Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 21, dez. 2021
Iniciação Científica

Elias Oliveira Vieira dos Santos
Faculdade de Ciências
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
elias.ov.santos@unesp.br

Luiz Henrique da Cruz Silvestrini
Faculdade de Ciências
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
lh.silvestrini@unesp.br

Sequentes como duais dos *tableaux* para lógicas polivalentes

Sequents as duals of *tableaux* for many-valued logic

Resumo

A utilização de métodos dedutivos alternativos ao axiomático (hilbertiano) tem sido de grande interesse para a Teoria da Prova e para a Teoria da Computação, sendo esta última caracterizada pela busca por métodos mais adequados para implementações em computadores. Dentre tais métodos, abordaremos o cálculo de sequentes, proposto por Gentzen em 1935 e o método dos *tableaux* analíticos introduzido por Smullyan em 1968. Explicitamos uma sistematização a partir da proposta de Carnielli (1991) de como estabelecer sequentes como duais dos *tableaux* para lógicas polivalentes, promovendo um processo de dualização mais intuitivo a partir da formalização do *tableau* feita por Smullyan. Ademais, apresentaremos as regras em um sistema de sequentes para o cálculo proposicional clássico, a partir das regras de um sistema de *tableaux*, dualizando cada regra em *tableau* para um sequente adequado.

Palavras-chave: Lógicas polivalentes. Teoria da prova. Cálculo de sequentes. *Tableaux* analíticos.

Abstract

The use of alternative deductive methods with respect to axiomatic (Hibertian) has been of great interest to the Proof Theory and the Theory of Computing, the latter being characterized by the search for more suitable methods for implementations in computers. Among these methods, we will present the sequent calculus, proposed by Gentzen in 1935, as well as the analytical *tableaux* introduced by Smullyan in 1968. We show a systematization according to Carnielli (1991) to establish sequents as dual from *tableaux* for many-valued logics, promoting a more intuitive dualization process based on the *tableau* approach performed by Smullyan. Furthermore, we will present the rules in a sequent calculus for the classical propositional logic, starting from the rules of a *tableau* system, dualizing each *tableau* rule in an appropriate sequent.

Keywords: Many-valued logics. Proof theory. Sequent calculus. Analytic *tableaux*.

Artigo recebido em maio 2021 e aceito em ago. 2021

1 Introdução

A Teoria da Prova constitui-se uma importante área da Lógica, a qual tem sua origem associada ao Programa de Hilbert, desenvolvido no início do século XX pelo matemático alemão David Hilbert (1862-1943), o qual, em 1920, apresentou a proposta de que toda a Matemática deveria ser fundada em princípios axiomáticos. Contudo, com os teoremas de incompletude de Gödel que tratavam da incompletude da aritmética e da impossibilidade de demonstrar a consistência da aritmética usando a própria aritmética, apresentados em 1931, veio à tona a impossibilidade da completa realização do Programa de Hilbert.

Um importante marco na Teoria da Prova, foi dado em 1935 pelo matemático e lógico alemão Gerhard Gentzen (1909-1945), motivado por produzir demonstrações metamatemáticas. A fim de eliminar a crise pela qual a matemática havia sido afetada, devido ao surgimento das antinomias da teoria dos conjuntos, introduziu sistemas de provas alternativos aos axiomáticos, que eram caracterizados por admitir o princípio das subfórmulas. Segundo Gentzen (1969), "pretendemos elaborar um formalismo que reflita tão exato quanto possível o efetivo raciocínio lógico envolvido nas provas matemáticas". Ademais, os sistemas desenvolvidos por Gentzen consistiam em demonstrar a validade de um argumento de uma maneira usualmente mais rápida, apenas trabalhando com regras em métodos finitários.

O método dos *tableaux* analíticos foi introduzido por Raymond M. Smullyan (1919-2017), matemático e lógico estadunidense, em 1968. Segundo Fitting (1996), a história dos tableaux começa com Gentzen e culmina com Smullyan, pois os sistemas de provas de Gentzen eram caracterizados por admitirem o princípio de subfórmula, isto é, se uma fórmula A é demonstrável, então A tem uma demonstração em que ocorrem apenas subfórmulas de A. Todos os trabalhos subsequentes que levaram ao desenvolvimento dos sistemas de *tableaux* foram, de algum modo, inspirados pelos trabalhos de Gentzen em relação aos sistemas de provas. Um sistema em *tableaux* apresenta uma demonstração indireta em forma de árvore invertida, em que a partir da fórmula que se quer provar, supondo esta com uma valoração não distinguida presente no sistema e aplicando as regras de expansão do *tableau* até que todos os ramos sejam fechados ou que o ramo esteja terminado (sem mais possíveis regras para serem aplicadas); enquanto um sistema em sequentes apresenta uma demonstração direta em formato de árvore, a partir de sequentes iniciais e das regras do sistema até chegarmos na fórmula desejada. Segundo Carnielli (1991), por vezes é mais interessante trabalhar com sistemas de sequentes ao invés de formulações em *tableau*, motivação pela qual apresentamos a presente sistematização de criação de um sistema de sequentes, a partir de um sistema de *tableaux*. Ressaltamos que neste trabalho, adotamos o termo original do francês *tableaux*, por esta razão utilizaremos duas formas de escrita, a saber, *tableau* quando nos referirmos ao singular e *tableaux* para o uso no plural.

A Teoria da Prova atualmente também é de extrema importância para a Teoria da Computação, a qual apresenta na subárea de Prova Automática de Teoremas, segundo Santos (2010), o desenvolvimento de programas de computador com o objetivo de mostrar que uma determinada sentença é uma consequência lógica de um conjunto de sentenças. Inicialmente voltados para solucionar problemas estritamente matemáticos, recentemente, os provadores são utilizados em várias áreas do conhecimento, como, por exemplo, Engenharia, Ciência da Computação e Ciência Social.

Temos por objetivo abordar a dualização introduzida por Carnielli (1991), a qual fornece uma sistematização de cálculo de sequentes como duais dos *tableaux*. Nesta abordagem buscamos estabelecer uma maneira mais intuitiva, em que se preserve a notação de *tableau* introduzida por Smullyan (1968), além de promover exemplificações no âmbito proposicional clássico de tal dualização.

Trata-se de um trabalho teórico, em que após revisão e análise bibliográfica dos métodos dedutivos de cálculo de sequentes apresentados por Gentzen (1969), dos *tableaux* analíticos introduzidos por Smullyan (1968) e a sistematização de como apresentar um sistema de sequentes a partir de um sistema de *tableaux* estabelecida por Carnielli (1991), abordamos, de um modo intuitivo, a dualização de sistema de sequentes em lógicas polivalentes de n valores lógicos a partir de um sistema de *tableaux*. Em seguida, explicitamos a dualização para um cálculo proposicional clássico de forma sistemática e intuitiva para cada regra nos respectivos sistemas, a saber, do *tableau* para sequente.

2 Sobre os *tableaux* analíticos

Apresentaremos o método dos *tableaux* analíticos para o cálculo proposicional clássico, baseado no trabalho de Smullyan (1968), em seguida fazemos algumas observações para um cálculo polivalente.

Definição 2.1 (Smullyan, 1968, p. 3). Por uma *árvore não ordenada*, T, entenderemos uma coleção dos seguintes itens:

(i) Um conjunto S de elementos chamados *pontos*;

(ii) Uma função ℓ, que atribui a cada ponto x um inteiro positivo ℓ(x), chamado *nível* de x;

(iii) Uma relação aRb definida em S, que se lê "a é *predecessor* de b" ou "b sucessor de a". Essa relação deve obedecer às seguintes condições:

C_1: Há um único ponto a_1 de nível 1. Esse ponto é chamado *origem* ou *raiz* da árvore;

C_2: Cada ponto, exceto a raiz, tem um único predecessor;

C_3: Para quaisquer pontos a, b, se b for um sucessor de a, então $\ell(b) = \ell(a) + 1$.

Definição 2.2 Seja a um ponto, a é *ponto final* se ele não tem sucessores. No caso de um ponto a possuir exatamente um sucessor, ele é um *ponto simples*. E se um ponto a tiver mais de um sucessor, a é chamado *ponto de junção*.

Definição 2.3 Um *ramo* é qualquer sequência enumerável de pontos, partindo da origem, de tal forma que cada um dos seus termos, com exceção do último, se existir, é um predecessor do seguinte. E ainda, o último termo é um ponto final da árvore.

Definição 2.4 Um *ramo finito* é um ramo onde o número de pontos é finito. E um *ramo infinito* é um ramo cujo número de pontos é infinito.

Definição 2.5 Uma *árvore ordenada*, denotada por T, é uma árvore não ordenada com uma função f que atribui a cada ponto de junção z uma sequência $f(z)$ que não possui repetições, e o conjunto de termos consiste em todos os sucessores de z.

Definição 2.6 Uma árvore T é *finita*, se T tem somente um número finito de pontos; caso contrário, ela é denominada *infinita*.

Definição 2.7 Uma *árvore ordenada diádica* é uma árvore em que cada ponto de junção possui no máximo dois sucessores.

Definição 2.8 Um *tableau analítico* é uma árvore ordenada diádica T, cujos pontos são fórmulas. Um *tableau* T para uma fórmula A qualquer é construído do seguinte modo: Iniciamos o *tableau* com $\neg A$ em sua origem (raiz da árvore) e a construção ou expansão dos ramos dá-se pela aplicação de uma das *regras de expansão*.

Definição 2.9 (Regras de expansão). As regras de expansão para o cálculo proposicional clássico, de acordo com Smullyan (1968, p.20), podem ser classificadas de dois tipos, α e β, respectivamente, regras que não ramificam, e regras que bifurcam.

Definição 2.10 (Cláusulas de Fechamento). Um ramo de um *tableau* é denominado um *ramo fechado* quando existem neste ramo pontos que correspondam às fórmulas B e $\neg B$. Quando um ramo apresentar uma fórmula e sua negação como pontos distintos, utilizamos '×' para simbolizar que o ramo é fechado.

Definição 2.11 Um *tableau* para uma fórmula A é *fechado* quando todos os ramos são fechados.

Definição 2.12 Seja Γ um conjunto de fórmulas. Dizemos que Γ é um *conjunto fechado de fórmulas* quando é possível a construção de um *tableau* fechado para a conjunção finita das fórmulas de Γ; caso contrário, dizemos que Γ é um *conjunto aberto de fórmulas*.

Definição 2.13 Uma fórmula A é *consequência analítica* ou *gerada* de um conjunto Γ de fórmulas, o que denotaremos por $\Gamma \Vdash A$, quando $\Gamma \cup \{\neg A\}$ for um conjunto fechado de fórmulas.

Definição 2.14. Uma fórmula A é *demonstrável* em T, o que denotamos por $\Vdash A$, se é possível construir um *tableau* fechado a partir da fórmula inicial $\neg A$, ou seja, o conjunto $\{\neg A\}$ é fechado.

Definição 2.15. Um ramo é *completo* quando nenhuma regra de expansão pode ser aplicada em qualquer um dos pontos deste ramo, ou quando o ramo é fechado.

Definição 2.16. Um *tableau* é *completo* se todos os seus ramos são completos.

Observação 2.17. A partir destas definições para o caso clássico (árvore diádica), cada sistema polivalente adaptará os tipos de fórmulas que além de apresentar os tipos que não ramificam (tipo α) e bifurcam (tipo β), poderão apresentar regras que trifurcam (árvore triádica), quadrifurcam (árvore quadriádica), etc. Além disso, podem incluir novas cláusulas como regras de fechamento de um ramo.

3 Dualização entre *tableaux* e sequentes

Nesta seção apresentaremos uma definição para os sequentes e o processo de dualização destes a partir dos *tableaux*, segundo Carnielli (1991).

Definição 3.1 (Sequente): Um sequente é um objeto lógico, o qual apresenta a seguinte forma de derivação:

$$\Theta_1 \wedge \Theta_2 \wedge \cdots \wedge \Theta_d \Rightarrow \Theta_{d+1} \vee \cdots \vee \Theta_n;$$
onde $\Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_d, \Theta_{d+1}, \cdots, \Theta_n$ são conjuntos de sentenças de uma lógica proposicional n-valorada fixada $\mathcal{L}$ e os índices $1 \leq i \leq n$ representam os valores lógicos presentes em $\mathcal{L}$, sendo $1 \leq i \leq d$ os valores distinguidos e $d+1 \leq i \leq n$ os valores não distinguidos.

Definição 3.2 (Sequente válido): Um sequente é válido se, para cada $\mathcal{L}$-valoração v, temos válido:

$$(\forall A \in \Theta_1)(v(A) = 1) \wedge (\forall A \in \Theta_2)(v(A) = 2) \wedge \cdots \wedge (\forall A \in \Theta_d)(v(A) = d)$$
implica em
$$(\exists A \in \Theta_{d+1})(v(A) \neq d+1) \wedge \cdots \wedge (\exists A \in \Theta_n)(v(A) \neq n).$$

Ou seja, existe pelo menos um elemento A em cada conjunto Θ_j, com j não distinguido, onde a valoração do elemento é diferente de j. De modo intuitivo, um sequente válido expressa o fato que, se todos os elementos dos conjuntos Θ_i, em que $1 \leq i \leq d$ são "verdadeiros" (ou seja, com valores distinguidos), então em todo conjunto Θ_j, em que em que $d+1 \leq j \leq n$ contém pelo menos um elemento "não-falso". Para o caso clássico, por exemplo, nessa definição de sequentes válidos, $\Theta_V \Rightarrow \Theta_{\mathrm{F}}$ é um sequente válido se para cada valoração v, temos: $(\forall A \in \Theta_V)(v(A) = V)$ implica em $(\exists A \in \Theta_F)(v(A) \neq F)$. O qual, obviamente, coincide com a noção usual de sequentes apresentada por Gentzen (1969).

Definição 3.3 (Suporte do Sequente): Dado um sequente S:
$$\Theta_1 \wedge \Theta_2 \wedge \cdots \wedge \Theta_d \Rightarrow \Theta_{d+1} \vee \cdots \vee \Theta_n,$$
definimos o Suporte de S, denotado por $Supp\ (S)$, como o seguinte conjunto:
$$Supp\ (S) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{a_i(A) : A \in \Theta_i\}.$$
Ou seja, sendo a_i todas as possíveis valorações do elemento A em $\mathcal{L}$, temos uma união generalizada de todos elementos A, pertencentes a todos Θ_i (sejam distinguidos e não distinguidos).

Se Σ é um conjunto de sentenças marcadas, dizemos que Σ é satisfatível se existe uma $\mathcal{L}$-valoração v tal que $(v(A) = i)$ se, e somente se $a_i(A) \in \Sigma$. A partir disso, Carnielli (1991) demonstra o seguinte resultado:

Lema 3.1: Um sequente S: $\Theta_1 \wedge \Theta_2 \wedge \cdots \wedge \Theta_d \Rightarrow \Theta_{d+1} \vee \cdots \vee \Theta_n$ é válido se, e somente se, $Supp\ (S)$ não é satisfatível.

Os sistemas de sequentes contêm as seguintes regras e axiomas: (S1) Axiomas de sequentes próprios: os quais descrevem "situações verdadeiras" gerais. (S2) Axiomas de sequentes não próprios: os quais descrevem intuitivamente "situações verdadeiras triviais", com base na impossibilidade de uma fórmula bem formada receber um certo valor lógico. (S3) Regras de sequentes: as quais denotam "se as situações acima da linha são satisfeitas, então a situação abaixo da linha também é".

Podemos ver que (S1), (S2) e (S3) são conceitos duais dos *tableaux* (T2), (T3) e (T1), respectivamente, sintetizados abaixo.

(T1) Regras de expansão do sistema de *tableaux*: "Se a situação acima da linha é possível, então uma das situações abaixo da linha deve ser possível". (T2) Cláusula de Fechamento do sistema de *tableaux*, em que o ramo é fechado se contém um par contraditório de fórmulas marcadas, ou seja, fórmulas marcadas denotadas da forma: $a_i[A]$ e $a_j[A]$, sendo a_i e a_j valores lógicos para a fórmula A, para $i \neq j$. (T3) Cláusula de Fechamento do sistema de *tableaux*, em que o ramo é fechado se existir um conectivo com uma valoração a_j, em que a_j não aparece nas tabelas semânticas como resultado do respectivo conectivo.

Desse modo, veremos a seguir como cr iar as regras e axiomas no sistema de sequentes por meio de (S1), (S2) e (S3).

Os axiomas de sequentes próprios (S1) para a lógica n-valorada $\mathcal{L}$ são dados por $\binom{n}{2}$ sequentes obtidos adicionando A, uma metavariável para representar sentenças, a todos os pares Θ_i e Θ_j, com $i \neq j$. Denotaremos a união de A em cada conjunto Θ_i por (Θ_1, A). Temos então axiomas de sequentes próprios, da seguinte forma:

$$(\Theta_1, A) \wedge (\Theta_2, A) \wedge \cdots \wedge \Theta_d \Rightarrow \Theta_{d+1} \vee \cdots \vee \Theta_{n-1} \vee \Theta_n$$
$$\vdots$$
$$(\Theta_1, A) \wedge \Theta_2 \wedge \cdots \wedge (\Theta_d, A) \Rightarrow \Theta_{d+1} \vee \cdots \vee \Theta_{n-1} \vee \Theta_n$$
$$(\Theta_1, A) \wedge \Theta_2 \wedge \cdots \wedge \Theta_d \Rightarrow (\Theta_{d+1}, A) \vee \cdots \vee \Theta_{n-1} \vee \Theta_n$$
$$\vdots$$
$$\Theta_1 \wedge \Theta_2 \wedge \cdots \wedge \Theta_d \Rightarrow \Theta_{d+1} \vee \cdots \vee (\Theta_{n-1}, A) \vee (\Theta_n, A)$$

A partir dos sequentes acima, podemos facilmente verificar pares de fórmulas idênticas (A) com valores distintos, que garantem que os sequentes sejam válidos.

Os axiomas de sequentes não próprios (S2) para $\mathcal{L}$ são os casos em que certos valores lógicos nunca ocorrem para um conectivo (esse é um fenômeno típico de lógicas com mais de dois valores, onde por exemplo um determinado valor nunca ocorre em uma tabela). Ou seja, os axiomas de sequentes não próprios estarão traduzindo as cláusulas de fechamento de *tableaux* dos casos em que certos valores lógicos nunca ocorrem para um conectivo. Temos tais axiomas divididos em dois grupos:

A partir de valores lógicos distinguidos, não presentes nas tabelas de determinado conectivo K: $\Theta_1 \wedge \big(\Theta_i, K(A_1, \cdots, A_m)\big) \wedge \cdots \wedge \Theta_d \Rightarrow \Theta_{d+1} \vee \cdots \vee \Theta_n$, sendo $K(A_1, \cdots, A_m)$ a notação utilizada para o conectivo K envolvendo as fórmulas A_1 a A_m e sendo Θ_i com i um valor distinguido.

E a partir de valores lógicos não distinguidos, não presentes nas tabelas de determinado conectivo K: $\Theta_1 \wedge \Theta_2 \wedge \cdots \wedge \Theta_d \Rightarrow \Theta_{d+1} \vee \big(\Theta_i, K(A_1, \cdots, A_m)\big) \vee \cdots \vee \Theta_n$, sendo, como no caso anterior, $K(A_1, \cdots, A_m)$ a notação utilizada para o conectivo K envolvendo as fórmulas A_1 a A_m; mas neste caso sendo Θ_j com j um valor não distinguido.

Temos ainda as regras de sequentes (S3) para $\mathcal{L}$, as quais são obtidas diretamente das regras de *tableaux* da seguinte forma:

Seja Ω um ramo, da regra de *tableau* ρ com o conectivo k e valor lógico i, denotado por $\rho(k, i)$ e S um sequente. Denotamos por S/Ω o novo sequente obtido adicionando as fórmulas marcadas A_{v_i} nos seguintes locais apropriados de S:

$$\Theta_1 \wedge \cdots \wedge \big(\Theta_{v_1}, A_{v_1}\big) \wedge \cdots \wedge \big(\Theta_{v_s}, A_{v_s}\big) \wedge \cdots \wedge \Theta_d \Rightarrow \Theta_{d+1} \vee \cdots \vee \big(\Theta_{v_{s+1}}, A_{v_{s+1}}\big) \vee \cdots \vee \big(\Theta_{v_r}, A_{v_r}\big) \vee \cdots \vee \Theta_n$$

Então considerando todos os ramos Ω_i obtemos a seguinte regra de sequente:

$$\frac{S/\Omega_1, S/\Omega_2, \cdots, S/\Omega_r}{S/K(A_1, A_2, \cdots, A_m)}$$

sendo $S/K(A_1, A_2, \cdots, A_m)$ um sequente, obtido a partir do sequente S, adicionando o conectivo K, da regra de *tableau* ρ utilizando as fórmulas $A_1 a\ A_m$, da seguinte forma:

$$\Theta_1 \wedge \cdots \wedge \big(\Theta_i, K(A_1, A_2, \cdots, A_m)\big) \wedge \cdots \wedge \Theta_d \Rightarrow \Theta_{d+1} \vee \cdots \vee \Theta_n$$

se a valoração i do conectivo k for distinguido. Ou ainda:

$$\Theta_1 \wedge \Theta_2 \wedge \cdots \wedge \Theta_d \Rightarrow \Theta_{d+1} \vee \big(\Theta_i, K(A_1, A_2, \cdots, A_m)\big) \vee \cdots \vee \Theta_n,$$

se a valoração i do conectivo k for não distinguido.

Se denotamos por S/i o sequente obtido de S adicionando uma sentença A na posição Θ_i, temos a seguinte regra do corte para sistemas de sequentes:

$$\frac{S/1,\ S/2, \cdots, S/n}{S}$$

Uma derivação de sequente denotada por $\Sigma\ \vdash_S A$ é uma coleção de sequentes, obtida a partir dos axiomas de sequentes e através das regras de sequentes, cujos sequentes finais tem a forma:

$$\Theta_1 \wedge\ \Theta_2 \wedge\ \cdots\ \wedge\ \Theta_d \Rightarrow A \vee A \vee \cdots \vee A$$

para todas as decomposições desta forma em que $\Sigma = \bigcup_{1 \leq i \leq d} \Theta_i$.

E ainda temos uma demonstração de sequente denotada por $\vdash_S A$ como uma coleção de sequentes, obtida a partir dos axiomas de sequentes e através das regras de sequentes, cujos sequentes finais tem a forma:

$$\Rightarrow A \vee A \vee \cdots \vee A$$

A partir das observações acima, segundo Carnielli (1991), fica claro que os axiomas de sequentes são válidos e que as regras de sequentes transformam sequentes válidos em sequentes válidos; então, Carnielli (1991) demonstrou os seguintes resultados:

Lema 3.2: Qualquer sistema de sequentes é correto.

A partir do Lema 3.1 e Lema 3.2, mais a completude do método de *tableau*, apresentado em Carnielli (1987), foi demonstrado em Carnielli (1991) que:

Teorema 3.1 (Adequação entre sistemas de tableaux e sequentes):

$$\Sigma\ \vdash_T A \text{ se, e somente, } \Sigma\ \vdash_S A.$$

Em que $\Sigma\ \vdash_T A$ denota que no sistema de *tableaux* T a fórmula A é consequência analítica de um conjunto de fórmulas Σ; e $\Sigma\ \vdash_S A$ denota que no sistema de sequentes S, a fórmula A é deduzida de um conjunto de fórmulas Σ.

Segundo Carnielli (1991), a regra de corte para sistemas de sequentes é equivalente à regra de corte para sistemas de *tableau*; em razão das demonstrações nos sistemas de *tableau* poderem ser traduzidas passo a passo em sistemas de sequentes, obtemos do Teorema 3.1 o seguinte:

Teorema 3.2 (Eliminação de cortes para sistemas de sequentes):

Qualquer uso da regra de corte no sistema de sequentes é desnecessário, conforme apresentado em Carnielli (1991).

4 Sequentes a partir da formalização de *tableaux* segundo Smullyan

As definições apresentadas para um sistema de sequentes a partir dos *tableaux*, da seção anterior, serão utilizadas aqui para apresentar o cálculo de sequentes para um sistema proposicional clássico, contendo como operadores $\{\rightarrow, \neg, \wedge, \vee\}$, em que a partir das regras de *tableaux* introduzidas por Smullyan (1968), dualizaremos cada uma delas em suas respectivas regras de sequentes.

(1) Axioma de sequente próprio: [A1] $(\Gamma, \mathrm{A}) \Rightarrow (\Delta, \mathrm{A})$

Não existem axiomas de sequente não próprios, pois não temos na lógica clássica nenhum operador que não receba algum dos valores lógicos em sua tabela semântica.

(2) Regras de sequentes: A partir das seguintes regras de *tableaux* (T1, ⋯, T8) para a lógica proposicional clássica, apresentaremos as seguintes regras de sequentes (S1, ⋯, S8):

$$[T1]\ \frac{S,\ T(A \rightarrow B)}{S,\ F(A)\ \mid\ S,\ \mathrm{T}(B)} \qquad [S1]\ \frac{\Gamma \Rightarrow (\Delta, \mathrm{A});\quad (\Gamma, \mathrm{B}) \Rightarrow \Delta}{(\Gamma,\ A \rightarrow B) \Rightarrow \Delta}$$

$$[T2]\ \frac{S,\ F(A \rightarrow B)}{\begin{array}{c} S,\ T(A) \\ S,\ \mathrm{F}(B) \end{array}} \qquad [S2]\ \frac{(\Gamma, \mathrm{A}) \Rightarrow (\Delta, \mathrm{B})}{\Gamma \Rightarrow (\Delta,\ A \rightarrow B)}$$

$$[T3]\ \frac{S,\ T(\neg A)}{S,\ F(A)} \qquad [S3]\ \frac{\Gamma \Rightarrow (\Delta, \mathrm{A})}{(\Gamma, \neg \mathrm{A}) \Rightarrow \Delta}$$

$$[T4]\ \frac{S,\ F(\neg A)}{S,\ T(A)} \qquad [S4]\ \frac{(\Gamma, \mathrm{A}) \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow (\Delta, \neg \mathrm{A})}$$

$$[T5]\ \frac{S,\ T(A \wedge B)}{\begin{array}{c} S,\ T(A) \\ S,\ T(B) \end{array}} \qquad [S5]\ \frac{(\Gamma, \mathrm{A}, B) \Rightarrow \Delta}{(\Gamma,\ A \wedge B) \Rightarrow \Delta}$$

$$[T6]\ \frac{S,\ F(A \wedge B)}{S,\ F(A)\ \mid\ S,\ F(B)} \qquad [S6]\ \frac{\Gamma \Rightarrow (\Sigma, \mathrm{A});\quad \Gamma \Rightarrow (\Delta, B)}{\Gamma \Rightarrow (\Delta,\ A \wedge B)}$$

$$[T7]\ \frac{S,\ T(A \vee B)}{S,\ T(A)\ \mid\ S,\ T(B)} \qquad [S7]\ \frac{(\Gamma, \mathrm{A}) \Rightarrow \Sigma;\quad (\Gamma, B) \Rightarrow \Delta}{(\Gamma,\ A \vee B) \Rightarrow \Delta}$$

$$[T8]\ \frac{S,\ F(A \vee B)}{\begin{array}{c} S,\ F(A) \\ S,\ F(B) \end{array}} \qquad [S8]\ \frac{\Gamma \Rightarrow (\Delta, \mathrm{A}, B)}{\Gamma \Rightarrow (\Delta,\ A \vee B)}$$

Temos ainda a regra de corte, admissível, mas desnecessária:

$$[Corte]\ \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta;\quad \Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

Apresentaremos como exemplos de dedução no sistema de sequentes introduzido nesta seção, as deduções das seguintes fórmulas:

Exemplo 1. $\vdash_S\ (\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{A}) \rightarrow \mathrm{B}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \Rightarrow A, B}\,[A1]}{A, \neg A \Rightarrow B}\,[S3]}{(\, A \wedge \neg A\,) \Rightarrow B}\,[S5]}{\Rightarrow (\, A \wedge \neg A\,) \rightarrow B}\,[S2]$$

Exemplo 2. $\vdash_S \ (A \rightarrow B) \rightarrow (\, (C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)\,)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{C \Rightarrow A, B, C}\,[A1] \quad \dfrac{}{B, C \Rightarrow B, C}\,[A1]}{C, A \rightarrow B \Rightarrow B, C}\,[S1] \qquad \dfrac{\dfrac{}{A, C \Rightarrow A, B}\,[A1] \quad \dfrac{}{A, B, C \Rightarrow B}\,[A1]}{A, C, (A \rightarrow B) \Rightarrow B}\,[S1]}{C, (C \rightarrow A), (A \rightarrow B) \Rightarrow B}\,[S1]}{(C \rightarrow A), (A \rightarrow B) \Rightarrow (C \rightarrow B)}\,[S2]}{(A \rightarrow B) \Rightarrow (\, (C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)\,)}\,[S2]}{\Rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (\, (C \rightarrow A) \rightarrow (C \rightarrow B)\,)}\,[S2]$$

5 Considerações Finais

A partir da sistematização apresentada, podemos introduzir sistemas de sequentes a partir de sistemas de *tableaux* de qualquer sistema lógico com *n* valores. Os quais apresentam como um sistema de prova de teoremas, caracterizado como um algoritmo, sendo mais aplicável do ponto de vista computacional, do que os sistemas apresentados em sistema hilbertiano. Como trabalho futuro, propomos apresentar um sistema de sequentes para o sistema trivalorado e maximal fracamente intuicionista I1, apresentado inicialmente por Sette e Carnielli (1995) em sistema hibertiano.

6 Agradecimentos

Agradecemos à FAPESP pelo fomento a nossa pesquisa (Processo nº 2019/15963-5).

7 Referências

CARNIELLI, W. A. On sequents and tableaux for many-valued logics. **Journal of Non-Classical Logic**, v. 8, n. 1, p. 59-76, 1991.

CARNIELLI, W. A. Systematization of finite many-valued logics through the method of tableaux. **The Journal of Symbolic Logic**, v. 52, n. 2, p. 473-493, 1987.

FITTING, M. **First-order logic and automated theorem proving**. New York: Springer-Verlag, 1996.

GENTZEN, G. **The collected papers of Gerhard Gentzen**. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1969.

SANTOS, J. B. **Infraestrutura para provadores interativos de teoremas na Web**. 2010. Dissertação (Mestrado em Informática) – Centro Técnico e Científico, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2010.

SETTE, A. M.; CARNIELLI, W. A. Maximal weakly-intuitionistic logics. **Studia Logica**, v. 55, p. 181-203, 1995.

SMULLYAN, R. M. **First-order logic**. New York: Springer-Verlag / Dover Publication, 1968.