Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 21, dez. 2021

Um estudo dos números hiperbólicos de Jacobsthal-Lucas

A study of the Jacobsthal-Lucas hyperbolic numbers

Renata Passos Machado Vieira
SEDUC-CE
Secretaria de Educação do Estado do Ceará
re.passosm@gmail.com

Thamires Silva Aquino de Souza
IFCE
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará
thamy.2019@gmail.com

Francisco Regis Vieira Alves
IFCE/Fortaleza
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará
fregis@gmx.fr

Paula Maria Machado Cruz Catarino
UTAD/Portugal
Universidade de Trás os Montes de Alto Douro
pcatarino23@gmail.com

Resumo

No trabalho em questão, apresentamos um tipo de sequência relacionada à sequência de Jacobsthal-Lucas, fundamentada nas sequencias de Jacobsthal e de Lucas. Nesse sentido, evidenciamos a sequência hiperbólica de Jacobsthal-Lucas. Ao longo do texto são discutidas as principais definições e proposições relativas ao tópico e ainda a sua forma matricial.

Palavras-chave: Sequência Hiperbólica de Jacobsthal-Lucas. Sequência de Jacobsthal-Lucas.

Abstract

In the present work, we introduce a type of sequence related to the sequence of Jacobsthal-Lucas, based on the sequences of Jacobsthal and Lucas. In this sense, we show the Jacobsthal-Lucas hyperbolic sequence. Throughout the text the main definitions and properties related to the topic are discussed, as well as their matrix form.

Keywords: Jacobsthal-Lucas Hyperbolic Sequence. Jacobsthal-Lucas sequence.

Artigo recebido em jun. 2021 e aceito em out. 2021

Este artigo está licenciado com uma Licença Creative Commons Attribution 4.0 International, podendo ser usado, distribuído e reproduzido, sem restrições, desde que o trabalho original seja devidamente citado.

1 Introdução

No âmbito das sequências lineares e recorrentes, podemos destacar uma das sequências que está sendo amplamente difundida, qual seja a sequência de Jacobsthal. A mesma é definida pela seguinte relação de recorrência $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$, $n \geqslant 2$, cujas condições iniciais são dadas por $J_0 = 0$ e $J_1 = 1$, e que descreve por consequência o seguinte conjunto numérico $\{J_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, \ldots\}$ [1]. Essa sequência recebe o nome em homenagem ao matemático Ernest Erich Jacobsthal (1882-1965), famoso matemático alemão que foi o pioneiro a estudar os polinômios de Fibonacci.

Ainda no que diz respeito à tais sequencias, evidenciamos a sequência de Lucas, uma das mais conhecidas na literatura especializada. Tal sequencia é definida pela relação de recorrência $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geqslant 2$ com as condições iniciais $L_0 = 2$ e $L_1 = 1$, que descreve o conjunto numérico $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \ldots\}$ [2]. A sequência admite esse nome em referência ao matemático francês François Édouard Anatole Lucas (1842-1891), conhecido por suas significativas contribuições em teoria dos números e no ramo da matemática recreativa, como por exemplo, a elaboração do problema das torres de Hanói.

Com base nas sequências mencionadas anteriormente, apresentamos uma sequência de natureza semelhante nomeada Sequência de Jacobsthal-Lucas, que é definida por meio da relação de recorrência $j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}, n \geqslant 2$, e tem como condições iniciais os valores $j_0 = 2$ e $j_1 = 1$ e que caracteriza o conjunto numérico $\{j_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{2, 1, 5, 7, 17, 31, 65, 127, 257, 511, \ldots\}$. Assim, essa sequência é fundamentada nas sequências anteriores, pois preserva a mesma relação de recorrência da sequencia de Jacobsthal, mas com as condições iniciais previstas na sequência de Lucas.

Nessa perspectiva, ao longo dos anos foram desenvolvidos diversos modelos de generalização da sequência de Jacobsthal-Lucas. Diante disso, manifestamos o interesse pelo estudo dos números hiperbólicos de Jacobsthal-Lucas. Assim, podemos destacar o trabalho [3] que apresenta uma discussão sobre a sequência hiperbólica de Fibonacci. Não obstante, o trabalho [4] propõe a definição dos números hiperbólicos de Jacobsthal e desenvolve as principais proposições relativas a esse tópico.

Desse modo, nas seções seguintes, definiremos a Sequência hiperbólica de Jacobsthal-Lucas e abordaremos suas principais proposições.

2 A sequência hiperbólica de Jacobsthal-Lucas

A presente seção introduz a sequência hiperbólica de Jacobsthal-Lucas, realizando uma investigação em torno dos conceitos matemáticos desses números. Assim, tomando como base o trabalho [5], são realizadas algumas definições.

Os números hiperbólicos são descritos por $\mathbb{H} = \left\{z = x + hy | h \notin \mathbb{R}, h^2 = 1, x, y \in \mathbb{R}\right\}$. A adição e multiplicação de dois desses números hiperbólicos n_1 e n_2, são dadas por [6,7]:

$$\begin{aligned} n_1 \pm n_2 &= (x_1 + hy_1) \pm (x_2 + hy_2) = (x_1 \pm x_2) + h(y_1 \pm y_2) \\ n_1 n_2 &= (x_1 + hy_1)(x_2 + hy_2) = (x_1x_2) + (y_1y_2) + h(x_1y_2 + x_2y_1) \\ &= (x_1x_2 + y_1y_2) + h(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

A divisão de dois desses números hiperbólicos n_1 e n_2, é dada por:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{x_1 + hy_1}{x_2 + hy_2} = \frac{(x_1 + hy_1)(x_1 - hy_1)}{(x_2 + hy_2)(x_2 - hy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 - y_2^2} + h\frac{x_1y_2 + y_1x_2}{x_2^2 - y_2^2},$$

se $x_2^2 + y_2^2 \neq 0$, ou seja $x \neq \pm y$. ($\mathbb{H}$ não é um corpo).

O conjugado do número hiperbólico $n = x + hy$ é $\overline{n} = x - hy$. Assim, tem-se que:

$$\overline{n_1 + n_2} = \overline{n_1} + \overline{n_2}.$$
$$\overline{n_1.n_2} = \overline{n_1}.\overline{n_2}.$$
$$||n|| = \overline{n}^2 = n.\overline{n} = x^2 - y^2.$$

Definição 1. *A sequência de Jacobsthal, J_n, é definida por:*

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2},$$

com $J_0 = 0$ e $J_1 = 1$.

Definição 2. *A sequência de Jacobsthal-Lucas, j_n, é definida por:*

$$j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2},$$

com $j_0 = 2$ e $j_1 = 1$.

Com base nas definições das fórmula de recorrência de Jabosthal e Jacobsthal-Lucas, tem-se a definição da recorrência dos números hiperbólicos de Jacobsthal-Lucas.

Definição 3. *A sequência hiperbólica de Jacobsthal-Lucas, $\tilde{j}_n$, é definida por:*

$$\tilde{j}_n = j_n + hj_{n+1}, n \geqslant 0,$$

em que $h^2 = 1$.

Observação 4. *Pelas definições acima, a fórmula de recorrência da sequência hiperbólica de Jacobsthal-Lucas, é dada por:*

$$\begin{aligned}\tilde{j}_n &= j_n + hj_{n+1} = (j_{n-1} + 2j_{n-2}) + h(j_n + 2j_{n-1})\\ &= (j_{n-1} + hj_n) + 2(j_{n-2} + hj_{n-1})\\ &= \tilde{j}_{n-1} + 2\tilde{j}_{n-2},\end{aligned}$$

onde $n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}$ e com $\tilde{j}_0 = 2 + h$ e $\tilde{j}_1 = 1 + 5h$, em que $h^2 = 1$.

Proposição 5. *A função geradora da sequência hiperbólica de Jacobsthal-Lucas é dada por:*

$$g(\tilde{j}_n, x) = \frac{2 + h + (-1 + 4h)x}{1 - x - 2x^2}.$$

Demonstração. Realizando a multiplicação da função por x, $2x^2$ nas equações abaixo, tem-se:

$$g(\tilde{j}_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_n x^n = \tilde{j}_0 + \tilde{j}_1 x + \tilde{j}_2 x^2 + \ldots + \tilde{j}_n x^n + \ldots \tag{1}$$
$$xg(\tilde{j}_n, x) = \tilde{j}_0 x + \tilde{j}_1 x^2 + \tilde{j}_2 x^3 + \ldots + \tilde{j}_{n-1} x^n + \ldots \tag{2}$$
$$2x^2 g(\tilde{j}_n, x) = 2\tilde{j}_0 x^2 + 2\tilde{j}_1 x^3 + 2\tilde{j}_2 x^4 + \ldots + 2\tilde{j}_{n-2} x^n + \ldots \tag{3}$$

Baseada na Equação (1-2-3), tem-se que:

$$(1-x-2x^2)g(\tilde{j}_n,x) = \tilde{j}_0 + (\tilde{j}_1 - \tilde{j}_0)x + (\tilde{j}_2 - \tilde{j}_1 - 2\tilde{j}_0)x^2 + \ldots + (\tilde{j}_n - \tilde{j}_{n-1} - 2\tilde{j}_{n-2})x^n + \ldots$$

Com base nos valores iniciais: $\tilde{j}_0 = 2+h$, $\tilde{j}_1 = 1+5h$ e em sua respectiva fórmula de recorrência, pode-se obter:

$$\begin{aligned}(1-x-2x^2)g(\tilde{j}_n,x) &= 2+h+(-1+4h)x\\ g(\tilde{j}_n,x) &= \frac{2+h+(-1+4h)x}{1-x-2x^2}.\end{aligned}$$

□

Teorema 6. *A fórmula de Binet da sequência hiperbólica de Jacobsthal-Lucas, com $n \in \mathbb{Z}$, é descrita por:*

$$\tilde{j}_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n,$$

com $\alpha = 1+2h$ e $\beta = 1-h$.

Demonstração. Utiliza-se a função geradora $g(\tilde{j}_n,x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{j}_n x^n$, calcula-se a fórmula geral (fórmula de Binet) de $\tilde{j}_n$:

$$\begin{aligned}g(\tilde{j}_n,x) &= \frac{2+h+(-1+4h)x}{1-x-2x^2} = \frac{2+h+(-1+4h)x}{(-2x+1)(x+1)}\\ &= \frac{1}{3}[2+h+(-1+4h)x][\frac{2}{-2x+1}+\frac{1}{x+1}]\\ &= \frac{1}{3}[2+h+(-1+4h)x][2\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n],\ |x| < \frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{3}[2+h+(-1+4h)x]\sum_{n=0}^{+\infty}(2^{n+1}+(-1)^n)x^n\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3}[(2+h)(2^{n+1}+(-1)^n)+(-1+4h)(2^n+(-1)^{n-1})]x^n.\end{aligned}$$

Portanto, para $n \in \mathbb{Z}$, temos:

$$\begin{aligned}\tilde{j}_n &= \frac{1}{3}[(2+h)(2^{n+1}+(-1)^n)+(-1+4h)(2^n+(-1)^{n-1})]\\ &= \frac{1}{3}[(4+2h)2^n+(2+h)(-1)^n+(-1+4h)2^n+(1-4h)(-1)^n]\\ &= \frac{1}{3}[(3+6h)2^n+(3-3h)(-1)^n]\\ &= (1+2h)2^n+(1-h)(-1)^n.\end{aligned}$$

Logo, a fórmula de Binet da sequência hiperbólica de Jacobsthal-Lucas é:

$$\tilde{j}_n = (1+2h)2^n + (1-h)(-1)^n,\ \forall n \geqslant 0.$$

□

A forma matricial é baseada no trabalho [8]

Teorema 7. *Para $n > 1$ e $n \in \mathbb{N}$, a forma matricial da sequência hiperbólica de Jacobsthal-Lucas é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 5+h & 2+h \\ 1+h & -\frac{1}{2}+2h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{n+2}+hJ_{n+2} & \tilde{j}_n \\ j_{n+1}+hJ_{n+1} & \tilde{j}_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Por meio do princípio da indução finita, para $n = 2$, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 5+h & 2+h \\ 1+h & -\frac{1}{2}+2h \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5+h & 2+h \\ 1+h & -\frac{1}{2}+2h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 17+5h & 5+7h \\ 7+3h & 1+5h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_4+hJ_4 & \tilde{j}_2 \\ j_3+hJ_3 & \tilde{j}_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Verificando a validade para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 5+h & 2+h \\ 1+h & -\frac{1}{2}+2h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{k+2}+hJ_{k+2} & \tilde{j}_k \\ j_{k+1}+hJ_{k+1} & \tilde{j}_{k-1} \end{bmatrix}.$$

Logo, verifica-se que seja válido para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} \begin{bmatrix} 5+h & 2+h \\ 1+h & -\frac{1}{2}+2h \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 5+h & 2+h \\ 1+h & -\frac{1}{2}+2h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_{k+2}+hJ_{k+2} & \tilde{j}_k \\ j_{k+1}+hJ_{k+1} & \tilde{j}_{k-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} j_{k+2}+hJ_{k+2}+2(j_{k+1}+hJ_{k+1}) & \tilde{j}_k+2\tilde{j}_{k-1} \\ j_{k+2}+hJ_{k+2} & \tilde{j}_k \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} j_{k+3}+hJ_{k+3} & \tilde{j}_{k+1} \\ j_{k+2}+hJ_{k+2} & \tilde{j}_k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

3 Generalização da sequência hiperbólica de Jacobsthal-Lucas

Doravante, realiza-se uma extensão desses números para os números inteiros não positivos, obtendo a generalização dessa sequência complexa. Com isso, são estudados conceitos matemáticos com o viés de realizar o processo evolutivo da complexificação da sequência de Jacobsthal-Lucas.

Definição 8. *A fórmula de recorrência da sequência de Jacobsthal, para os números inteiros não positivos, é dada por:*

$$J_{-n} = \frac{1}{2}\left(J_{(-n+2)} - J_{(-n+1)}\right),$$

$n > 0, n \in \mathbb{N}$ e com os mesmos valores iniciais definidos para a sequência positiva.

Definição 9. *A fórmula de recorrência da sequência de Jacobsthal-Lucas para os números inteiros não positivos, é dada por:*

$$j_{-n} = \frac{1}{2}\left(j_{(-n+2)} - j_{(-n+1)}\right),$$

$n > 0, n \in \mathbb{N}$ *e com os mesmos valores iniciais definidos para a sequência positiva.*

Definição 10. *A sequência hiperbólica de Jacobsthal-Lucas negativa, são descritas na forma:*

$$\tilde{j}_{(-n)} = \frac{1}{2}\left(\tilde{j}_{(-n+2)} - \tilde{j}_{(-n+1)}\right),$$

$n > 0, n \in \mathbb{N}$ *e com os mesmos valores iniciais definidos para a sequência positiva.*

Proposição 11. *A função geradora da sequência hiperbólica de Jacobsthal-Lucas para os termos negativos dessa sequência, é dada por:*

$$g(\tilde{j}_{-n}, x) = \frac{-4 - 2h - (1+5h)x}{x^2 - x - 2}.$$

Demonstração. Realizando a multiplicação dos fatores $\frac{1}{2}x^2$ e $\frac{1}{2}x$ na função geradora, tem-se:

$$g(\tilde{j}_{-n}, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{j}_{-n}x^n = \tilde{j}_0 + \tilde{j}_{-1}x + \tilde{j}_{-2}x^2 + \ldots + \tilde{j}_{-n}x^n + \ldots \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}xg(\tilde{j}_{-n}, x) = \frac{1}{2}\tilde{j}_0 x + \frac{1}{2}\tilde{j}_{-1}x^2 + \frac{1}{2}\tilde{j}_{-2}x^3 + \ldots + \frac{1}{2}\tilde{j}_{-n+1}x^n + \ldots \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}x^2 g(\tilde{j}_{-n}, x) = \frac{1}{2}\tilde{j}_0 x^2 + \frac{1}{2}\tilde{j}_{-1}x^3 + \frac{1}{2}\tilde{j}_{-2}x^4 + \ldots + \frac{1}{2}\tilde{j}_{-n+2}x^n + \ldots \tag{6}$$

Com base na Equação (6-4-5), é fácil ver que:
$(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1)g(\tilde{j}_{-n}, x) = -\tilde{j}_0 - (\tilde{j}_{-1} + \frac{1}{2}\tilde{j}_0)x + (\frac{1}{2}\tilde{j}_0 - \frac{1}{2}\tilde{j}_{-1} - \tilde{j}_{-2})x^2 + \ldots + (\frac{1}{2}\tilde{j}_{-n+2} - \frac{1}{2}\tilde{j}_{-n+1} - \tilde{j}_{-n})x^n + \ldots$

Considerando os valores iniciais e, realizando o cálculo com base na Definição 10, tem-se $\tilde{j}_0 = 2 + h$, $\tilde{j}_{-1} = -\frac{1}{2} + 2h$. Dessa forma:

$$\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1\right) g(\tilde{j}_{-n}, x) = -\tilde{j}_0 - (\tilde{j}_{-1} + \frac{1}{2}\tilde{j}_0)x$$

$$\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1\right) g(\tilde{j}_{-n}, x) = -2 - h - \frac{1}{2}(1+5h)x$$

$$g(\tilde{j}_{-n}, x) = \frac{-2 - h - \frac{1}{2}(1+5h)x}{\frac{1}{2}(x^2 - x - 2)}$$

$$g(\tilde{j}_{-n}, x) = \frac{-4 - 2h - (1+5h)x}{x^2 - x - 2}.$$

□

Teorema 12. *A forma matricial da sequência hiperbólica de Jacobsthal-Lucas com índice inteiro não positivo, com* $n > 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$*, é expressa por:*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 5+h & 2+h \\ 1+h & -\frac{1}{2}+2h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{-n+2} + hJ_{-n+2} & \tilde{j}_{-n} \\ j_{-n+1} + hJ_{-n+1} & \tilde{j}_{-n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo a demonstração do Teorema 7, pode-se validar este teorema. □

4 Algumas proposições

Nesta seção, são estudadas algumas proposições da sequência hiperbólica de Jacobsthal-Lucas e da sua generalização.

Proposição 13. *A soma dos n primeiros termos da sequência hiperbólica de Jacobsthal-Lucas são dados por:*

$$\sum_{k=0}^{n} \tilde{j}_k = \frac{1}{2}\left(\tilde{j}_{n+2} - (1+5h)\right).$$

Demonstração. Para $n \geqslant 1$ temos que $\tilde{j}_{n+1} = \tilde{j}_n + 2\tilde{j}_{n-1}$, logo $\tilde{j}_{n-1} = \frac{1}{2}\left(\tilde{j}_{n+1} - \tilde{j}_n\right)$. Dessa forma:

$$\begin{aligned}
\tilde{j}_0 &= \frac{1}{2}\left(\tilde{j}_2 - \tilde{j}_1\right)\\
\tilde{j}_1 &= \frac{1}{2}\left(\tilde{j}_3 - \tilde{j}_2\right)\\
\tilde{j}_2 &= \frac{1}{2}\left(\tilde{j}_4 - \tilde{j}_3\right)\\
&\vdots\\
\tilde{j}_{n-1} &= \frac{1}{2}\left(\tilde{j}_{n+1} - \tilde{j}_n\right)\\
\tilde{j}_n &= \frac{1}{2}\left(\tilde{j}_{n+2} - \tilde{j}_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Após os cancelamentos, tem-se:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \tilde{j}_k &= \frac{1}{2}\left(\tilde{j}_{n+2} - \tilde{j}_1\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\tilde{j}_{n+2} - (1+5h)\right)
\end{aligned}$$

□

Proposição 14. *A soma dos n primeiros termos com índice inteiro não positivo, dos números hiperbólicos de Jacobsthal-Lucas são dados por:*

$$\sum_{k=0}^{n} \tilde{j}_{-k} = -\frac{1}{2}\left(\tilde{j}_{-n+1} - 5 - 7h\right).$$

Demonstração. Para $n \geqslant 1$ temos que $\tilde{j}_{-n} = \frac{1}{2}\left(\tilde{j}_{-n+2} - \tilde{j}_{-n+1}\right)$. Dessa forma:

$$\begin{aligned}
\tilde{j}_{-1} &= \frac{1}{2}\left(\tilde{j}_1 - \tilde{j}_0\right)\\
\tilde{j}_{-2} &= \frac{1}{2}\left(\tilde{j}_0 - \tilde{j}_{-1}\right)\\
\tilde{j}_{-3} &= \frac{1}{2}\left(\tilde{j}_{-1} - \tilde{j}_{-2}\right)\\
&\vdots\\
\tilde{j}_{-n+1} &= \frac{1}{2}\left(\tilde{j}_{-n+3} - \tilde{j}_{-n+2}\right)\\
\tilde{j}_{-n} &= \frac{1}{2}\left(\tilde{j}_{-n+2} - \tilde{j}_{-n+1}\right)
\end{aligned}$$

Após os cancelamentos, tem-se:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \tilde{j}_{-k} &= \tilde{j}_0 + \sum_{k=1}^{n} \tilde{j}_{-k} \\ &= \tilde{j}_0 + \frac{1}{2}\left(\tilde{j}_1 - \tilde{j}_{-n+1}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(-\tilde{j}_1 - 2\tilde{j}_0 + \tilde{j}_{-n+1}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\tilde{j}_{-n+1} - 5 - 7h\right).\end{aligned}$$

□

Proposição 15. *Para $n \geqslant 1$, tem-se a relação:*

$$\tilde{j}_{n-1}(j_{n+2} + hJ_{n+2}) - \tilde{j}_n(j_{n+1} + hJ_{n+1}) = (-2)^n \left(\frac{-7 + 13h}{2}\right).$$

Demonstração. Realizando a demonstração pelo método das matrizes, tem-se que:

$$det \begin{bmatrix} j_{n+2} + hJ_{n+2} & \tilde{j}_n \\ j_{n+1} + hJ_{n+1} & \tilde{j}_{n-1} \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n det \begin{bmatrix} 5 + h & 2 + h \\ 1 + h & -\frac{1}{2} + 2h \end{bmatrix}$$

$$\tilde{j}_{n-1}(j_{n+2} + hJ_{n+2}) - \tilde{j}_n(j_{n+1} + hJ_{n+1}) = (-2)^n \left(\frac{-7 + 13h}{2}\right).$$

□

Proposição 16. *Para $n \geqslant 0$, tem-se a relação para os termos com números inteiros não positivos:*

$$\tilde{j}_{-n-1}(j_{-n+2} + hJ_{-n+2}) - \tilde{j}_{-n}(j_{-n+1} + hJ_{-n+1}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{-7 + 13h}{2}\right).$$

Demonstração. Realizando a demonstração pelo método das matrizes, tem-se que:

$$det \begin{bmatrix} j_{-n+2} + hJ_{-n+2} & \tilde{j}_{-n} \\ j_{-n+1} + hJ_{-n+1} & \tilde{j}_{-n-1} \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^n det \begin{bmatrix} 5 + h & 2 + h \\ 1 + h & -\frac{1}{2} + 2h \end{bmatrix}$$

$$\tilde{j}_{-n-1}(j_{-n+2} + hJ_{-n+2}) - \tilde{j}_{-n}(j_{-n+1} + hJ_{-n+1}) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{-7 + 13h}{2}\right).$$

□

5 Conclusão

Neste trabalho discutimos alguns aspectos relacionados a Sequência Hiperbólica de Jacobsthal-Lucas. Assim, abordamos certas proposições que podem constatar a evolução de um modelo matemático.

Nesse sentido, alguns modelos de generalização foram propostos baseados na sequência clássica de Jacobsthal-Lucas. Assim, destacamos a função geradora e forma matricial. Além disso, foi apresentada uma generalização para os números inteiros não positivos, com isso foi introduzida a sequência hiperbólica de Jacobsthal-Lucas não negativa, bem como algumas proposições relativas ao tópico. Ademais, nos trabalhos futuros, ensejamos propor novos modelos de generalização que são desconhecidos na literatura especializada.

6 Referências Bibliográficas

[1] HORADAM, A. F. Jacobsthal representation numbers. **The Fibonacci Quaterly**, v. 34, n. 1, p. 40-54, 1996.

[2] HOGGATT, V. E. **Fibonacci and Lucas numbers**. Boston: Houghton Mifflin, 1969.

[3] AYDIN, F. T. Hyperbolic Fibonacci sequence. **Universal Journal Of Mathematics And Applications**, v. 2, n. 2, p. 59-64, 2019.

[4] DIKMEN, C. M. Hyperbolic Jacobsthal numbers. **Asian Research Journal Of Mathematics**, v. 15, n. 4, p. 1-9, 2019.

[5] CATARINO, P.; MORGADO, M. L. On generalized Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas polynomials. **Analele stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta**, v. 24, n. 3, p. 61-78, 2016.

[6] CIHAN, A.; AZAK, A. Z.; GUNGOR, M. A.; TOSUN, M. A study on dual hyperbolic Fibonacci and Lucas number. **Analele stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta**, v. 27, n. 1, p. 35-48, 2019.

[7] SOYKAN, Y.; GOCEN, M. Properties of hyperbolic generalized Pell numbers. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 26, n. 4, p. 136-153, 2020.

[8] ASCI, M.; GUREL, E. Gaussian Jacobsthal and Gaussian Jacobsthal Lucas polynomials. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 19, n. 1, p. 25-36, 2013.