$$(A - \lambda I)v = 0,$$

em que I é a matriz identidade e v o autovetor associado ao autovalor λ.

Definição 2 *Seja um sistema linear homogêneo de primeira ordem com coeficientes constantes na forma matricial, como (4). Os pontos* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *que satisfazem* $Ax = 0$ *são chamados de pontos críticos do sistema.*

Considerando $\det A \neq 0$, é natural que $(0, 0)$ seja o único ponto crítico. Sendo assim, vamos analisar os possíveis casos de raízes do polinômio característico da matriz A, já que os retratos de fase dependem diretamente de tais raízes.

2.1 Autovalores reais, distintos e de mesmo sinal

Como temos dois autovalores, λ_1 e λ_2, logo teremos dois autovetores, v_1 e v_2. Neste caso, a solução do sistema é

$$x(t) = c_1.v_1.e^{\lambda_1 t} + c_2.v_2.e^{\lambda_2 t}.$$

Assim, se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ temos que $x(t)$ diverge, quando $t \longrightarrow \infty$. Geometricamente, teremos que a trajetoria da solução irá se afastar do ponto crítico, o qual será chamado de nó repulsor. No caso de $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$, teremos que $x(t) \longrightarrow 0$, quando $t \longrightarrow \infty$, dessa forma, a trajetória irá convergir para o ponto crítico, chamado de nó atrator.

Exemplo 3 *Seja o sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y. \end{cases}$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico da matriz A é dado por

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda).(2-\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

Logo, as raízes do polinômio característico acima são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 2$. Dessa forma, a trajetória será um nó repulsor. Calculando os autovetores temos que $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 1)$, respectivamente.

Os autoespaços gerados são os eixos x e y do plano cartesiano. Vale destacar que a trajetória sempre irá tangenciar o autoespaço gerado pelo autovalor de menor módulo.

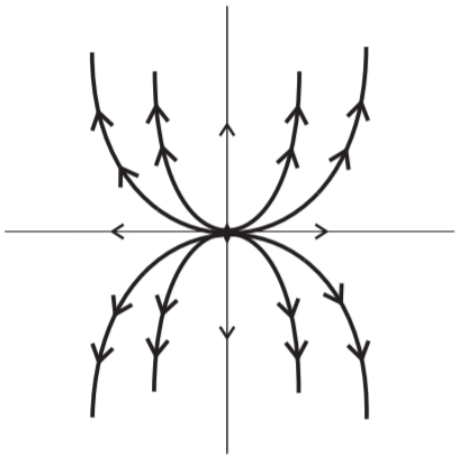

Figura 1: Retrato de Fase do Exemplo 3.

Exemplo 4 *Seja o sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 2y. \end{cases}$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico da matriz A é dado por

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4.$$

Logo, as raízes do polinômio característico acima são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$. Dessa forma, a trajetória será um nó repulsor. Calculando os autovetores temos que $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (1, -1)$, respectivamente.

Os autoespaços gerados por tais vetores serão duas retas cujos vetores diretores são os próprios autovetores, como segue na imagem a seguir

2.2 Autovalores reais, distintos e com sinais opostos

Aqui, novamente, teremos dois autovalores que irão gerar dois autovetores v_1 e v_2. Segue que a solução do sistema é dada por

$$x(t) = c_1.v_1.e^{\lambda_1 t} + c_2.v_2.e^{\lambda_2 t}$$

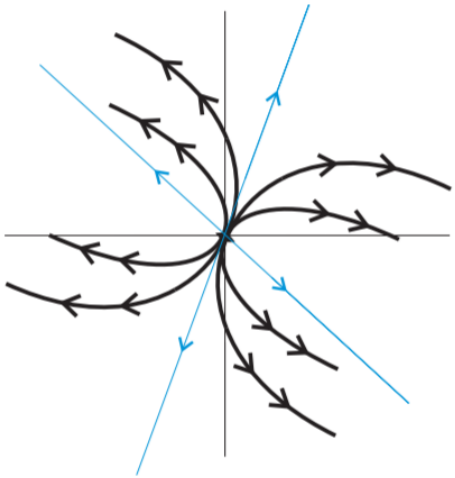

Figura 2: Retrato de Fase do Exemplo 4.

no qual $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Neste caso, o ponto crítico é chamado de ponto de sela.

A órbita do autoespaço gerado por λ_1 converge para a origem, enquanto a órbita do autoespaço gerado por λ_2 converge para longe da origem. As trajetórias fora dos autoespaços são hipérboles.

Exemplo 5 *Dado o sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y. \end{cases}$$

Na forma matricial,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico da matriz A é dado por

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda).(2-\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

Logo, as raízes do polinômio característico acima são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$. Portanto, segue que o ponto crítico é uma sela. Encontrando os autovetores temos que $v_1 = (1, 0)$ é o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$ e $v_2 = (0, 1)$ é o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$.

Assim, segue que os autoespaços serão os eixos x e y. Porém, como v_1 está associado a um autovalor negativo, então a trajetória sobre o eixo x irá convergir para a origem. Analogamente, como v_2 está associado a um autovalor positivo, a trajetória sobre o eixo y irá divergir da origem. As trajetórias fora dos eixos serão hipérboles, como segue o desenho abaixo

Exemplo 6 *Dado o sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y. \end{cases}$$

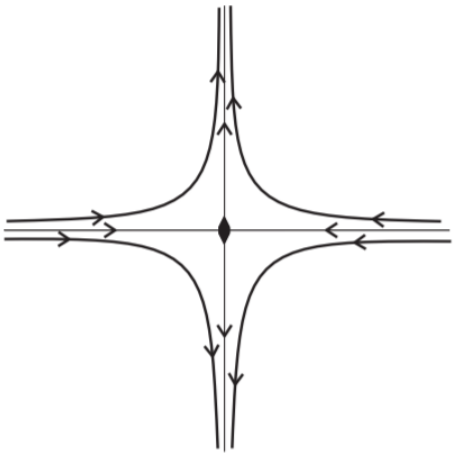

Figura 3: Retrato de Fase do Exemplo 5.

Na forma de matriz,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico da matriz A é dado por

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2.$$

Logo, as raízes do polinômio característico acima são $\lambda_1 = -1$ *e* $\lambda_2 = 2$*. Portanto, segue que o ponto crítico é uma sela. Encontrando os autovetores temos que* $v_1 = (1, 2)$ *é o autovetor associado ao autovalor* $\lambda_1 = -1$ *e* $v_2 = (2, 1)$ *é o autovetor associado ao autovalor* $\lambda_2 = 2$*.*

Temos que os autoespaços são retas passando pela origem, onde os vetores diretores são v_1 *e* v_2*. Logo, o retrato de fase do sistema é*

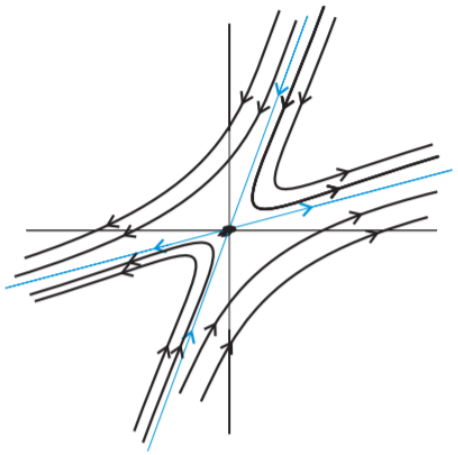

Figura 4: Retrato de Fase do Exemplo 6.

2.3 Autovalores reais e iguais

Aqui, vamos supor que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Teremos dois subcasos, em que a diferença entre eles é se o autovalor gera um ou dois autovetores.

2.3.1 Dois autovetores independentes

A solução do sistema é dada por

$$x(t) = c_1.v_1.e^{\lambda t} + c_2.v_2.e^{\lambda t}$$

onde λ é o autovalor e v_1 e v_2 são autovalores independentes. A trajetória é uma reta que passa pela origem e, além disso, se $\lambda < 0$ a solução converge para $(0, 0)$ quando $t \longrightarrow \infty$ e se $\lambda > 0$ as soluções se afastam de $(0, 0)$ quando $t \longrightarrow \infty$. Para este caso, o ponto crítico é chamado de Nó Próprio.

Exemplo 7 *Seja o sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = y. \end{cases}$$

Segue que a forma matricial do sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico da matriz A é

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2.$$

A raiz do polinômio característico acima é $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 1$. Note que qualquer par de vetores v_1 e v_2 satisfaz a equação $(A - \lambda I)v = 0$. Neste caso, o retrato de fase desse sistema será

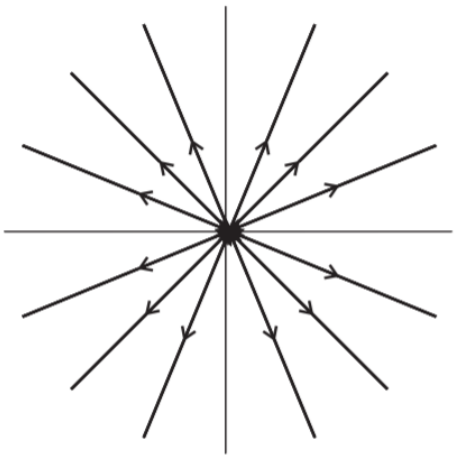

Figura 5: Retrato de Fase do Exemplo 7.

2.3.2 Um autovetor independente

Exemplo 8 *Seja o sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = y. \end{cases}$$

Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico da matriz A é

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2.$$

A raiz do polinômio característico acima é $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 1$. *Calculando os autovetores, temos que* $v_1 = v_2 = v = (1, 0)$. *Neste caso, o ponto crítico é chamado de Nó Impróprio e o retrato de fase desse sistema será*

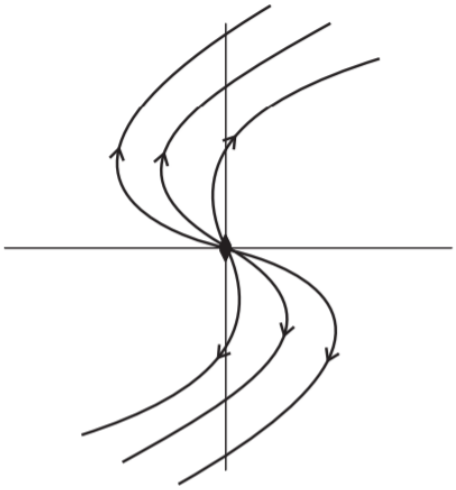

Figura 6: Retrato de Fase do Exemplo 8.

Assim, quando $t \longrightarrow \infty$ as trajetórias possuirão como assintotas retas paralelas ao autoespaço gerado por v.

2.4 Autovalores complexos

Vamos considerar o sistema da forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - by \\ \dfrac{dy}{dt} = bx + ay. \end{cases}$$

Na forma matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico da matriz A é

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & -b \\ b & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2 + b^2 = \lambda^2 - 2a\lambda + (a+b)^2.$$

Logo, os autovalores são $\lambda_1 = a + bi$ e $\lambda_2 = a - bi$. Do estudo sobre coordenadas polares, sabemos que $x = r.\cos\theta$ e $y = r.\sin\theta$. Substituindo no sistema, temos

$$\begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (r.\cos\theta)' = a.r.\cos\theta - b.r.\sin\theta \\ (r.\sin\theta)' = b.r.\cos\theta + a.r.\sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r'.\cos\theta - r.\theta'.\sin\theta = a.r.\cos\theta - b.r.\sin\theta \\ r'.\sin\theta + r.\theta'\cos\theta = b.r.\cos\theta + a.r.\sin\theta. \end{cases} \tag{6}$$

Multiplicando a primeira linha do sistema (6) por $\cos\theta$, a segunda linha por $\sin\theta$ e somando ambas, temos

$$r' = ar.$$

Analogamente, multiplicando a primeira linha do sistema (6) por $-\sin\theta$, a segunda linha por $\cos\theta$ e somando ambas, temos

$$\theta' = b.$$

Portanto, o sistema em coordenadas polares será da forma

$$\begin{cases} r' = ar \\ \theta' = b. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{cases} r(t) = c_0 e^{at} \\ \theta(t) = \theta_0 + bt. \end{cases}$$

Observa-se que a é responsável pelo cresciemnto ou decrescimento do raio, enquanto b é responsável pela rotação das soluções em torno da origem. As órbitas podem ser circunferências ($a = 0$) ou espirais ($a \neq 0$). Neste último caso, se $a > 0$ as soluções espiralam para longe da origem, enquanto se $a < 0$ elas espiralam em direção à origem. Vale destacar que, necessariamente, $b \neq 0$, pois, caso contrário, os autovalores seriam reais. Seja $v_1 = \alpha + \beta i$ o autovetor associado à $\lambda_1 = a + bi$, a solução geral do sistema será da forma

$$x(t) = (\alpha + \beta i)e^{(a+bi)t} = (\alpha + \beta i)e^{at}(\cos bt + i \sin bt).$$

Exemplo 9 *Seja o sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -0.5x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 0.5y. \end{cases}$$

Calculando o polinômio característico, temos

$$\begin{vmatrix} -0.5 - \lambda & 1 \\ -1 & -0.5 - \lambda \end{vmatrix} = (-0.5 - \lambda)^2 + 1.$$

As raizes do polinômio característico acima são $\lambda_1 = \dfrac{-1}{2} + i$ *e* $\lambda_2 = \dfrac{-1}{2} - i$. *Como* $a = \dfrac{-1}{2} < 0$ *então as trajetórias serão espirais convergindo para a origem. Escolhendo um ponto arbitrário e analisando o comportamento do campo de vetores sobre o mesmo, isto é, seja o ponto* $(x, y) = (1, 0)$, *temos que o vetor tangente à trajetória em* (x, y) *é* $v = (-0.5, -1)$, *podemos concluir que as trajetórias espiralam no sentido horário.*

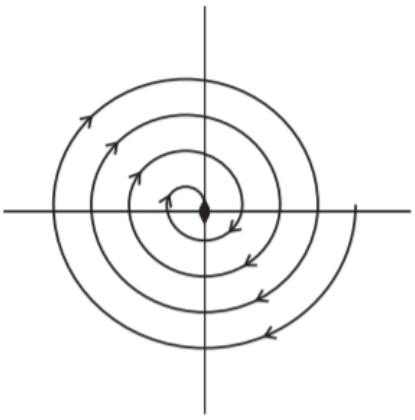

Figura 7: Retrato de Fase do Exemplo 9.

Exemplo 10 *Seja o sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

Calculando o polinômio característico, temos

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

As raízes do polinômio característico são $\lambda_1 = i$ *e* $\lambda_2 = -i$. *Como* $a = 0$, *segue que as trajetórias são elipses de centro na origem e, de modo análogo ao exemplo anterior, temos que a rotação ocorre no sentido anti-horário.*

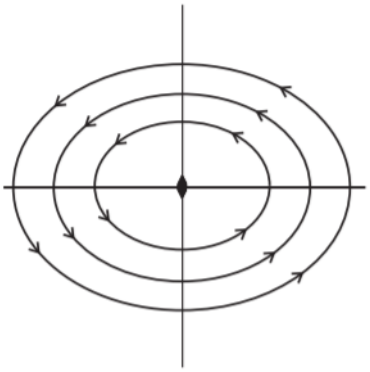

Figura 8: Retrato de Fase do Exemplo 10.

2.5 Um dos autovalores nulos

A partir de agora discutiremos sistemas degenerados. Para isso, vamos considerar sistemas onde $\det A = 0$, ou seja, o sistema possui mais de um ponto crítico. Se $\frac{dx}{dt} = 0$, teremos $x(t) = c_0$, enquanto $y(t)$ cresce ou decresce exponencialmente, dependendo do sinal do autovalor não nulo. Além disso, todos os pontos do eixo x serão pontos fixos. Se $\frac{dy}{dt} = 0$, teremos $y(t) = c_1$, enquanto $x(t)$ cresce ou decresce exponencialmente, dependendo do sinal do autovalor não nulo e todos os pontos do eixo y serão pontos fixos.

Exemplo 11 *Dado o sistema*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = 0. \end{cases}$$

Calculando o polinômio característico, temos

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-\lambda).$$

Os autovalores são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 0$. Como $y' = 0$ temos que as trajetórias não possuem variação em y, ou seja, elas são paralelas ao eixo x. Além disso, como $\lambda_1 = -1 < 0$ as trajetórias convergem para os pontos críticos, os quais se encontram no eixo y.

Logo, o retrato de fase será da forma

Exemplo 12 *Dado o sistema*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = y. \end{cases}$$

Calculando o polinômio característico, temos

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda.$$

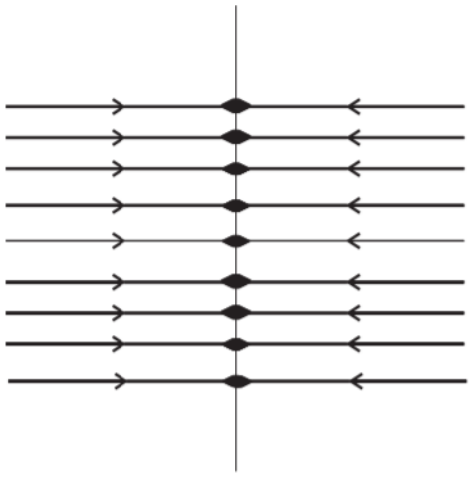

Figura 9: Retrato de Fase do Exemplo 11.

Os autovalores são $\lambda_1 = 0$ *e* $\lambda_2 = 1$. *Como* $x' = 0$ *temos que as trajetórias não possuem variação em x, ou seja, elas são paralelas ao eixo y. Além disso, como* $\lambda_2 = 1 > 0$ *as trajetórias se afastam dos pontos críticos, os quais se encontram no eixo x.*

Segue o retrato de fase

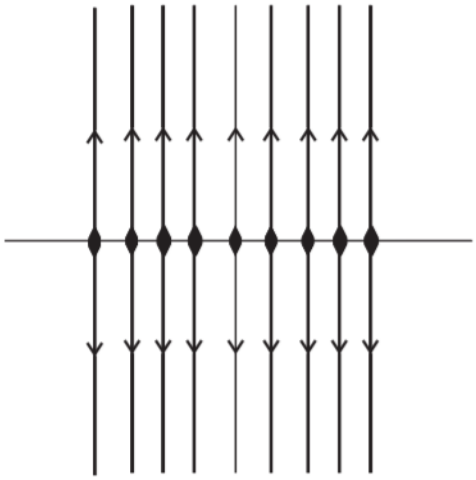

Figura 10: Retrato de Fase do Exemplo 12.

2.6 Dois autovalores nulos

Quando $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, teremos um sistema completamente degenerado, ou seja, todos os pontos do plano de fase serão pontos críticos. Além disso, todas as soluções do sistema são funções constantes.

Exemplo 13 *Seja o sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = 0. \end{cases}$$

Segue que o polinômio característico é dado por

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2.$$

e assim teremos que os autovalores são $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

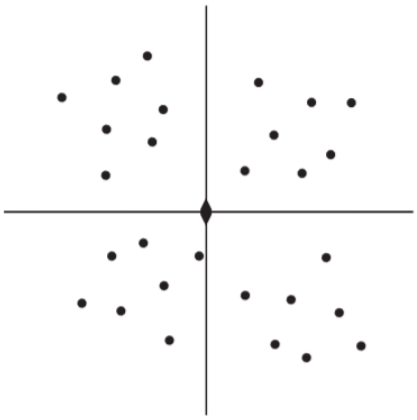

Figura 11: Retrato de Fase do Exemplo 13.

3 Determinando o retrato de fase a partir do traço e do determinante

Podemos analisar o sistema (3) olhando para o traço e para o determinante da matriz A. Assim, podemos determinar qual será o tipo do retrato de fase sem precisar calcular os autovalores e os autovetores. Para isso, considere o seguinte teorema:

Teorema 14 *Considere o sistema (4):*

1. *Se* $\det A < 0$*, então o ponto crítico será uma sela;*
2. *Se* $\det A = 0$ *e* $trA \neq 0$*, então o sistema será degenerado;*
3. *Se* $\det A > 0$ *e* $trA = 0$*, então o sistema terá um centro na origem;*
4. *Se* $(trA)^2 = 4 \det A$ *com* $\det A > 0$ *e* $trA \neq 0$*, então o sistema terá um nó próprio ou um nó impróprio na origem;*
5. *Se* $(trA)^2 > 4 \det A$ *com* $\det A > 0$ *e* $trA \neq 0$*, então o sistema terá um nó atrator ou um nó repulsor na origem;*

6. *Se* $(trA)^2 < 4 \det A$ *com* $\det A > 0$ *e* $trA \neq 0$*, então o sistema terá um foco (atrator ou repulsor).*

Note que os autovalores da matriz A são as raízes do polinômio característico $\lambda^2 - (trA)\lambda + \det A$, ou seja, os autovalores são dados por

$$\lambda = \frac{trA \pm \sqrt{D}}{2},$$

em que $D = (trA)^2 - 4 \det A$ é o discriminante da equação característica. Podemos esboçar um diagrama o qual engloba os seis casos através da análise das posições no plano $(trA \times \det A)$ em relação à curva dada por $D = 0$, conforme a figura a seguir:

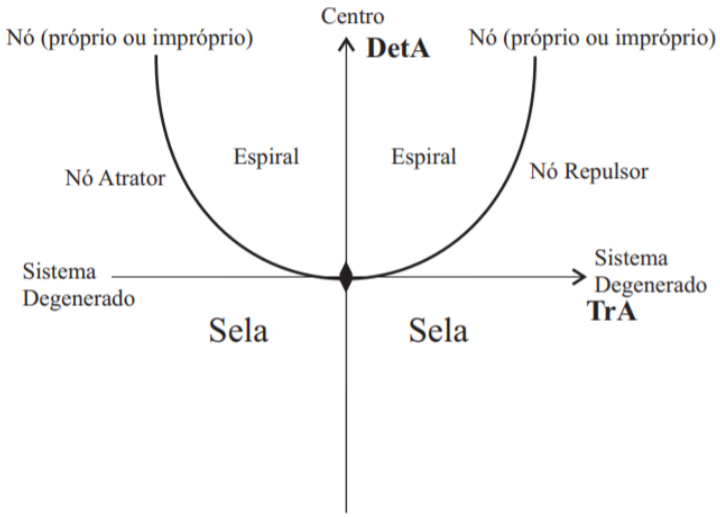

Figura 12: Diagrama referente ao Teorema 14.

4 O modelo de Palomba

Em Gandolfo (2010) podemos encontrar algumas informações sobre o modelo de Palomba. Giuseppe Palomba considera uma economia em que há apenas dois tipos de bens: os bens de consumo (a) e os bens de capital (b). As premissas feitas por ele foram as seguintes:

1. Existem dois tipos de bens: Bens do tipo (a), que consistem nos bens prontos para o consumo imediato, sendo eles duráveis ou não duráveis; e bens do tipo (b), usados no processo produtivo para produzir novos bens, como, por exemplo, máquinas e equipamentos.

2. A economia está em uma situação dinâmica tendendo a aumentar seu equipamento de capital. Consequentemente, parte das commodities, produtos que funcionam como matéria prima, do tipo (a) são desviadas do seu destino normal e alocadas para a categoria (b).

3. Em qualquer dado instante, bens do tipo (a) têm um coeficiente de aumento igual a ε_1, enquanto bens do tipo (b) têm um coeficiente de aumento igual a $-\varepsilon_2$, em que ε_1 e ε_2 são constantes positivas. Isso significa que, na ausência da mudança do destino descrita acima, bens do tipo (a) seriam aumentados continuamente, enquanto bens do tipo (b) tenderiam a zero, devido à depreciação a uma taxa ε_2.

4. O coeficiente de diminuição dos bens do tipo (a), devido a uma mudança de destino, é igual a $-\gamma_1$, enquanto o coeficiente de aumento dos bens do tipo (b), devido a mesma razão, é igual a γ_2, em que γ_1 e γ_2 são constantes positivas.

Sejam C_1 e C_2 tais que denotam o volume dos bens do tipo (a) e do tipo (b), respectivamente, teremos imediatamente o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} = C_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 C_2) \\ \dfrac{dC_2}{dt} = -C_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 C_1). \end{cases} \tag{7}$$

Primeiramente, vamos encontrar os pontos críticos do sistema. Igualando o lado direito do sistema (7) a zero, temos

$$\begin{cases} C_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 C_2) = 0 \\ -C_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 C_1) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Da primeira linha de (8), concluímos que $C_1 = 0$ ou $C_2 = \dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$. Se $C_1 = 0$, da segunda linha do mesmo sistema temos que $C_2 = 0$. Além disso, se $C_2 = \dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$, substituindo na segunda equação de (8), temos

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}(-\varepsilon_2 + \gamma_2 C_1) = 0.$$

Como ε_1 e γ_1 são constantes positivas, o mesmo concluímos para $\dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$. Logo,

$$\begin{aligned} -\varepsilon_2 + \gamma_2 C_1 &= 0 \\ \Rightarrow C_1 &= \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}. \end{aligned}$$

Portanto, os pontos de equilíbrio são $(0,0)$ e $\left(\dfrac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$.

Como os pontos críticos são hiperbólicos, podemos aplicar o Teorema de Hartman-Grobman.

$$Df(C_1, C_2) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \gamma_1 C_2 & -\gamma_1 C_1 \\ \gamma_2 C_2 & -\varepsilon_2 + \gamma_2 C_1 \end{bmatrix}.$$

Seja $(C_1, C_2) = (0,0)$,

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico da matriz $Df(0,0)$ é dado por

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1 - \lambda & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 - \lambda \end{vmatrix} = (\varepsilon_1 - \lambda)(-\varepsilon_2 - \lambda) = 0.$$

Logo, as raízes do polinômio característico acima são $\lambda_1 = \varepsilon_1$ e $\lambda_2 = -\varepsilon_2$. Portanto, segue que o ponto crítico é uma sela. Encontrando os autovetores, temos que $v_1 = (1, 0)$ é o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = \varepsilon_1$ e $v_2 = (0, 1)$ é o autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = -\varepsilon_2$.

Para saber que o ponto crítico é uma sela basta notar que $\det Df(0,0) = -\varepsilon_1\varepsilon_2 < 0$.

Seja $(C_1, C_2) = \left(\dfrac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$,

$$Df\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma_1\dfrac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \\ \gamma_2\dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1} & 0 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico da matriz $Df\left(\dfrac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$ é dado por

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\gamma_1\dfrac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \\ \gamma_2\dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 = 0.$$

Logo, as raízes do polinômio característico acima são $\lambda_1 = i\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ e $\lambda_2 = -i\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$. Como $a = 0$, segue que temos um centro.

Note que $trDf\left(\dfrac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right) = 0$ e $\det Df\left(\dfrac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right) = \varepsilon_1\varepsilon_2 > 0$, assim, de fato, o ponto de equilíbrio é um centro.

Dessa forma, considerando que os volumes dos bens são sempre positivos e que as constantes também são positivas, temos que se o volume do bem (a) é zero e do bem (b) é um valor maior do que zero então a variação de (a) é zero e de (b) é negativa, isto é, converge para zero. De modo análogo, se o volume do bem (b) é zero e do bem (a) é um valor maior do que zero então a variação de (b) é zero e de (a) é positiva, tendendo para o infinito. Assim, ao considerar os volumes de (a) e (b) próximos de zero temos uma diminuição do volume de (b) e um aumento do volume de (a). Além disso, para pontos próximos de $\left(\dfrac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$ temos que os volumes dos bens (a) e (b) oscilam de forma periódica.

Mais tarde, Palomba percebeu que os parâmetros ε_1, ε_2, γ_1 e γ_2 deveriam ser considerados, de modo mais geral, como funções contínuas do tempo.

Do ponto de vista matemático, a intuição de Palomba pode ser expressa pelo seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} = C_1[\varepsilon_1(t) - \gamma_1(t)C_2] \\ \dfrac{dC_2}{dt} = -C_2[\varepsilon_2(t) - \gamma_2(t)C_1]. \end{cases} \tag{9}$$

Palomba teve que contar com considerações de intuições gráficas. De fato, não existe um único resultado possível, visto que tudo depende da natureza das funções $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\gamma_1(t)$ e $\gamma_2(t)$.

Além disso, devemos lembrar que Palomba foi o primeiro a sugerir que os fenômenos cíclicos deveriam ser mais geralmente analisados considerando os coeficientes como funções do tempo ao invés de constantes.

5 Modelo contínuo de oligopólio

Vamos considerar um setor qualquer da economia. Quando o mesmo é composto por um número reduzido de empresas, geralmente duas ou três, ofertando um produto ou serviço então o sistema é denominado de Oligopólio.

Prestaremos atenção no que ocorre quando há uma mudança de custo marginal constante para um custo marginal não constante.

5.1 Custos marginais constantes

Para o caso de duas empresas, nosso modelo é
$p(t) = 9 - Q(t)$
$Q(t) = q_1(t) + q_2(t)$
$TC_1(t) = 3q_1(t)$
$TC_2(t) = 3q_2(t)$,
em que
$p(t)$- preço de venda;
$Q(t)$- quantidade vendida;
$q_i(t)$- quantidade vendida pela empresa i;
$TC_i(t)$- custo total da empresa i.

Sabemos que a receita total (TR) e o lucro (π) da empresa i são dados da seguinte forma:

$$TR_i(t) = p(t)q_i(t),$$

$$\pi_i(t) = TR_i(t) - TC_i(t).$$

Isso conduz à receita total e aos lucros de cada firma

EMPRESA 1

$$TR_1(t) = [9 - q_1(t) - q_2(t)]q_1(t),$$

$$\pi_1(t) = [9 - q_1(t) - q_2(t)]q_1(t) - 3q_1(t).$$

EMPRESA 2

$$TR_2(t) = [9 - q_1(t) - q_2(t)]q_2(t),$$

$$\pi_2(t) = [9 - q_1(t) - q_2(t)]q_2(t) - 3q_2(t).$$

Suponha que, para a empresa 1, o resultado é ajustado continuamente na proporção da discrepância entre o nível desejado e o nível atual. O mesmo se aplica a empresa 2. Consequentemente

EMPRESA 1

$$\frac{dq_1(t)}{dt} = K_1[x_1(t) - q_1(t)], \quad K_1 > 0. \tag{10}$$

EMPRESA 2

$$\frac{dq_2(t)}{dt} = K_2[x_2(t) - q_2(t)], \quad K_2 > 0. \tag{11}$$

em que $x_i(t)$ corresponde ao nível desejado pela firma i.

O nível esperado do resultado para cada empresa é o nível de resultado que maximiza os lucros assumindo que as outras empresas não alteram o seu nível de resultado.

Derivando a função do lucro e igualando a zero, temos

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 6 - 2q_1(t) - q_2(t) = 0 \quad \textbf{e} \quad \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 6 - q_1(t) - 2q_2(t) = 0.$$

Rearranjando os termos das equações acima, obtemos

$$q_1(t) = 3 - \frac{1}{2}q_2(t) \quad \textbf{e} \quad q_2(t) = 3 - \frac{1}{2}q_1(t).$$

Mas, como o nível esperado é o de lucro máximo, admitindo que a outra empresa não modifica seus resultados, então

$$x_1(t) = 3 - \frac{1}{2}q_2(t) \quad \textbf{e} \quad x_2(t) = 3 - \frac{1}{2}q_1(t).$$

Substituindo nas equações de ajuste dinâmico (10) e (11), encontramos

$$\begin{cases} \dfrac{dq_1(t)}{dt} = 3K_1 - \dfrac{K_1}{2}q_2(t) - K_1q_1(t) \\ \dfrac{dq_2(t)}{dt} = 3K_2 - \dfrac{K_2}{2}q_1(t) - K_2q_2(t). \end{cases} \tag{12}$$

Primeiro, considere um ponto fixo do sistema. Isso ocorre quando o nível de resultado não muda. Isto é representado por

$$\begin{cases} q_1(t) = 3 - \dfrac{1}{2}q_2(t) \\ q_2(t) = 3 - \dfrac{1}{2}q_1(t). \end{cases}$$

Dessa forma, o ponto crítico é (2,2).

Escrevendo (12) na forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3K_1 \\ 3K_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_1 & -K_1/2 \\ -K_2/2 & -K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}.$$

Além disso, a matriz do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} -K_1 & -K_1/2 \\ -K_2/2 & -K_2 \end{bmatrix}$$

com $tr(A) = -(K_1 + K_2) < 0$ e $\det(A) = \dfrac{3K_1K_2}{4} > 0$. Ademais,

$$(trA)^2 - 4\det(A) = (K_1 + K_2)^2 - 3K_1K_2 = (K_1 - K_2)^2 + K_1K_2 > 0,$$

desde que $K_1, K_2 > 0$.

Logo, temos um nó atrator. Esses resultados indicam que a quantidade de produto vendida por cada empresa presente no sistema converge para o equilíbrio, independentemente dos valores iniciais, e que este equilíbrio é estável. Assim, o tamanho do coeficiente de ajuste não influencia a estabilidade do sistema, mudando somente a velocidade de convergência. Ademais o ponto de equilíbrio é o ponto que maximiza o lucro do oligopólio.

5.2 Custos marginais não constantes

Voltando ao modelo

$p(t) = 9 - Q(t)$

$Q(t) = q_1(t) + q_2(t)$

$TC_1(t) = 3q_1^2(t)$

$TC_2(t) = 3q_2^2(t)$.

Isso conduz à receita total e aos lucros de cada firma

EMPRESA 1

$$TR_1(t) = [9 - q_1(t) - q_2(t)]q_1(t),$$
$$\pi_1(t) = [9 - q_1(t) - q_2(t)]q_1(t) - 3q_1^2(t).$$

EMPRESA 2

$$TR_2(t) = [9 - q_1(t) - q_2(t)]q_2(t),$$
$$\pi_2(t) = [9 - q_1(t) - q_2(t)]q_2(t) - 3q_2^2(t).$$

Considerando o ajuste, como no caso acima

EMPRESA 1

$$\frac{dq_1(t)}{dt} = K_1[x_1(t) - q_1(t)], \quad K_1 > 0, \tag{13}$$

EMPRESA 2

$$\frac{dq_2(t)}{dt} = K_2[x_2(t) - q_2(t)], \quad K_2 > 0. \tag{14}$$

As empresas são maximizadoras do lucro, então

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 9 - 8q_1(t) - q_2(t) = 0 \quad \textbf{e} \quad \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 9 - q_1(t) - 8q_2(t) = 0.$$

Rearranjando os termos das equações acima, obtemos

$$q_1(t) = \frac{9}{8} - \frac{q_2(t)}{8} \quad \textbf{e} \quad q_2(t) = \frac{9}{8} - \frac{q_1(t)}{8}.$$

Mas, como o nível esperado é o de lucro máximo, admitindo que a outra empresa não modifica seus resultados, então

$$x_1(t) = \frac{9}{8} - \frac{q_2(t)}{8} \quad \textbf{e} \quad x_2(t) = \frac{9}{8} - \frac{q_1(t)}{8}.$$

Substituindo nas equações de ajuste dinâmico (13) e (14), encontramos

$$\begin{cases} \dfrac{dq_1(t)}{dt} = \dfrac{9K_1}{8} - K_1 q_1(t) - \dfrac{K_1}{8} q_2(t) \\ \dfrac{dq_2(t)}{dt} = \dfrac{9K_2}{8} - \dfrac{K_2}{8} q_1(t) - K_2 q_2(t). \end{cases} \tag{15}$$

Primeiro, considere um ponto fixo do sistema. Isso ocorre quando o nível de resultado não muda. Isto é representado por

$$\begin{cases} q_1(t) = \dfrac{9}{8} - \dfrac{q_2(t)}{8} \\ q_2(t) = \dfrac{9}{8} - \dfrac{q_1(t)}{8}. \end{cases}$$

Dessa forma, o ponto crítico é (1,1).

O sistema pode ser expresso por

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9K_1/8 \\ 9K_2/8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -K_1 & -K_1/8 \\ -K_2/8 & -K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}.$$

Além disso, a matriz do sistema é

$$A = \begin{bmatrix} -K_1 & -K_1/8 \\ -K_2/8 & -K_2 \end{bmatrix}$$

com $tr(A) = -(K_1 + K_2) < 0$ e $\det(A) = \dfrac{63K_1K_2}{64} > 0$. Ademais,

$$(trA)^2 - 4\det(A) = (K_1 + K_2)^2 - \frac{63}{16}K_1K_2 = (K_1 - K_2)^2 + \frac{K_1K_2}{16} > 0.$$

Assim, concluímos que mesmo na situação em que os custos marginais não são constantes temos um nó atrator e todos os caminhos convergem para o equilíbrio, isto é, as quantidades de produto vendida pelas empresas convergem para o equilíbrio, independentemente dos valores iniciais. Além disso, como no caso de custos marginais constantes, o equilíbrio maximiza o lucro do oligopólio.

6 Modelo contínuo IS-LM

6.1 Versão 1

Começaremos com uma formulação simples do modelo, de acordo com Shone (2002). Este descreve o mercado de bens com o mercado monetário.

IS: Curva que representa o equilíbrio no mercado de bens ou, equivalentemente, a igualdade entre poupança e investimento.

LM: Curva que representa o equilíbrio no mercado monetário ou, equivalentemente, a igualdade entre oferta e demanda por moeda.

A despesa real é a soma das despesas do consumidor, despesas de investimento e despesas do governo, assumindo que a economia é fechada.

A despesa do consumidor está relacionada com o rendimento disponível real, a despesa de investimento está negativamente relacionada com a taxa de juros e a despesa do governo é considerada exógena. Portanto, faremos uma simples função linear da despesa

$$e(t) = a + b(1 - t_1)y(t) - hr(t),$$

com $a > 0, 0 < b < 1, 0 < t_1 < 1, h > 0$, em que
e= despesa real;
a= despesa autônoma;
b= propensão marginal a consumir;
t_1= taxa marginal de imposto;
y= salário real;
h= coeficiente de investimento em resposta a r;
r= taxa nominal de juros.

A demanda por saldos monetários reais é assumida por ser positivamente relacionada ao salário real e negativamente relacionada com a taxa nominal de juros.

$$m^d(t) = Ky(t) - \mu r(t), K, \mu > 0.$$

A oferta monetária nominal é assumida exógena em $M_s = M_0$ e o nível de preços é assumido constante. Consequentemente, a balança monetária real é exógena em $m_0 = M_0/P$.

Isso é necessário para ser mais preciso nas premissas de ajuste em cada um dos mercados. Assumiremos que, em mercados de bens, a renda se ajusta de acordo com o excesso de demanda nesse mercado e as taxas de juros de acordo com o excesso de demanda no mercado de moeda, isto é

$$\dot{y} = y'(t) = \alpha(e(t) - y(t)), \alpha > 0$$
$$\dot{r} = r(t) = \beta(m^d(t) - m_0), \beta > 0.$$

Essas equações diferenciais podem ser expressas explicitamente em termos de y e r, em que assumiremos que essas variáveis são funções contínuas do tempo. Omitiremos a variável tempo (t) por conveniência.

$$\dot{y} = \alpha[b(1 - t_1) - 1]y - \alpha hr + \alpha a,$$
$$\dot{r} = \beta K y - \beta \mu r - \beta m_0.$$

Exemplo 15 *Considere o nível de preços constante e os parâmetros abaixo*
$a = 50$, $K = 0.25$,
$b = 0.75$, $m_0 = 8$,
$t_1 = 0.25$, $\mu = 0.5$,
$h = 1.525$, $\alpha = 0.1$
$\beta = 0.8$.

Substituindo nas equações, temos

$$\begin{cases} \dot{y} = -0.04375y - 0.1525r + 5 \\ \dot{r} = 0.2y - 0.4r - 6.4. \end{cases}$$

Note que $(y, r) = (62, 15)$ *é ponto de equilíbrio do sistema. Escrevendo na forma matricial*

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.04375 & -0.1525 \\ 0.2 & -0.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 6.4 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico da matriz A é

$$A = \begin{vmatrix} -0.04375 - \lambda & -0.1525 \\ 0.2 & -0.4 - \lambda \end{vmatrix} = (-0.04375 - \lambda).(-0.4 - \lambda) + 0.0305 = 0.$$

As raízes do polinômio característico acima são $\lambda_1 = -0.186825$ *e* $\lambda_2 = -0.256925$. *Calculando os autovetores, temos que* $v_1 = (1, 0.9382)$ *e* $v_2 = (1, 1.397868)$. *Neste caso, o ponto crítico é chamado de nó atrator.*

Logo, para esse modelo, independentemente dos valores iniciais, temos um sistema estável, em que a quantidade de renda e taxa nominal de juros convergem para um equilíbrio. Esse equilíbrio da economia corresponde ao ponto no qual a curva IS e a curva LM se interceptam. Esse ponto proporciona a taxa de juros, r, e o nível da renda, y, que satisfazem as condições para o equilíbrio tanto para o mercado de bens quanto para o mercado monetário. Em outras palavras, nesse ponto de interseção, o gasto efetivo é igual ao gasto planejado, e a demanda por encaixes monetários reais é igual à oferta.

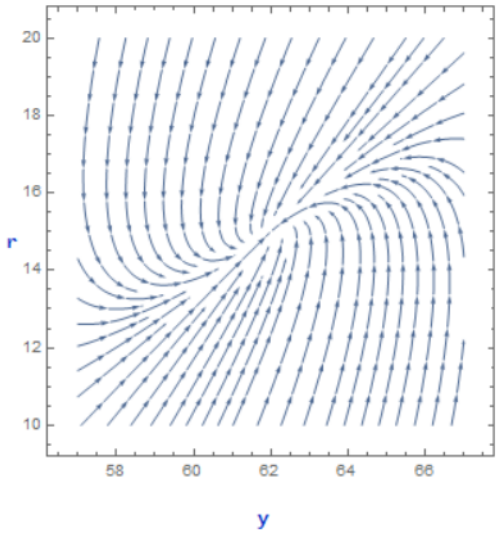

Figura 13: Retrato de Fase do Exemplo 15.

6.2 Versão 2

Aqui, devemos estender a função de investimento para incluir a renda real. Em outras palavras, os negócios alterarão o nível de investimento de acordo com o nível de renda. Devemos continuar com um simples modelo linear, porém, essa mudança nos conduzirá a uma possibilidade de que a curva IS seja positivamente inclinada.

Considere as equações

$e = a + b(1 - t_1)y - hr + jy$

$m^d = Ky - \mu r$

$\dot{y} = \alpha(e - y)$

$\dot{r} = \beta(m^d - m_0)$ com $a > 0$, $0 < b < 1$, $0 < t_1 < 1$, $h > 0$, $j > 0$, $K > 0$, $\mu > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Elas nos fornecem duas equações diferenciais

$$\dot{y} = \alpha[b(1 - t_1) + j - 1]y - \alpha hr + \alpha a \quad \textbf{e} \quad \dot{r} = \beta Ky - \beta\mu r - \beta m_0.$$

A curva IS é obtida tomando $\dot{y} = 0$, isto é,

$$r = \frac{a - [1 - b(1 - t_1) - j]y}{h},$$

e a curva LM é obtida tomando $\dot{r} = 0$, isto é,

$$r = \frac{Ky - m_0}{\mu}.$$

Exemplo 16 *Considere os parâmetros abaixo*

$a = 2$, $K = 0.25$,

$b = 0.8$, $m_0 = 8$,

$t_1 = 0.2$, $\mu = 0.25$,

$h = 1.525$, $\alpha = 0.2$

$\beta = 0.3$, $j = 0.95$.

Substituindo nas equações, temos

$$\begin{cases} \dot{y} = 0.118y - 0.305r + 0.4 \\ \dot{r} = 0.075y - 0.075r - 2.4. \end{cases}$$

Note que $(y, r) = (54.3316, 22.3316)$ *é ponto de equilíbrio do sistema. Escrevendo na forma matricial*

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.118 & -0.305 \\ 0.075 & -0.075 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.4 \\ -2.4 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico da matriz A é

$$A = \begin{vmatrix} 0.118 - \lambda & -0.305 \\ 0.075 & -0.075 - \lambda \end{vmatrix} = (0.118 - \lambda).(-0.075 - \lambda) + 0.022875 = 0.$$

As raizes do polinômio característico acima são $\lambda_1 = \dfrac{193 + i\sqrt{89651}}{2000}$ *e* $\lambda_2 = \dfrac{193 - i\sqrt{89651}}{2000}$. *Neste caso, o ponto crítico é um foco repulsor e o retrato de fase desse sistema será*

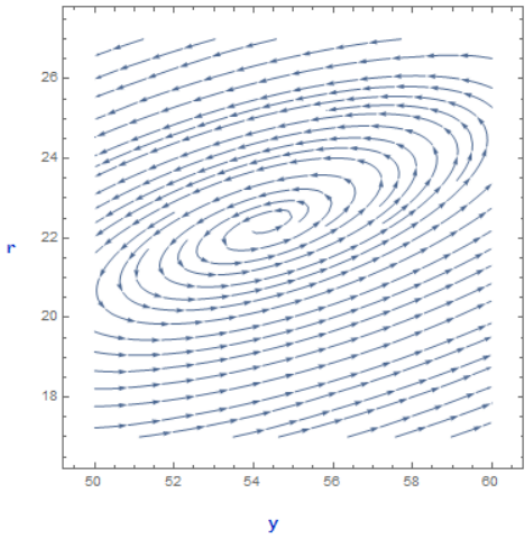

Figura 14: Retrato de Fase do Exemplo 16.

Note que a alteração da dinâmica do sistema da Versão 1 para a Versão 2 se deu por conta da adição da renda real na função de investimento. Esse exemplo nos permite observar como a adição de detalhes observados na realidade são capazes de modificar drasticamente o comportamento de um modelo. Neste caso, vimos que essa mudança transformou, um sistema que antes era estável, em instável, fazendo com que, para um dado nível de renda e taxa nominal de juros, a solução possua um comportamento divergente. De modo geral, os livros de macroeconomia consideram que a curva IS é negativamente inclinada e que a curva LM é positivamente inclinada, do mesmo modo como foi feito na versão 1 e assim as soluções são bem comportadas.

7 Modelo de Tobin-Blanchard

Houve um interesse por economistas sobre se o comportamento do mercado de ações pode influenciar renda e taxa de juros, pelo menos no curto prazo. O modelo $IS-LM$ esboçado anteriormente não é permitido para tal link. É plausível pensar que o investimento irá, de alguma forma, ser influenciado pelo comportamento do mercado de ações. Isso foi considerado por Blanchard em 1981, seguindo a aproximação de investimento sugerida por Tobin em 1969, a qual foi chamada de q-teoria de investimento.

A variável q representa o valor de mercado das ações na proporção dos custos de substituição. Se todos os retornos futuros são iguais- denotados por R- e são descontados a uma taxa de juros r, então o valor presente das ações (V) é igual a R/r. Por outro lado, empresas investirão enquanto o custo de substituição de algum notável estoque de capital (RC) for igual ao retorno de investimento, R/p, em que p é a eficiência marginal do capital. Então

$$q = \frac{V}{RC} = \frac{R/r}{R/p} = \frac{p}{r}.$$

Consequentemente, o investimento líquido é uma função positiva de q, o que ainda significa que isso é inversamente proporcional a r. No longo prazo, $r = p$ e, então, $q = 1$ e não há investimento líquido.

Podemos expressar o gasto agregado (e) como

$$e(t) = a_1 y(t) + a_2 q(t) + g,$$

com $0 < a_1 < 1$, $a_2 > 0$ e g representando o gasto do governo.

Além disso, a renda varia da seguinte forma

$$\dot{y} = \sigma(e(t) - y(t)),$$

com coeficiente de reação $\sigma > 0$.

Por outro lado, assumimos que o mercado de moeda se ajusta instantaneamente, logo a demanda por saldos monetários reais é igual a oferta por saldos monetários reais, isto é, como
$m_d = Ky(t) - \mu r(t)$,
$m_s = m_0$,
com $K > 0$ e $\mu > 0$, então

$$Ky(t) - \mu r(t) = m_0.$$

A próxima equação mostra que a taxa de juros dos títulos e os rendimentos das ações são iguais, visto que estes são substitutos perfeitos.

$$r(t) = \frac{b_1 y(t) + \dot{q}^e(t)}{q(t)},$$

em que $b_1 y$ constitui o lucro da empresa, os quais são assumidos proporcionalmente aos resultados e $\dot{q}^e$ constitui os ganhos de capital esperados. Assumiremos que $\dot{q}^e = \dot{q}$. Ocultando a variável tempo, o modelo pode ser visto em termos de cinco equações
$e = a_1 y + a_2 q + g$,
$m_0 = Ky - \mu r$,
$\dot{y} = \sigma(e - y)$,
$r = \dfrac{b_1 y + \dot{q}^e}{q}$,

$\dot{q}^e = \dot{q}$,
as quais podem ser reduzidas a duas equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{y} = \sigma(a_1 - 1)y + \sigma a_2 q + \sigma g \\ \dot{q} = \left(\dfrac{Kq}{\mu} - b_1\right) y - \dfrac{qm_0}{\mu} \end{cases}$$

Exemplo 17 *Vamos ilustrar o modelo com um exemplo numérico:*
$e = 0.8y + 0.2q + 7$;
$8 = 0.25y - 0.2r$;
$\dot{y} = 2(e - y)$;
$r = \dfrac{0.1y + \dot{q}}{q}$.

A partir das equações acima podemos encontrar o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{y} = 14 - 0.4y + 0.4q \\ \dot{q} = 1.25qy - 0.1y - 40q. \end{cases}$$

Os pontos de equilíbrio são $(y, q) \approx (35.76, 0.7607)$ *e* $(y, q) \approx (31.32, -3.681)$*, os quais são hiperbólicos. Aplicando o Teorema de Hartman-Grobman podemos aproximar o sistema não linear por um sistema linear.*

A matriz jacobiana é

$$Df(y, q) = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.4 \\ 1.25q - 0.1 & 1.25y - 40 \end{bmatrix}.$$

Seja $(y, q) \approx (35.76, 0.7607)$*, então*

$$A = Df(35.76, 0.76) = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.4 \\ 0.8509 & 4.7 \end{bmatrix}.$$

Note que $\det A = -2.22 < 0$*, logo o ponto de equilíbrio do sistema será uma sela.*

Temos que os autovalores são $\lambda_1 \approx 4.766$ *e* $\lambda_2 \approx -0.4656$*. O autovetor associado a* λ_1 *é* $v_1 \approx (0.07743, 1)$ *e o autovetor associaodo a* λ_2 *é* $v_2 \approx (-6.071, 1)$.

Seja $(y, q) \approx (31.32, -3.681)$*, então*

$$A = Df(31.32, -3.681) = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.4 \\ -4.701 & -0.85 \end{bmatrix}.$$

Note que $\det A = 2.22 > 0$ *e* $trA = -1.25 < 0$*. Além disso,*

$$(trA)^2 - 4 \det A = -7.318 < 0,$$

logo o sistema terá um foco atrator.

Temos que os autovalores são $\lambda_1 \approx -0.625 + 1.353i$ *e* $\lambda_2 \approx -0.625 - 1.353i$.

O retrato de fase deste exemplo é mais complexo do que os outros que vimos até o momento. Note que as soluções que passam por pontos próximos a $(35.76, 0.7607)$ *possuem comportamento divergente. Já soluções que passam por pontos próximos a* $(31.32, -3.681)$ *possuem comportamento convergente.*

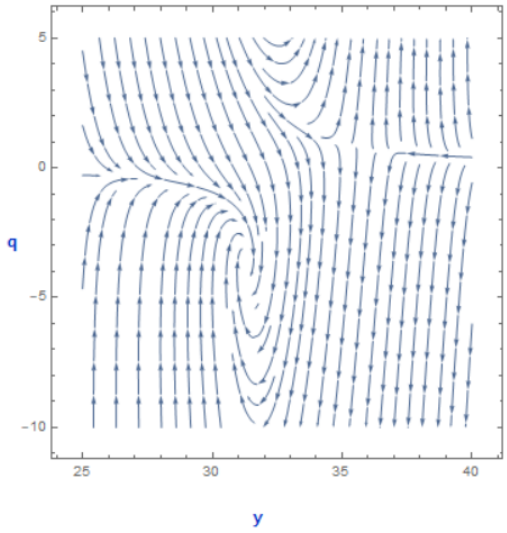

Figura 15: Retrato de Fase do Exemplo 17.

8 Modelos simples de inflação

Como podemos ver em Shone (2002), neste modelo, basicamente, o mercado de bens e o mercado de moeda se combinam para fornecer a curva de demanda agregada. Para ver isso, considere o seguinte modelo linear simples, onde as variáveis (exceto inflação e taxas de juros) estão em logaritmos.

MERCADO DE BENS

$c = a + b(1-t)y$

$i = i_0 - h(r - \pi^e)$

$y = c + i + g.$

MERCADO DE MOEDA

$m_d = Ky - \mu r$

$m_s = m - p$

$m_d = m_s$

em que

c=consumo real;

y=salário real;

i=investimento real;

r=taxa nominal de juros;

π^e=inflação esperada;

g=gasto real do governo;

m_d=demanda real de capital;

m_s=oferta real de capital;

m=estoque monetário nominal;

p=nível de preços.

A partir das equações acima podemos encontrar

$$y = \frac{(a + i_0 + g) + (h/\mu)(m - p) + h\pi^e}{1 - b(1-t) + (hK/\mu)} \tag{16}$$

e

$$r = \frac{Ky - (m - p)}{\mu}. \tag{17}$$

Fornecendo uma maior atenção para (16), devemos notar que essa é uma equação linear em termos de $(m - p)$ e de π^e, isto é,

$$y = a_0 + a_1(m - p) + a_2\pi^e, \tag{18}$$

$a_1, a_2 > 0$ e isso representa a curva de demanda agregada.

Podemos expressar a curva de demanda agregada, de modo usual, por meio de uma relação entre p e y.

$$p = \left(\frac{a_0 + a_1 m}{a_1}\right) - \left(\frac{1}{a_1}\right) y + \left(\frac{a_2}{a_1}\right) \pi^e$$

isto é,

$$p = c_0 - c_1 y + c_2 \pi^e$$

em que $c_0 = \dfrac{a_0 + a_1 m}{a_1}$, $c_1 = \dfrac{1}{a_1}$ e $c_2 = \dfrac{a_2}{a_1}$, o que indica, claramente, uma relação inversa entre o nível de preços (p) e o nível de salário real (y).

Assumiremos que a taxa de inflação é proporcional ao hiato do produto (diferença entre o PIB corrente e o PIB potencial, o que nos mostra o quanto a economia está distante de sua capacidade máxima de produção) e ajustado pela inflação esperada. Dessa forma,

$$\pi = \alpha(y - y_n) + \pi^e, \alpha > 0,$$

em que y_n é o nível de resultado esperado para $\pi = \pi^e = 0$, isto é, o PIB potencial.

Derivando (18) em t, obtemos

$$\dot{y} = a_1(\dot{m} - \pi) + a_2\dot{\pi}^e,$$

em que $\dot{m}$ é o crescimento monetário, dado exogenamente.

Assumimos que as variáveis estão em termos logaritmos, então

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d \ln P}{dt} = \pi.$$

Podemos, agora, combinar com a curva de Phillips e com o ajuste dinâmico por expectativas inflacionárias, fornecendo o modelo
$\dot{y} = a_1(\dot{m} - \pi) + a_2\dot{\pi}^e, a_1, a_2 > 0$
$\pi = \alpha(y - y_n) + \pi^e, \alpha > 0$
$\dot{\pi}^e = \beta(\pi - \pi^e), \beta > 0.$

Exemplo 18 *Considere o modelo numérico*
$\dot{y} = 10(15 - \pi) + 0.5\dot{\pi}^e$
$\pi = 0.2(y - 15) + \pi^e$
$\dot{\pi}^e = 1.5(\pi - \pi^e).$

Isso nos fornece o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{y} = 177.75 - 1.85y - 10\pi^e \\ \dot{\pi}^e = 0.3y - 4.5. \end{cases}$$

O ponto de equilíbrio é $(15, 15)$. *Além disso,*

$$A = \begin{pmatrix} -1.85 & -10 \\ 0.3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $trA = -1.85 < 0$, $\det A = 3 > 0$ *e* $(trA)^2 < 4 \det A$, *temos que o sistema terá um foco atrator. O mesmo pode ser notado calculando os autovalores de A, os quais são* $\lambda_1 \approx -0.925 + 1.46i$ *e* $\lambda_2 \approx -0.925 - 1.46i$.

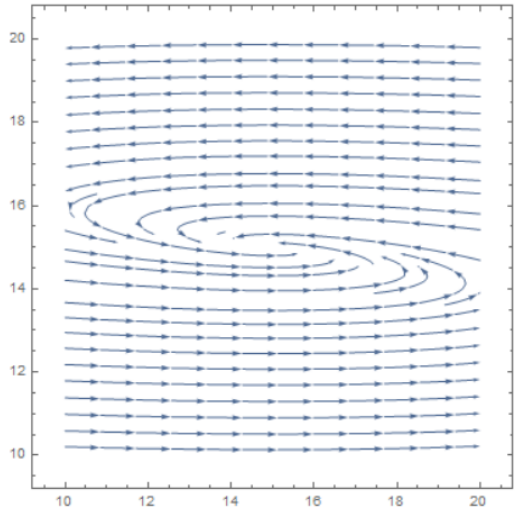

Figura 16: Retrato de Fase do Exemplo 18.

Observe que o retrato de fase do problema reflete exatamente o que acontece na realidade. Considere uma economia com baixa produção e baixa inflação. Nessa situação os preços estão baixos, assim como as taxas de juros. Dessa forma, os indivíduos têm incentivos a pegar dinheiro emprestado para investir em produção. Nesse sentido, a produção aumenta e com isso, nota-se o aumento de dinheiro na economia, o que gera taxas de inflação maiores. Em razão de controlar a inflação, o governo aumenta as taxas de juros, para que dessa forma o consumo diminua e, pela lei da oferta e demanda, os preços diminuam também. Assim, com o aumento das taxas de juros a produção entra em queda e, como o mercado demora para perceber a diminuição da produção, a inflação permanece crescendo por um tempo. Após isso, temos a queda de produção e inflação até atingir o ponto de equilíbrio. Utilizando o mesmo raciocínio, ao considerar um ponto em que a produção e a inflação são altos, as pessoas não têm incentivos a produzir. Assim, a inflação diminui como consequência da diminuição da produção, convergindo ao equilíbrio.

9 Conclusão

Neste trabalho, introduzimos alguns conceitos preliminares para a análise qualitativa de um sistema de equações diferenciais. Para casos não lineares, foi utilizado o Teorema de Hartman-Grobman para auxiliar o entendimento do comportamento das soluções próximas a pontos de

equilíbrio hiperbólicos. Em seguida, a teoria desenvolvida foi aplicada para possibilitar o estudo de modelos econômicos. Em alguns modelos foi necessário atribuir valores aos parâmetros para que pudesse ser obtido o retrato de fase do problema por meio de ferramentas computacionais. Conclui-se que o estudo qualitativo é de extremamente relevante para a obtenção de informações necessárias para o entendimento de modelos econômicos e de outras áreas da ciência.

10 Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Processo 2019/00028-9.

11 Referências Bibliográficas

ANTUNES, A. A. **Introdução à teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias suaves e suaves por partes com aplicações às engenharias mecânica e elétrica**. Relatório Final (Iniciação Científica) - Departamento de Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Bauru, 2015.

GANDOLFO, G. **Economic dynamics**. 4th ed. New York; Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.

PERKO, L. **Differential equations and dynamical systems**. New York: Springer-Verlag, 1991.

SHONE, R. **Economic dynamics:** phase diagrams and their economic application. 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 2002.