Revista Eletrônica Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 21, dez. 2021

Bruno Aparecido Pim
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
b.pim@unesp.br

Lucas Lopes Gueiros de Souza
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
lopes.gueiros@unesp.br

Thais Fernanda Mendes Monis
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
thais.monis@unesp.br

Uma breve introdução à teoria dos jogos

A brief introduction to game theory

Resumo

Nesse artigo, trazemos conceitos basilares da Teoria dos Jogos como o conceito de jogo, o equilíbrio de Nash e as relações de preferência racionais. Veremos que, do ponto de vista da Teoria dos Jogos, sempre que um conjunto de indivíduos, empresas, etc., estiver em uma situação de interdependência recíproca, em que as decisões tomadas por cada agente influenciam não somente o seu próprio resultado como também os resultados dos demais envolvidos, esses agentes encontram-se em um jogo. A partir daí, a pergunta que se coloca é se haveria um "princípio fundamental", um conceito de solução, o qual pudesse ser aplicado a todas as situações de interdependência recíproca, de modo a prever seu desfecho. Veremos que essa pergunta foi respondida pelo brilhante matemático John Forbes Nash Jr. com o seu conceito de equilíbrio para jogos não-cooperativos. Ainda, sobre o conceito de preferências racionais, apresentamos a sua definição e o conhecido Paradoxo de Condorcet, o qual nos mostra que as preferências racionais de cada indivíduo não induzem uma relação de preferência racional do coletivo.
Palavras-chave: Teoria dos Jogos, Batalha do Mar de Bismarck, Equilíbrio de Nash, Paradoxo de Condorcet

Abstract

In this article, we bring basic concepts of Game Theory such as the concept of a game, a Nash equilibrium and rational preference relations. We will see that, from the point of view of Game Theory, whenever a set of individuals, companies, etc., is in a situation of reciprocal interdependence, in which the decisions taken by each agent influence not only its own result but also the results of the others involved, these agents are in a game. From there, the question that arises is whether there would be a "fundamental principle", a concept of solution, which could be applied to all situations of reciprocal interdependence, in order to predict its outcome. We will see that this question was answered by the brilliant mathematician John Forbes Nash Jr. with his concept of equilibrium for non-cooperative games. Moreover, on the concept of rational preferences, we present its definition and the well-known Condorcet Paradox, which shows us that the rational preferences of each individual do not induce a rational preference relation of the collective
Keywords: Game Theory, Battle of the Sea of Bismarck, Nash Equilibrium, Condorcet Paradox.

Artigo recebido em ago. 2021 e aceito em out. 2021

1 Introdução

A Teoria dos Jogos pode ser vista como um ramo da Matemática Aplicada que se encarrega da construção de modelos que descrevem situações de conflito ou de cooperação entre tomadores de decisão racionais. Racionalidade aqui significa que cada envolvido toma suas decisões com o objetivo de maximizar algum tipo de ganho pessoal. A força motriz da Teoria dos Jogos é a busca por uma abordagem unificada no tratamento de qualquer situação de interação estratégica, e de um princípio universal que nos leve a prever os possíveis desdobramentos em cada uma dessas situações. Seja numa partida de xadrez, num jogo de pôquer, num encontro internacional onde líderes mundiais se reúnem para discutir sobre a diminuição de emissão de CO_2 na atmosfera, ou numa disputa eleitoral, por exemplo, uma característica importante comum a todas essas situações é a seguinte: em todas elas, temos um conjunto de indivíduos ou organizações envolvidos em uma situação de *interdependência recíproca*, em que as decisões tomadas por cada um não influenciam apenas no seu ganho final mas também nos ganhos e perdas dos demais envolvidos, e vice-versa. Sempre que um conjunto de indivíduos, empresas, partidos políticos etc., estiver em uma situação de interdependência recíproca, em que as decisões tomadas por cada agente influenciam não somente o seu próprio resultado como também os resultados dos demais envolvidos, diremos que esses agentes encontram-se em um **"JOGO"**.

Ao longo da história, são vários os precursores do que conhecemos hoje por Teoria dos Jogos. Acredita-se que o primeiro, talvez, a elaborar elementos importantes, os quais seriam formalizados e aplicados futuramente por outros estudiosos, tenha sido o matemático francês Antoine Augustin Cournot (1801-1877), que publicou em 1838 seu livro *Recherches sur les Príncipes Mathématiques de la Théorie des Richesses*. Outro precursor da Teoria dos Jogos foi o matemático alemão Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953). Zermelo demonstrou que o jogo de xadrez sempre tinha uma solução, ou seja, não importa a posição das peças no tabuleiro de ambos jogadores, um deles tem sempre uma estratégia vitoriosa, independente do que o outro faça, técnica de solução que ficaria conhecida como indução reversa. Um terceiro precursor a ser lembrado é o matemático francês Félix Edouard Justin Emile Borel (1871-1956). Borel uma vez escreveu: "Os problemas de probabilidade e análise que se propõem com relação à arte da guerra, ou especulações econômicas e financeiras, não são isentos de analogia com os problemas que dizem respeito a jogos, embora possuam um maior grau de complexidade".

Apesar desses precursores, a origem da teoria dos jogos está diretamente relacionada ao nome do matemático John von Neumann (1903-1957). A sua primeira publicação sobre jogos foi em 1928, com o artigo intitulado *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, na revista *Mathematische Annalen*. Nesse artigo, von Neumann demonstra que em jogos de soma zero (ou seja, jogos em que o ganho de um jogador representa necessariamente perda para o outro), pode ser determinada uma solução utilizando-se técnicas matemáticas. Em 1944, juntamente com Oskar Morgenstern (1902-1977), John von Neumann publica o livro que é considerado a pedra fundamental no nascimento da Teoria dos Jogos como um ramo de pesquisa: *The Theory of Games and Economic Behavior*.

Os fundadores da Teoria dos Jogos, John von Neumann e Oskar Morgenstern, haviam dado um passo importante: propuseram que toda situação de interação estratégica poderia ser formulada como um modelo matemático de um jogo. O próximo passo seria o de encontrar um conceito de solução, um princípio fundamental, que pudesse ser aplicado a todos os jogos estratégicos. Seis anos após a pubicação do *The Theory of Games and Economic Behavior*, o problema ainda permanecia em aberto. A resposta foi dada em 1950 pelo brilhante matemático John Forbes Nash Jr. (1928-2015) em sua tese de doutorado. No artigo *Non-Cooperative Games*, publicado em 1951 no *Annals of Mathematics*, Nash apresenta a sua noção de equilíbrio para jogos não-cooperativos, o qual não se restringia apenas aos jogos de soma zero. No mesmo artigo, como uma aplicação do Teorema de ponto fixo de Brouwer, Nash demonstra a existência do equilíbrio para todo jogo em estratégias mistas.

Pós Nash, outros nomes aparecem, e o desenvolvimento da teoria se torna cada vez mais fino. No que se refere ao economista húngaro John C. Harsanyi (1920-2000), sua principal contribuição se dá a partir de seu trabalho intitulado *Games with Incomplete Information Played by Bayesian Players*. A novidade aqui está em incorporar aos modelos o fato de que, muitas vezes, alguns jogadores dispõem de informação privilegiada em relação aos demais sobre algum elemento importante do jogo. O matemático e economista alemão Reinhard Selten (1930-2016), em seu artigo publicado em 1965 intitulado *Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit*, foi responsável por um refinamento da noção de equilíbrio que ficou conhecido como **equilíbrio perfeito em subjogos**, significando que uma determinada estratégia, para ser considerada um equilíbrio perfeito em subjogos, tem de ser ótima considerando-se todos os possíveis desdobramentos do processo de interação estratégica. O matemático Robert J. Aumann foi responsável por demonstrar que se a relação entre os indivíduos ou as organizações têm uma boa chance de durar por tempo indeterminado e caso não haja uma grande pressa de ganhos em curto prazo, a cooperação deve se estabelecer, mesmo em uma situação como a do chamado **Dilema do prisioneiro**.

A Teoria dos Jogos é aplicada a numerosos campos, incluindo economia, ciência política, psicologia, sociologia, biologia e ciência da computação. Mas, afinal, o que é um jogo? Como são tratadas as situações de interdependência estratégica dentro da Teoria dos Jogos? Existe um princípio fundamental a reger todas as situações de interdependência estratégica? Pretendemos lançar luz a essas questões nas seções que se seguem.

2 O que é um jogo?

Desde crianças, somos familiarizados com todo tipo de jogos: jogos de tabuleiro tais como o jogo de xadrez ou o jogo de damas, jogos de cartas tais como o *Uno* ou jogos de baralho, bem como jogos eletrônicos e jogos esportivos. O fato é que, em contextos além desses de recreação, encontramos comumente a linguagem dos jogos sendo empregada. São expressões tais como *o jogo de poder*, *o jogo político*, *competição entre empresas*, etc. Podemos notar que não há muita diferença entre uma partida de xadrez e uma reunião de negócios entre duas multinacionais. Em ambos os casos, cada envolvido está ali munido de objetivos, preferências, estratégias... há uma situação de interação estratégica marcada por uma **interdependência recíproca**, ou seja, na qual as decisões tomadas por cada um dos envolvidos não influenciam apenas no seu resultado mas também no resultado do outro, e vice-versa.

Formalmente, em Teoria dos Jogos, um **jogo na forma normal** possui o seguinte entendimento.

Definição 1 *Um* ***jogo*** *constitui-se de três elementos:*

- *um conjunto finito de* ***jogadores****: que denotaremos por* $N = \{1, 2, ..., n\}$.
- ***conjuntos de estratégias*** $S_1, S_2, ..., S_n$*: cada jogador i possui um conjunto* S_i *de ações ou estratégias.*
- ***funções recompensa (payoff)*** $v_1, v_2, ..., v_n$*: para cada jogador i, a sua função recompensa é uma função* $v_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ *que, a cada configuração de estratégias dos jogadores,* $s = (s_1, \cdots, s_n) \in S_1 \times \cdots \times S_n$*, associa um valor (recompensa, lucro, medida de satisfação, etc.)* $v_i(s)$ *correspondente do jogador i.*

Notação e nomenclatura: O produto cartesiano dos espaços de estratégia, $S_1 \times \cdots \times S_n$, será denotado por S. Os elementos de S são chamados de perfis de estratégia. Ainda, utilizaremos a seguinte notação: dado $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n) \in S$,

$$(s_i, \tilde{s}_{-i}) \in S$$

denotará o ponto

$$(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, s_i, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n)$$

de S que é obtido de $\tilde{s}$ trocando-se a sua i-ésima coordenada $\tilde{s}_i$ por s_i.

Em muitas situações de interação estratégica, o ganho do jogador i, dada a configuração estratégica s, pode ter mais um significado abstrato do que algo concreto tal como um número real $v_i(s) \in \mathbb{R}$. Nessas situações, o estudo da interação dar-se-á compreendendo-se a relação de preferência de cada jogador quanto às possíveis configurações estratégicas do jogo. Assim, na Definição 1, em vez de funções payoff, poder-se-á apresentar as relações de preferência de cada jogador sobre o conjunto $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ de todas as configurações estratégicas possíveis. No entanto, as relações de preferência devem satisfazer certas condições, as quais trataremos na subseção que se segue.

2.1 Ações, resultados e preferências

Imagine que você esteja no início do ano letivo e vá à papelaria para comprar os materiais. No momento de comprar as canetas se depara com uma dúvida: azul ou preta? Ou então, se imagine indo almoçar e tendo que escolher entre suco ou refrigerante para beber. Supondo que prefira azul ao preto, e que esteja em uma reeducação alimentar, fica claro que as escolhas seriam pela caneta azul e o suco. Essas situações triviais são exemplos de um *problema de decisão*. Diariamente nos deparamos com esses problemas, sejam em situações individuais ou em grupo (como empresas ou outras organizações). Porém, nem todas as situações são facilmente resolvidas como nos exemplos acima. A escolha entre um isolamento vertical ou horizontal durante uma pandemia é um bom exemplo de como uma decisão pode exigir uma complexidade de análise maior, uma vez que diversos fatores tais como saúde e economia entrariam na balança na hora dessa decisão.

Nos exemplos da escolha da caneta e da bebida para o almoço, as dinâmicas são semelhantes. Um indivíduo (jogador) está frente a uma situação onde se faz necessária uma escolha (ação). Cada escolha fará com que o indivíduo obtenha um resultado (satisfação) diferente. Duas perguntas são necessárias para modelarmos essas situações: Quais são as ações possíveis? O quão "feliz" estará o indivíduo diante de cada ação? Assim, de acordo com essas questões, podemos definir um modelo para um problema de decisão que é dado por:

Ações: são todas as escolhas (ou estratégias) de um jogador. Representaremos suas ações pelo conjunto A.

Preferências: descrevem o quão satisfeito estará o jogador com as consequências de cada ação. Dadas as ações a e b, $a \geq b$ significará que "a deve ser pelo menos tão bom quanto b".

Usaremos essa linguagem para reescrever um exemplo anterior. Na primeira situação, o jogador possui um conjunto com duas opções de escolha, ($A = \{\text{azul}, \text{preta}\}$). Dado que o indivíduo prefere caneta azul à caneta preta, azul $\geq$ preto.

Existirão também as situações de preferência estrita, quando escreveremos $x \succ y$ (leia-se "x é estritamente preferível a y") e situações de indiferença, quando escreveremos $x \sim y$ (leia-se: "x e y são igualmente bons").

Para que uma relação binária seja considerada uma **relação de preferência racional**, dois axiomas são impostos.

1. O Axioma da Completitude: Uma relação de preferência $\succeq$ é completa: qualquer par de retornos $x, y \in X$ pode ser ordenado pela relação de preferência, ou seja, $x \succeq y$ ou $y \succeq x$.

2. O Axioma da Transitividade: Uma relação de preferência $\succeq$ é transitiva : para qualquer três retornos $x, y, z \in X$, se $x \succeq y$ e $y \succeq z$, então $x \succeq z$.

Perceba que os axiomas nos impedem de entrar em uma situação de indecisão ou de incoerência.

2.2 Sobre as funções recompensa (payoff)

Para entendimento, iremos supor outra situação. Imagine que você faz salgados para vender e precisa escolher o melhor recheio em relação a custo-benefício. O salgado de frango custará R\$ 1,00, e será vendido por R\$ 4,00; o de calabresa custará R\$ 1,20 e será vendido por R\$ 4,10. Por fim, o salgado de queijo possui custo de R\$ 1,15 e é vendido a R\$ 4,20. Teremos então $A = \{f, c, q\}$, onde f representa o recheio de frango, c o de calabresa e q o de queijo. Como nosso objetivo é o de obter maior lucro, a relação de preferência sobre os recheios se dará do seguinte modo: $q \succeq f \succeq c$, dado que o lucro obtido na venda de um salgado de frango é de 3 reais, $2,90$ é o lucro obtido na venda de um salgado de calabresa e $3,05$ é o lucro obtido na venda de um salgado de queijo. Nesse exemplo, é evidente que a dinâmica ação-preferência fica totalmente contemplada através da função lucro.

Definição 2 *A função payoff $v : X \to \mathbb{R}$ representa a relação de preferência $\succeq$ se para qualquer par $a, b \in A$, $v(a) \geq v(b)$ se, e somente se, $a \succeq b$.*

Veja que, no exemplo anterior, a função lucro $v(f) = 3$, $v(c) = 2.9$ e $v(q) = 3.05$ representa a relação de preferêcia sobre os recheios de salgado.

Usando funções payoff ao invés de relações de preferência sobre as ações, as análises se tornarão mais operacionais. O jogador racional sempre optará por uma ação que maximize a sua função payoff.

Proposição 3 *Se o conjunto de ações A é finito então qualquer relação de preferência racional sobre A pode ser representada por uma função payoff.*

2.3 O paradigma da escolha racional

Com a ideia de relação de preferência racional e de função payoff bem definida, podemos então introduzir o Homo economicus - aquele cujo comportamento é sempre tomar decisões baseadas em seu próprio bem-estar, ou seja, é aquele que sempre escolherá as ações que possuem o maior retorno; isso é conhecido como o paradigma da decisão racional. Esse comportamento se aplica não somente aos seres humanos, mas também para empresas, corporações, etc. Ao adotar a ideia do paradigma, fazemos algumas suposições:

Suposições de Escolha Racional: o jogador entende completamente o problema de decisão ao conhecer:

- Todas as ações possíveis, A;
- Como cada ação implica em um retorno diferente;
- Sua relação de preferência sobre os retornos.

3 A batalha do Mar de Bismarck

3.1 Contextualização

Em Dezembro de 1942, durante a Segunda Guerra Mundial, após uma derrota do Japão em Guadacanal, seu exército precisava de reforços para se protegerem da próxima ofensiva do exército inimigo, da mesma forma que precisariam de mais pessoas para avançarem contra os mesmos.

Desta forma, o alto comando de guerra japonês decidiu enviar um grande número de reforços da China e do Japão para Lae, em Papua- Nova Guiné, o qual continha oito destróieres, oito transportadores de tropas, mais 100 aviões de escolta para a operação e cerca de 6.900 soldados para ajudar no apoio do comboio, isso porque certamente o exército inimigo não permitiria que esse comboio chegasse no seu destino, não sem pelo menos causar estrago nas tropas do comboio japonês.

O Comboio, até chegar em Lae, seu destino, teria duas rotas para seguir: a rota sul, que apresentava um clima bom e uma visibilidade boa, ou a rota norte, que apresentava um tempo ruim e uma baixa visibilidade. Este é um ponto importante de se ressaltar, pois o Exército Aliado (exército inimigo do exército japonês), possuía apenas aviões de reconhecimento para pesquisar uma rota por vez, sendo que a busca em qualquer uma das rotas consumia um dia inteiro.

Abaixo está uma figura que mostra quais eram as opções de rotas do comboio.

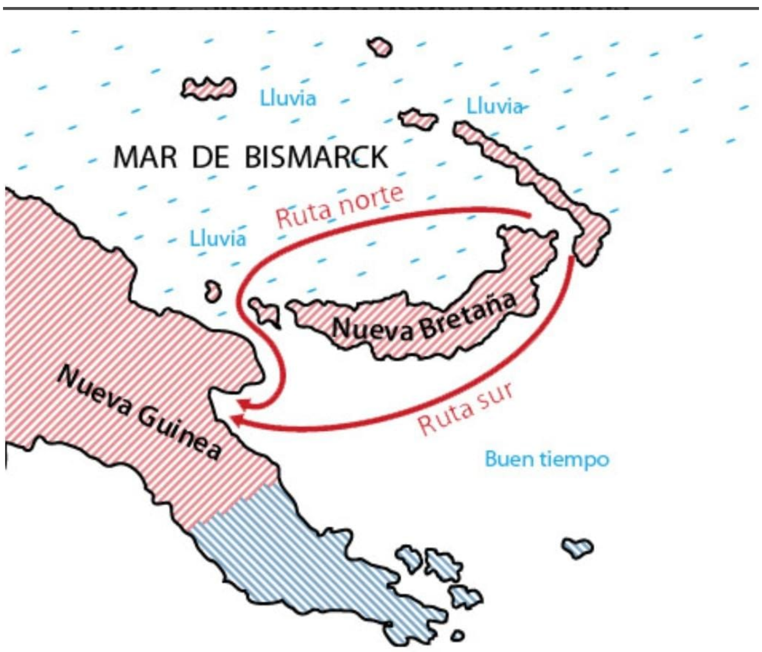

Figura 1: Rotas do Mar de Bismarck

Conhecendo o contexto da batalha, partiremos agora para entender as situações possíveis da batalha.

3.2 Situações possíveis

As situações que poderiam ocorrer nessa batalha dependiam de por onde os aviões de reconhecimento e o comboio escolhessem ir. Se as forças aliadas escolhessem ir pela rota certa, poderiam começar o ataque em seguida. Porém, se enviassem os aviões para a rota errada, perderiam um dia de bombardeio. Os aliados também sabiam que se os japoneses escolhessem o sul e fossem localizados de imediato, o bom tempo garantiria três dias de bombardeio. No entanto, se os japoneses tivessem escolhido a rota norte, mesmo que os aliados os localizassem logo no primeiro dia de buscas, o mau tempo permitiria apenas dois dias de bombardeio.

Caso os japoneses escolhessem seguir pela rota sul e os aviões de reconhecimento dos aliados fossem enviados para a rota norte, eles perderiam um dia de bombardeio devido a seguirem pela rota errada mas, ainda sim, teriam dois dias de ataque ao comboio devido o tempo bom na rota sul.

O pior cenário para o exército aliado seria aquele em que os aviões de reconhecimento fossem enviados para a rota sul, porém os japoneses escolhessem a rota norte, fazendo com que o comboio sofresse apenas um dia de bombardeio.

Se você fosse do alto comando do exército dos Aliados e tivesse de decidir por qual rota enviar os aviões de reconhecimento, qual das rotas escolheria?

Com as opções estratégicas e os desfechos em cada uma das configurações estratégicas explicados, vejamos quais foram os movimentos feitos por cada um dos exércitos.

3.3 Resolução da batalha

No dia 01/03/1943, um bombardeiro de patrulha B-24 Liberator (avião de reconhecimento aliado) avistou o comboio japonês seguindo pela rota norte, encontrando-os ainda no primeiro dia. Após avistados, o exército aliado enviou bombardeiros para infligir dano ao comboio japonês, mas devido o mau tempo, acabaram não localizando a posição exata dos reforços que passaram pelo primeiro dia sem sofrer danos. No dia seguinte, após ter novamente a localização do comboio, vários B-17 Fortalezas Voadoras atacam os japoneses, que tiveram, assim, as primeiras baixas de soldados e perdas de suprimentos. Nesse primeiro ataque sofrido, os japoneses perderam cerca de 700 soldados e navios de suprimentos e transporte foram afundados. Ainda no dia 02/03/1943, dois destróieres (o Yukikaze e o Asagumo), vão na frente do restante do comboio japonês para desembarcar os soldados sobreviventes em Lae, retornando naquele mesmo dia. Enquanto os destróieres faziam esse trajeto separado, o comboio sofria com bombardeios esporádicos. O dia 3 de março foi um dia de ataques pesados. O primeiro ataque foi por volta das 10 horas da manhã, quando Fortalezas Voadoras bombardearam os navios japoneses, fazendo com que os navios do comboio se dispersassem para que não fossem pegos juntos, atrasando assim o tempo de viagem do comboio japonês. O próximo ataque foi maciço e focado, no qual 13 Beaufighters armados com quatro canhões de 20 milímetros e seis metralhadoras atacaram e danificaram as defesas antiaéreas dos navios japoneses e, consequentemente, causando ainda mais baixas de soldados japoneses. Ainda pela manhã, foram enviados para bombardear o comboio japonês: 13 US B-25 Mitchells, o lançamento de torpedos de aviões B-25 modificados para ataques a baixa altitude, ataques de aviões USAAF A-20 e novos bombardeios de B-17. Entretanto, ainda não acabaram os ataques aos japoneses naquele dia, à tarde, ainda tiveram ataques com aviões Mitchells e RAAF Bostons. Após tantos ataques sofridos do lado japonês, todos os transportadores de tropas foram afundados, juntamente com os destróieres Shirayuki, Arashio e Tokitsukaze. Posteriormente, o destróier Asagumo foi afundado depois que foi pego de surpresa por um ataque dos aviões do exército aliado enquanto tentavam recolher os sobreviventes do Arashio.

Mesmo depois do término de dois dias de ataques, aviões ainda eram enviados para bombardear os navios de resgate japoneses. Essa ação por parte do exército aliado acabou sendo questionada como uma evidente quebra da Convenção de Genebra (tratado internacional que, dentre suas várias diretrizes, oferece uma proteção para militares capturados ou feridos), mas que futuramente foi justificada pelos aliados, que afirmaram que estes resgatados ainda poderiam se rearmar e serem enviados à linha de combate da guerra.

Entre todos os navios enviados no comboio, apenas quatro destróieres conseguiram retornar até o ponto de partida, em Rabaul. A batalha tinha sido um desastre para o Japão. Nos dados finais, todos os navios de transporte e quatro destróieres foram afundados, apenas 800 soldados conseguiram chegar a seu destino em Lae. Calcula-se a perda de soldados e marinheiros japoneses em cerca de 2.900 homens.

A Batalha de Bismarck, em particular, é estudada até os dias de hoje na área de Teoria dos Jogos. Para entender um pouco melhor a complexidade desta batalha, faremos um modelo das opções e consequências dela.

3.4 Modelagem da batalha

Segundo Fiani (2015, p. 4): "Um modelo nada mais é do que uma representação simplificada de um objeto de estudo, no caso, de uma situação de interação estratégica, em que a situação é apresentada de forma simplificada, em que propositadamente alguns elementos são destacados, enquanto outros são omitidos".

A omissão de algo durante a realização de um modelo acontece principalmente devido a grande complexidade de fatos e detalhes que temos em uma história como a Batalha de Bismarck, por exemplo. Claro que, ao fazer isso, corremos o risco de omitir algum detalhe ou um dado importante, que julgamos não ser relevante para a modelagem, e, com isso, acabamos chegando a conclusões equivocadas.

Na teoria dos jogos, temos algumas formas de modelar uma situação de interação estratégica. Abaixo, temos um modelo bem simples para analisarmos a Batalha do Mar de Bismarck, representado na tabela a seguir.

Forças Aliadas	Comboio Japônes	
	Rota Sul	Rota Norte
Busca rota Sul no primeiro dia	3 dias de bombardeio	1 dia de bombardeio
Busca rota Norte no primeiro dia	2 dias de bombardeio	2 dias de bombardeio

Tabela 1: A Batalha do Mar de Bismarck

Na Tabela 1, foi listado as rotas possíveis que o comboio japonês poderia seguir (representado nas colunas) e as rotas possíveis de onde os aviões de reconhecimento do exército aliado poderiam ir no primeiro dia (representado nas linhas).

3.5 Resultado do jogo

Vamos indicar as possíveis configurações de estratégias do exército aliado e do exército japonês via um par ordenado, onde as entradas podem assumir os valores N ou S, sendo N para indicar a rota norte e S para indicar a rota sul. A primeira coordenada corresponderá à rota utilizada pelas forças aliadas para enviar os aviões de reconhecimento no primeiro dia, e a segunda coordenada corresponderá à rota assumida pelo comboio japonês. Assim, as possibilidades são: (N, N), (N, S), (S, N) e (S, S). Sobre essas possibilidades, a relação de preferência dos Aliados (jogador 1) é dada por

$$(S, S) \succ_1 (N, S) \succeq_1 (N, N) \succ_1 (S, N).$$

E a relação de preferência do exército japonês (jogador 2) sobre essas possibilidades é

$$(S, N) \succ_2 (N, N) \succeq_2 (N, S) \succ_2 (S, S),$$

dado que os ganhos dos Aliados constituem em perdas para os japoneses. Essas relações de preferência poderiam ser também representadas através de funções payoff, como, por exemplo, $v_1(S, S) = 3$, $v_1(N, S) = v_1(N, N) = 2$, $v_1(S, N) = 1$, $v_2(S, S) = -3$, $v_2(N, S) = v_2(N, N) = -2$, $v_2(S, N) = -1$. A pergunta que se coloca é se haveria um "princípio fundamental", o qual pudesse ser aplicado a essa situação de modo a termos previsto o desfecho dessa batalha antes mesmo que ela ocorresse? Nessa direção, John Nash nos coloca a seguinte noção de equilíbrio de um jogo não-cooperativo:

Definição 4 (Equilíbrio de Nash) *Considere um jogo constituído de um conjunto de jogadores* $N = \{1, 2, \dots, n\}$*, cada jogador i com conjunto de estratégia* S_i *e função payoff* $v_i : S_1 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$.

O perfil de estratégia $s* = (s_1^*, s_2^*, ..., s_n^*) \in S$ *é um Equilíbrio de Nash se* s_i^* *é a melhor resposta de* s_{-i}^**, para qualquer* $i \in N$*, ou seja,*

$$v_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq v_i(s_i', s_{-i}^*), \text{ para qualquer } s_i' \in S_i \text{ e qualquer } i \in N.$$

Na Batalha de Bismarck, a dinâmica é a seguinte: dado que os Aliados tomem a rota sul, a melhor situação para os japoneses é a rota norte. Dado que os Aliados tomem a rota norte, os japoneses são indiferentes quanto às rotas norte e sul.

Já do ponto de vista dos Aliados, dado que os japoneses tomam a rota sul, a melhor situação é se eles tiverem tomado a rota sul também, e na situação em que os japoneses tomam a rota norte, a melhor situação é se eles tiverem tomado a rota sul também. Vemos assim que o único perfil de estratégias (s_1^*, s_2^*) tal que s_i^* é a melhor resposta de s_{-i}^*, para qualquer $i \in \{1, 2\}$ é o perfil de estratégias (N, N), ou seja, o único equilíbrio de Nash desse jogo é o perfil de estratégia (N, N), situação que de fato concretizou-se na Batalha de Bismarck.

Podemos pensar que o exército Aliado somente "adivinhou" por onde os japoneses iriam, que as chances de acertar era de 50%, e acabaram tendo sorte mas, na verdade, o que foi usado ali foi uma lógica da situação. Segundo o filósofo austríaco Karl Popper (1902-1994), a lógica da situação ou lógica situacional "busca compreender objetivamente a lógica de uma determinada situação de interação entre indivíduos, ou organizações, a partir dos dados objetivos dessa situação, sem analisar a subjetividade dos indivíduos envolvidos".

4 O dilema do prisioneiro

Um exemplo clássico na Teoria dos Jogos é o bem conhecido e estudado Dilema do Prisioneiro. Sua formulação dá-se do seguinte modo: existem dois jogadores (prisioneiros), I e II, que são chamados em salas isoladas para confessarem um crime que cometeram. A matriz de retorno (número de anos de prisão) é a seguinte:

Tabela 2: Dilema do Prisioneiro

I \ II	não confessa	confessa
não confessa	(1,1)	(3,0)
confessa	(0,3)	(2,2)

onde o par (a, b) indica a anos de prisão para I e b anos de prisão para II. O objetivo de cada prisioneiro, é claro, é passar o menor número de anos possível na prisão. O único equilíbrio de Nash para esse jogo é a situação em que ambos confessam o crime. Porém, solução mais interessante para ambos é aquela na qual ambos não confessam, que pode ser obtida caso os prisioneiros consigam agir de forma cooperativa entre si.

O jogo do dilema do prisioneiro pode ser usado como modelo para muitas situações do mundo real envolvendo comportamento cooperativo. Por exemplo, em situações em que duas entidades poderiam obter benefícios importantes por cooperar entre si, ou sofrer por não fazê-lo, mas acham difícil ou caro - não necessariamente impossível - coordenar suas atividades. Pense na crise climática que testemunhamos em nossos dias, por exemplo. Os estudos ambientais evidenciam a urgência de que as nações cooperem entre si num esforço conjunto para a diminuição de emissão de CO_2 na atmosfera (ALISSON, 2021). Apesar do argumento de que todos os países se beneficiarão de um clima estável, uma nação, sozinha, hesitará em assumir políticas de diminuição de emissão de CO_2 por medo de contração na sua economia se as nações restantes não assumirem o mesmo compromisso. O equilíbrio de Nash aqui, que é a previsão do que ocorrerá se as nações agirem de modo não-cooperativo, é que não haverá compromisso com uma tal agenda de diminuição de emissão de CO_2 na atmosfera, um resultado desastroso para todo o globo terrestre. Dado o problema, a questão que se coloca é: quais seriam os mecanismos necessários para garantir a cooperação entre as nações?

5 O paradoxo de Condorcet

Em eleições, não é incomum que estejamos sujeitos a surpresas em relação ao resultado final. O Paradoxo de Condorcet, também conhecido pelos economistas como Paradoxo da votação, nos adverte que, mesmo com as preferências racionais, estamos sujeitos a resultados surpreendentes.

O Paradoxo de Condorcet nos mostra que mesmo que a relação de preferência de cada indivíduo considerada isoladamente seja racional (e, portanto, transitiva), o mesmo não ocorre quando são utilizadas para formar a relação de preferência do grupo.

Para ilustrar o paradoxo, suponhamos um parlamento hipotético em que os deputados se dividem em três partidos, os quais serão denominados: Partido Conservador, Partido Moderado e Partido Radical. Esses deputados devem votar em um orçamento nacional, no qual terão de decidir se desejam:

a) Aumentar o número de programas sociais, que chamaremos de proposta A;

b) Manter o número de programas sociais, que chamaremos de proposta M;

c) Diminuir o número de programas sociais, que chamaremos de proposta D.

Assumiremos que deputados de um mesmo partido possuem a mesma relação de preferência com respeito às propostas acima, dadas na seguinte tabela:

Partido Conservador	D > A > M
Partido Moderado	M > D > A
Partido Radical	A > M > D

Tabela 3: As Preferências dos Partidos

Uma leitura para montarmos a tabela acima é a seguinte: o Partido Conservador prefere a situação de redução dos programas sociais a qualquer das demais situações. Não sendo possível o sucesso nessa linha, preferem logo depois o aumento no número dos programas sociais pois, assim, o governo aumentará a carga fiscal, o que acarretará em aumento de impostos para a população e, em última instância, repercutirá em pressão social para a redução desses programas. Por último, a pior opção para o partido é a de manter a quantidade de programas sociais pois, assim, não conseguirá nem implementar a redução dos gastos sociais no ano corrente e nem terá a perspectiva de fazê-lo no ano seguinte. No caso do Partido Moderado, a preferência é por manter a quantidade de programas sociais. Caso não seja possível, o partido prefere diminuir o número de programas a aumenta-los pois, para o partido, diminuir representa um risco menor do que aumentar. Por último, temos o Partido Radical, que defende o aumento do número dos programas sociais. Caso não seja possível, deve-se pelo menos manter o que se tem, sendo a diminuição, em sua leitura, o pior dos cenários.

Agora, vamos analisar como fica a relação de preferência do Parlamento (coletivo) com o respeito às propostas acima, induzida pelas relações de preferência de cada partido (indivíduo).

5.1 A relação de preferência do parlamento

Para obtermos a relação de preferência do Parlamento frente às propostas, devemos confrontá-las duas a duas:

a) Confronto A *versus* M

A partir da tabela, podemos notar que nesse confronto, o Partido Radical votaria em A (sua primeira preferência), o Partido Moderado votaria em M (sua primeira preferência) e o Partido Conservador votaria em A (sua segunda preferência, pois M é a sua última preferência). Com isso, A venceria com dois terços dos votos do Parlamento.

b) Confronto M *versus* D

Da tabela, podemos ver que o Partido Radical votaria em M (sua segunda preferência), o Partido Moderado votaria em M (sua primeira preferência) e o Partido Conservador votaria em D (sua primeira preferência). Com isso, M venceria com dois terços dos votos do Parlamento.

Até aqui, como A venceu M e M venceu D teríamos a seguinte ordem de preferências no Parlamento: A > M > D. Vamos agora para um terceiro confronto.

c) Confronto A *versus* D

Da tabela, podemos notar que o Partido Radical votaria em A (sua primeira preferência), o Partido Moderado votaria em D (sua segunda preferência) e o Partido Conservador votaria em D (sua primeira preferência). Com isso, D venceria com dois terços dos votos do Parlamento.

Expressando as preferências do Parlamento, temos que $A > M > D > A$, ou seja, notamos que estamos falando de uma preferência intransitiva, que fecha um ciclo. Portanto, não temos como afirmar que qualquer proposta expressa a preferência do Parlamento. Numa situação de rodadas de votação, em que são confrontas as propostas duas a duas, o resultado dependerá da ordem em que se estabelecerem os confrontos.

Notamos então que, mesmo que os deputados individualmente tenham preferências transitivas, obedecendo as condições da escolha racional, o mesmo não ocorre quando tomamos os deputados coletivamente.

6 Conclusão

A Teoria dos Jogos é uma área muito ampla e utilizada em diversas áreas de conhecimento, cujo interesse é o de compreender os fenômenos apresentados quando agentes de decisão interagem. Ela nos fornece a linguagem para estudarmos assuntos tais como eleições, leilões, balança de poder, evolução genética, etc. Nesse artigo, tratamos de conceitos introdutórios da área afim de familiarizar o leitor, bem como aguçar a sua curiosidade.

7 Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer os pareceristas anônimos pelo apontamento de algumas correções e pela sugestão de incluirmos uma discussão acerca do Dilema do Prisioneiro, o que certamente melhorou a versão original.

8 Referências Bibliográficas

ALISSON, E. **Mudanças climáticas já afetam todas as regiões do planeta, afirma IPCC**. São Paulo: Agência Fapesp, 2021. Disponível em: https://agencia.fapesp.br/mudancas-climaticas-ja-afetam-todas-as-regioes-do-planeta-afirma-ipcc/36533/. Acesso em: 24 set. 2021.

FIANI, R., **Teoria dos jogos:** com aplicações em economia, administração e ciências sociais. 4. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015.

POLICONOMICS. **Batalha del mar de Bismarck.** [*S. l.*]: Policonomics, 2017. Disponível em: https://bit.ly/3rxEsMA. Acesso em: 05 mar. 2021.

TADELIS, S. **Game theory:** an introduction. Princeton: Princeton University Press, 2013.